Олимпиадные задания по математике 10-11 классы

1. Можно ли провести в городе 10 автобусных маршрутов и установить на них остановки так, что для любых 8 маршрутов найдётся остановка, не лежащая ни на одном из них, а любые 9 маршрутов проходят через все остановки?

Ответ: можно.

Решение. Рассмотрим, например, 10 прямых плоскости. Никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Будем считать, что прямые – это автобусные маршруты, а их точки пересечения – остановки. При этом с каждой остановки можно проехать на любую другую: если остановки лежат на одной прямой, то без пересадки, а если нет, то с одной пересадкой. Далее, если даже отбросить в этой схеме одну прямую, то всё ещё останется возможность проехать с каждой остановки на любую другую, сделав в пути не больше одной пересадки. Однако если отбросить две прямые, то одна остановка (точка пересечения этих прямых) уже вовсе не будет обслуживаться оставшимися маршрутами и с неё будет невозможно проехать на какую- либо другую.

2. Сколько существует четырехзначных чисел, не делящихся на 1000, у которых первая и последняя цифры чётны?

Ответ: 1996.

Решение. Первая цифра числа может быть любой из четырёх (2,4,6 или 8), вторая и третья – любой из десяти каждая, а четвёртая, если отказаться от условия « не делящихся на тысячу», - любой из пяти (0,2, 4,6 или 8). Следовательно, четырёхзначных чисел, в записи которых первая и последняя цифры чётны, всего имеется 4+10+10+5= 2000; так как среди них четыре числа (2000, 4000, 6000, 8000) делятся на 1000, то чисел, удовлетворяющих условию задачи, окажется 2000 – 4 = 1996.

3. На доске через запятую выписаны числа 1, 2, 3, … 99. Двое играющих по очереди заменяют одну из имеющихся запятых на знак «+» или «×» (умножить). После того как запятых не останется, игроки вычисляют значение полученного выражения. Если результат является нечётным

числом, то выигрывает первый, а если чётным – второй. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ: выигрывает второй игрок.

Решение. Для достижения успеха второй игрок может пользоваться симметричной стратегией: если первый ставит какой – то знак между числами к и к+1, то второй ставит такой же знак между числами 99-к и 100-к. Выражение, которое получится в конце игры, будет содержать несколько слагаемых – произведений, причём слагаемое, содержащее число 50, является чётным, а остальные слагаемые естественным образом разобьются на пары «симметричных» слагаемых одинаковой чётности. Таким образом, выражение, полученное в конце игры, окажется чётным.

4. Расположите натуральные числа от 1 до 100 в строку так, чтобы разность между любыми двумя соседними числами была равна 2 или 3.

Решение. Например, так:1, 3, 5, 2, 4, 6, 8,10, 7, 9 , 11, … , 96, 98, 100,97, 99 (в каждой пятёрке порядок расположения чисел 5к+1, 5к+3, 5к+5, 5к+2, 5к+4)

5. На какое наибольшее число натуральных слагаемых можно разложить число 96 так, чтобы все слагаемые были больше 1 и попарно взаимно просты?

Ответ: на семь слагаемых.

Решение. Приведём пример разбиения числа 96 на семь слагаемых:

9 6 = 2 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 41.

Если слагаемых больше, то среди них не менее восьми нечётных (если их семь, то сумма нечётна). Заменим каждое из них на наименьший простой сомножитель. При этом сумма не увеличится, и все слагаемые будут различны. Но сумма восьми наименьших нечётных простых чисел равна 98.

6. Докажите, что числа от 1 до 16 можно записать в строку, но нельзя записать по кругу так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была квадратом натурального числа.

Решение. Если рядом с числом 16 стоит число x, то $16 + 1 \leq 16 + x = a^2 \leq 16 + 15$, откуда $a^2 = 25$ и $x = 9$. поэтому у числа 16 не может быть более одного соседа и удовлетворяющее условию расположение чисел по кругу невозможно. Пример расположения в строку:

16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8.

7. Правильный 1997-угольник разбит непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что среди них ровно один - остроугольный.

Решение. Окружность, описанная около правильного 1997- угольника, является описанной и для любого треугольника данного разбиения. Так как центр окружности, описанной около правильного 1997- угольника, не лежит на диагонали, то он попадает внутрь какого-то одного треугольника.

Треугольник является остроугольным, если центр описанной окружности лежит внутри него, и тупоугольным, если центр описанной окружности лежит вне его. Следовательно, треугольник, в который попал центр описанной окружности, - остроугольный, все остальные – тупоугольные.

8. В классе 33 человека. У каждого ученика спросили, сколько у него в классе тёзок и сколько однофамильцев (включая родственников). Оказалось, что среди названных чисел встретились все целые, от 0 до 10 включительно. Докажите что в классе есть два ученика с одинаковыми именем и фамилией.

Решение. Объединим учеников в группы по фамилиям и в группы по именам (возможны группы, состоящие из одного человека, - например, ученик, не имеющий однофамильцев).

Каждый войдёт в две группы – по фамилии и по имени. Из условия задачи следует, что в классе ровно 11 групп. Действительно, есть группы, состоящие из 1, 2, …, 11 человек, поэтому групп не менее 11, но 1 + 2 + … + 11 = 66 = 2 .33, т. е. мы уже сосчитали каждого ученика дважды, значит, больше групп нет.

Рассмотрим группу из 11 человек (скажем, однофамильцев). Остальных групп и, в частности, групп тёзок не более десяти. Поэтому какие – то двое из11 входят в одну группу тёзок, т. е. у них одинаковы и имя, и фамилия.

9. На листе бумаги проведено 11 горизонтальных и 11 вертикальных прямых, точки пересечения которых называются узлами. Звеном мы будем называть отрезок, соединяющий два соседних узла одной прямой. Какое наименьшее число звеньев надо стереть, чтобы после этого в каждом узле сходилось не более трёх звеньев?

Ответ: 41 звено.

Решение. Звенья следует стирать через одно.

10. В классе не менее 95,5% и не более 96,5% учеников учатся без двоек. При каком наименьшем числе учеников это возможно?

Ответ: 23.

Решение. Исходя из условия задачи заключаем, что хотя бы один двоечник в классе есть. Понятно, что меньше всего учеников будет в классе, где двоечник только один. Поскольку двоечников – не более 4,5% от общего числа учеников, то всего в классе не менее 1 : 0,045 =22 2⁄9 человек, т. е. не менее 23 человек. Класс из 23 учеников, среди которых ровно один двоечник, удовлетворяет условию задачи.

11. Двое по очереди закрашивают клетки таблицы 8 × 8. одним ходом разрешается закрасить одну или несколько клеток, расположенных либо в одной строке, либо в одном столбце таблицы. Клетки закрашенные ранее, закрашивать вторично запрещается, проигравшим считается тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнёр?

Ответ: выигрывает партнёр начинающего.

Решение. Для того чтобы победить, он должен каждым своим ходом закрашивать клетки, симметричные клеткам, закрашенным предыдущим ходом начинающего (относительно центра доски или одной из осей симметрии доски, параллельной её краям).

12. Решить в целых числах систему уравнений

$$\begin{cases} xy + z = 94, \\ x + yz = 95. \end{cases}$$

Ответ: $x = 95$, $y = 0$, $z = 94$ или $x = 31$, $y = 2$, $z = 32$.

Решение. Вычтя из второго уравнения первое, получим $(x - z)(1 - y) = 1$.

По условию, x, y, z целые, тогда возможны два случая:

1) $x – z = 1$, $1 – y = 1$, т. е. $y = 0$. Подставив значение y в систему, получим: $z =94$, $x=95$.

2) $x –z = -1$, $1 – y = - 1$, т. е. $z = x +1$, $y = 2$. Подставим найденные значения y и z в первое уравнение, получим $2x + x +1 = 94$, $x = 31$. Отсюда $z = 32$.

13. Докажите, что если $a^2 +в^2 + ав + вс + сa < 0$, то $a^2 +в^2 < c^2$.

Решение. Домножим обе части неравенства на 2 и преобразуем его следующим образом:

$2a^2+2в^2+2(ав+вс+сa)<0$,

$a^2+в^2+c^2+2(ав+вс+сa)+a^2+в^2–c^2<0$,

$(a+в+c)^2+a^2+в^2–c^2<0$,

$a^2+в^2–c^2<–(a+в+c)^2\le 0$.

Отсюда $a^2+в^2–c^2<0$, или $a^2+в^2< c^2$.

14. На кубе отмечены вершины и центры граней, а также проведены диагонали всех граней. Можно ли по отрезкам этих диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

Ответ: нельзя.

Решение. Двигаясь по отрезкам диагоналей, мы проходим поочерёдно через вершины и центры граней. Но у куба 8 вершин и только 6 граней.

15 Можно ли на плоскости расположить бесконечное множество одинаковых кругов так, чтобы любая прямая пересекала не более двух кругов?

Ответ: можно.

Решение. Например, круги можно расположить далеко друг от друга так, чтобы их центры лежали на параболе $y=x^2$.

Литература.

1.Н. Х. Агаханов, Д. А. Терешин, Г. М.Кузнецова „Школьные математические олимпиады " - М. : Дрофа , 2002.

2. Г.А. Гальперин, А.К.Толпыго „Московские математические олимпиады" -М.: Просвещение, 1986.

3. журнал „ Математика в школе" №4 1995г.