Олимпиадные задания для учащихся 10 класса

№1

Решить в целых числах уравнение $xy + 3x - 5y = -3$.

№2

У нумизмата есть 100 одинаковых по внешнему виду монет. Он знает, что среди них 30 настоящих и 70 фальшивых монет. Кроме того, он знает, что массы всех настоящих монет одинаковы, а массы всех фальшивых – разные, причём каждая фальшивая монета тяжелее настоящей; однако точные массы монет неизвестны. Имеются двухчашечные весы без гирь, на которых можно за одно взвешивание сравнить массы двух групп, состоящих из одинакового числа монет.
За какое наименьшее количество взвешиваний на этих весах нумизмат сможет гарантированно найти хотя бы одну настоящую монету?

№3

Наконец, у Снежной Королевы появились все квадраты с целыми сторонами, но каждый в единственном экземпляре. Королева пообещала Каю, что он станет мудрым, если сможет из каких-то имеющихся квадратов сложить прямоугольник. Сможет ли он это сделать?

№4

В выпуклом четырехугольнике равны длины отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, а длины диагоналей равны 4 и 5. Найдите площадь данного четырехугольника.

№5

На квадратном поле из 121 клетки десять клеток поросли бурьяном. После этого бурьян может распространиться на клетку, у которой не менее двух соседних клеток уже поросли бурьяном. Какое наибольшее число клеток может порасти бурьяном?

Ответы к олимпиадным заданиям для учащихся 10 класса

№1

Условие

Решить в целых числах уравнение $xy + 3x – 5y = – 3$.

Решение

xy + 3x – 5y-15 = – 3– 15

(xy– 5y)+(3x-15) = – 18

y (x-5)+3(x-5) = – 18

Запишем уравнение в виде $(x – 5)(y + 3) = – 18$. Его решения соответствуют представлениям числа –18 в виде произведения двух целых чисел.

Ответ

(–13, –2), (–4, –1), (–1, 0), (2, 3), (3, 6), (4, 15), (6, –21), (7, –12),
(8, –9), (11, –6), (14, –5), (23, –4).

№2

Условие

У нумизмата есть 100 одинаковых по внешнему виду монет. Он знает, что среди них 30 настоящих и 70 фальшивых монет. Кроме того, он знает, что массы всех настоящих монет одинаковы, а массы всех фальшивых – разные, причём каждая фальшивая монета тяжелее настоящей; однако точные массы монет неизвестны. Имеются двухчашечные весы без гирь, на которых можно за одно взвешивание сравнить массы двух групп, состоящих из одинакового числа монет.

За какое наименьшее количество взвешиваний на этих весах нумизмат сможет гарантированно найти хотя бы одну настоящую монету?

Решение

Сложим все 100 монет в кучу. Каждым взвешиванием нумизмат будет выбирать две монеты из кучи и сравнивать их. Если их массы равны, то обе монеты настоящие, и требуемая монета найдена. Если же нет, то более тяжёлая монета – фальшивая, и её можно выбросить из кучи.

Через 70 таких взвешиваний, если равенства никогда не будет, то в куче останется 30 монет, причём все настоящие останутся в куче. Значит, в этом случае нумизмат даже найдёт все 30 настоящих монет. Таким образом, 70 взвешиваний достаточно.

Оценка. Предположим, что у нумизмата есть алгоритм, позволяющий гарантированно найти настоящую монету не более, чем за 69 взвешиваний.

Мы покажем, что это невозможно – даже в предположении, что массы монет таковы: масса настоящей равна 2^{100}, а масса m_i i-й фальшивой равна $2^{100} + 2^i$.

При таком предположении результат любого взвешивания можно определить так. Пусть при некотором взвешивании на чашках по k монет, среди которых $d > 0$ фальшивых, имеющих номера $i_1 < i_2 < \ldots < i_d$. Тогда на чашке, на которой лежит самая тяжёлая монета, суммарная масса не меньше $k \cdot 2^{100} + 2^{i_d}$, а суммарная масса на другой чашке не больше $k \cdot 2^{100} + (2^1 + \ldots + 2^{i_d - 1}) = k \cdot 2^{100} + 2^{i_d} - 2$. Значит, если на чашках есть хотя бы одна фальшивая монета, то перевесит чашка, на которой лежит фальшивая с наибольшим номером.

Итак, пусть нумизмат действует по своему алгоритму. Мы будем сообщать ему результаты взвешиваний и присваивать некоторым монетам массы m_i. При этом после каждого взвешивания присвоенными окажутся веса m_{70}, m_{69}, ..., m_{70-i} при некотором i. Если соответствующие монеты действительно имеют такие массы (а остальные массы распределены как угодно), то результаты взвешиваний будут такими, как мы сообщили.

При первом взвешивании выберем любую монету на чашках, присвоим ей массу m_{70} и сообщим, что чашка с ней тяжелее. При каждом следующем взвешивании, если на весах уже присутствует монета с присвоенной массой, то мы выберем из таких масс наибольшую и сообщим, что чашка с соответствующей монетой перевесила. Если же никакой монете на весах масса ещё не присвоена, то мы опять выберем любую монету на чашках, присвоим ей наибольшую ещё не присвоенную массу и сообщим, что чашка с ней тяжелее. Нетрудно видеть, что при этом требуемые условия соблюдаются.

Если нумизмат совершил не более 69 взвешиваний, то не более 69 масс окажутся присвоенными. В частности, m_1 присвоенной не будет. Значит, массу m_1 может иметь любая монета, которой масса ещё не присвоена, и при этом все результаты взвешиваний останутся такими, как мы сообщили. Поэтому нумизмат не сможет указать на заведомо настоящую монету.

Ответ

За 70 взвешиваний.

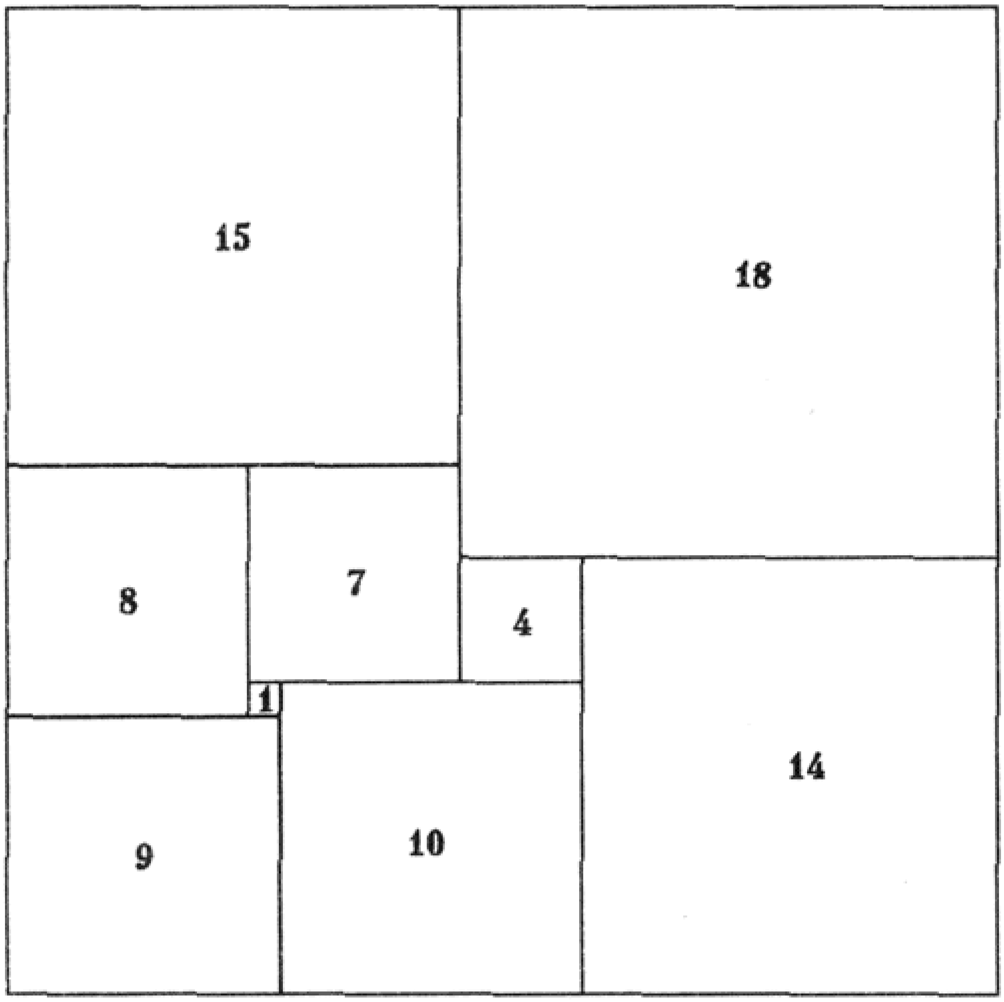
№3

Условие

Наконец, у Снежной Королевы появились все квадраты с целыми сторонами, но каждый в единственном экземпляре. Королева пообещала Каю, что он станет мудрым, если сможет из каких-то имеющихся квадратов сложить прямоугольник. Сможет ли он это сделать? Если сможет сделать рисунок.

Решение

Можно составить прямоугольник 33×32 из 9 попарно различных квадратов так, как показано на рисунке.



Замечание. Из меньшего числа попарно различных квадратов составить прямоугольник нельзя, но можно это сделать из любого числа квадратов, большего 9. Для этого достаточно приставить квадрат к стороне имеющегося прямоугольника, составленного из *n* квадратов.

№4

Условие

В выпуклом четырехугольнике равны длины отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, а длины диагоналей равны 4 и 5. Найдите площадь данного четырехугольника.

Решение

Пусть ABCD — данный выпуклый четырехугольник, а K, L, M и N — середины его сторон AB, BC, CD и DA соответственно. Заметим, что отрезки KL и MN являются средними линиями в треугольниках ABC и ACD. Поэтому они оба равны половине диагонали AC и параллельны AC. Значит, четырехугольник KLMN является параллелограммом (1 признак параллелограмма). По условию его диагонали KM и LN равны. Следовательно, четырехугольник KLMN является прямоугольником.

Поскольку его сторона KL параллельна диагонали AC
и LM параллельна диагонали BD изначального четырехугольника, то диагонали AC и BD перпендикулярны. По формуле площади четырехугольника : $S=1/2 \cdot AC \cdot BD$. Таким образом, $S=1/2 \cdot AC \cdot BD=10$.

Ответ: S= 10

№5

Условие

На квадратном поле из 121 клетки десять клеток поросли бурьяном. После этого бурьян может распространиться на клетку, у которой не менее двух соседних клеток уже поросли бурьяном. Какое наибольшее число клеток может порасти бурьяном?

Решение задачи

Заметим, что периметр поросшей бурьяном территории не увеличивается. Если рядом с клеткой, которая на которой вырастает бурьян, было три или четыре поросших бурьяном клетки, то он уменьшается, а если только две, то остаётся неизменным. Изначально он не больше, чем $10 \cdot 4=40$. Наибольшая площадь при данном периметре достигается в случае квадрата со стороной 10. Примером изначальной рассады бурьяна служит поросшая бурьяном главная диагональ без угловой клетки.
Несложно убедиться, что площадь бурьяна является полуинвариантом (она не уменьшается).

Ответ: 100