Олимпиадные задания для учащихся 10 класса

№1

Решите уравнение

$$(x^2 + x)^2 + \sqrt{x^2 - 1} = 0.$$

№2

В городе, где живет Рассеянный Ученый, телефонные номера состоят из 7 цифр. Ученый легко запоминает телефонный номер, если этот номер палиндром, то есть он одинаково читается слева направо и справа налево. Например, номер 4435344 Ученый запоминает легко, потому что этот номер палиндром. А номер 3723627 не палиндром, поэтому Ученый такой номер запоминает с трудом. Найдите вероятность того, что телефонный номер нового случайного знакомого Ученый запомнит легко.

№3

Биссектрисы углов трапеции образуют при пересечении четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями.
Докажите, что трапеция равнобокая.

№4

Алиса и Базилио играют в следующую игру; из мешка, первоначально содержащего 1331 монету, они по очереди берут монеты, причем первый ход делает Алиса и берет 1 монету, а далее при каждом следующем ходе игрок берет (по своему усмотрению) либо столько же монет, сколько взял другой игрок последним ходом, либо на одну больше. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход по правилам. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш независимо от ходов другого?

№5

На столе лежат 365 карточек, на обратной стороне которых написаны различные числа. За один рубль Вася может выбрать три карточки и попросить Петю положить их слева направо так, чтобы числа на карточках располагались в порядке возрастания. Может ли Вася, потратив 2000 рублей, с гарантией выложить все 365 карточек на стол слева направо так, чтобы числа на них располагались в порядке возрастания?

Ответы к олимпиадным заданиям для учащихся 10 класса

№1

Условие

Решите уравнение

$$(x^2 + x)^2 + \sqrt{x^2 - 1} = 0.$$

Решение

Так как числа $(x^2 + x)^2$ и $\sqrt{x^2 - 1}$ неотрицательные, а их сумма равна нулю, то оба эти числа равны нулю. С другой стороны, если оба эти числа равны нулю, то их сумма равна нулю. Следовательно, исходное уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} (x^2+x)^2 = 0; \\ \sqrt{x^2-1} = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x = 0; \\ x^2-1 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{0, -1\}; \\ x \in \{1, -1\}. \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

Ответ: $x = -1$

№2

Условие

В городе, где живет Рассеянный Ученый, телефонные номера состоят из 7 цифр. Ученый легко запоминает телефонный номер, если этот номер палиндром, то есть он одинаково читается слева направо и справа налево. Например, номер 4435344 Ученый запоминает легко, потому что этот номер палиндром. А номер 3723627 не палиндром, поэтому Ученый такой номер запоминает с трудом. Найдите вероятность того, что телефонный номер нового случайного знакомого Ученый запомнит легко.

Решение

Как известно, первая цифра телефонного номера может быть не всякой. Пусть число разрешённых первых цифр равно m. Тогда общее число номеров равно $m \cdot 10^6$. *Легкий* номер (тот, который запоминается легко) однозначно определяется первыми четырьмя цифрами. Значит, семизначных палиндромов всего $m \cdot 10^3$.

Поэтому вероятность того, что случайно взятый номер окажется лёгким, равна $\dfrac{m \cdot 10^3}{m \cdot 10^6} = 0,001$.

Ответ: 0,001

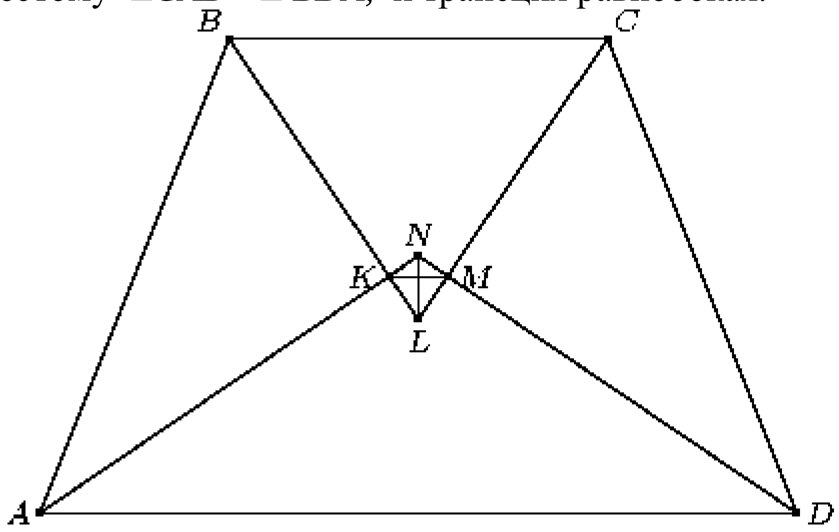
№3

Условие

Биссектрисы углов трапеции образуют при пересечении четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями.
Докажите, что трапеция равнобокая.

Решение

Пусть $KLMN$ – четырёхугольник, образованный биссектрисами (см. рис.). Так как AK и BK – биссектрисы смежных углов трапеции, то $\angle LKN = 90°$. Аналогично, $\angle LMN = 90°$. Следовательно, $LK^2 + KN^2 = LM^2 + MN^2$. С другой стороны, из перпендикулярности диагоналей получаем, что $KL^2 + MN^2 = KN^2 + LM^2$. Из этих двух равенств следует, что $KL = LM$ и $MN = NK$, а значит, $\angle NKM = \angle NMK$. Но точки K, M, как точки пересечения биссектрис смежных углов, равноудалены от оснований трапеции, то есть $KM \parallel AD$. Поэтому $\angle CAD = \angle BDA$, и трапеция равнобокая.



№4

Условие

Алиса и Базилио играют в следующую игру; из мешка, первоначально содержащего 1331 монету, они по очереди берут монеты, причем первый ход делает Алиса и берет 1 монету, а далее при каждом следующем ходе игрок берет (по своему усмотрению) либо столько же монет, сколько взял другой игрок последним ходом, либо на одну больше. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход по правилам. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш независимо от ходов другого?

Решение

Пусть Алиса независимо от действий Базилио берет первым ходом 1 монету, вторым -2, третьим -3 и т.д., увеличивая каждый раз количество взятых монет на 1. Это не противоречит правилам, так как при такой игре Алисы Базилио сможет первым ходом взять 1 или 2 монеты, вторым 2 или 3 и т.д. Тогда после k-го хода Алисы игроки возьмут монет не менее

$$(1 + 2 + \ldots + k) + (1 + 2 + \ldots + (k - 1)) = k^2$$

и не более

$$(1 + 2 + ... + k) + (2 + 3 + ... + k) = k(k + 1) - 1.$$

Так как $36 \cdot 37 - 1 = 1331$, то монет в любом случае хватит на 36-й ход Алисы. А так как $36^2 = 1296$ и $1331 - 1296 = 35$, то монет в любом случае не хватит на 36-й ход Базилио. Таким образом, Алиса выиграет.

Ответ: Выигрывает Алиса

№5

Условие

На столе лежат 365 карточек, на обратной стороне которых написаны различные числа. За один рубль Вася может выбрать три карточки и попросить Петю положить их слева направо так, чтобы числа на карточках располагались в порядке возрастания. Может ли Вася, потратив 2000 рублей, с гарантией выложить все 365 карточек на стол слева направо так, чтобы числа на них располагались в порядке возрастания?

Решение

Лемма. Пусть за x рублей Вася смог выложить в нужном порядке на стол некоторые $N - 1$ карточку, где $N \le 3^k$. Тогда он сможет добавить к выложенным карточкам еще одну, потратив при этом еще не более k рублей.

Доказательство проведем индукцией по k. *База* ($k = 1$) очевидна.

Шаг индукции. Пусть $N = 3m - r \le 3^k$ ($r = 0, 1, 2$). Первый рубль Вася потратит на то, чтобы правильно выложить на стол N-ю карточку и карточки A и B , уже лежащие на местах m и $2m$. Тогда N-я карточка попадет в одну из трех частей, на которые другие две карточки разбивают уже выложенную на стол последовательность. Но карточки A и B разбивают лежащую на столе последовательность из $N - 1$ карточки на куски размером не более чем по $m - 1 \le 3^{k-1} - 1$ карточек, а значит, Васе осталось определить место карточки с номером N среди не более чем $3^{k-1} - 1$ карточек, потратив не более чем $k - 1$ рубль, а это можно сделать по предположению индукции.

Теперь, используя лемму, подсчитаем Васины затраты на выкладывание всех 365 карточек. На выкладывание первых трех карточек Вася потратит 1 рубль. На добавление к ним карточек с номерами от 4 до 9 (всего 6 карточек) Вася потратит не более 2 рублей на каждую. На карточки с 10-й по 27-ю – не более 3 рублей на каждую, с 28-й по 81-ю – не более 4 рублей, с 82-й по 243-ю – не более 5 рублей и, наконец, на карточки с номерами от 244 до 365 – не более 6 рублей на каждую.

Итого, Вася сможет выложить все карточки на стол в нужном порядке, потратив не более чем $1 + 6\cdot 2 + 18\cdot 3 + 54\cdot 4 + 162\cdot 5 + 122\cdot 6 = 1845$ рублей.

Ответ: 1845 рублей