Пригласительный школьный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике

Решения задач

май 2021 г.

Содержание

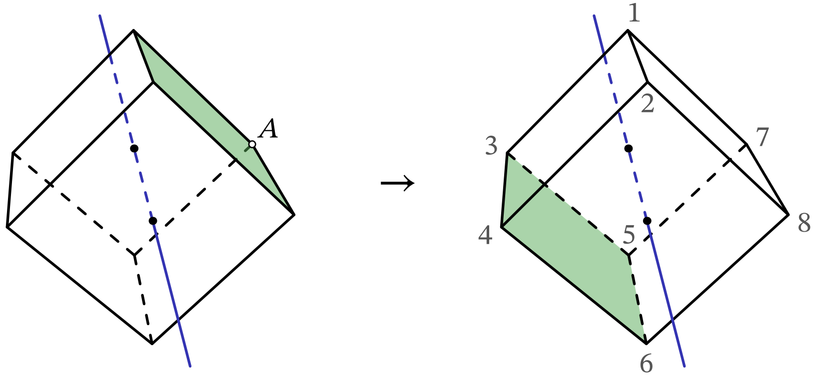
3 класс

Задача 3.1. Вася на следующий день после своего дня рождения сказал: «Жаль, что мой день рождения в этом году не в воскресенье, ведь в этом случае ко мне бы пришло больше гостей! Но воскресенье будет послезавтра...» В какой день недели у Васи был день рождения?

Ответ: Четверг.

Решение. Раз воскресенье будет послезавтра, то сегодня пятница. А раз сегодня следующий день после дня рождения, то сам день рождения был в четверг. □

Задача 3.2. Кубик повернули вокруг указанной оси так, что отмеченная грань повернулась указанным образом. А в вершину с каким номером перешла точка A?



Ответ: 3.

Решение. Из картинки видно, что A перешла в вершину с номером 3. Но можно привести и более строгое доказательство.

Точка A принадлежала трём граням: зелёной, дальней белой, правой нижней белой. При повороте вокруг оси эти три грани повернулись соответственно в новую зелёную, дальнюю белую и левую верхнюю белую. Единственная вершина кубика, которая всем им принадлежит, имеет номер 3. □

Задача 3.3. Несколько букв А и несколько букв Б сидели на трубе. После того, как несколько А упало и несколько Б пропало, на трубе остались всего три буквы и между ними произошёл следующий диалог:

Первая буква: «Я здесь одна такая буква.»

Вторая буква: «Букв А тут точно меньше двух.»

Третья буква: «Буква Б среди нас одна.»

Оказалось, что каждая буква сказала правду, если она А, и соврала, если она Б. Определите, где какая буква.

Ответ: Б, А, Б.

Решение. Предположим, третья буква — А. Тогда она сказала правду, и буква Б всего одна. Если первая буква — А, то она соврала, что невозможно. Если же первая буква — Б, то она сказала правду, что также невозможно.

Следовательно, третья буква — Б, и она соврала. Значит, хотя бы одна из первых двух букв — тоже Б. Если вторая буква — Б, то она сказала правду, что невозможно. Значит, вторая буква — А, но тогда первая буква — Б. Несложно видеть, что порядок букв Б, А, Б удовлетворяет всем условиям задачи. □

Задача 3.4. Замените картинки на цифры так, чтобы суммы по столбцам и по строкам были равны указанным. Одинаковые картинки соответствуют одинаковым цифрам, а разные — разным. Какое число после замены картинок на цифры получится под таблицей?

Ответ: 15243.

Решение. Назовём картинки под таблицей *кошкой, курицей, крабом, мишкой* и *козой.* В четвёртой строке 5 крабов дают в сумме 10, поэтому краб — это 2. В пятом столбце 4 краба и коза дают в сумме 11, поэтому коза — это 3. Во второй строчке 2 козы, 1 краб и 2 мишки дают в сумме 16, поэтому мишка — это 4. Во втором столбце 1 кошка, 1 мишка, 2 козы и 1 краб дают в сумме 13, поэтому кошка — это 1. Наконец, в третьем столбце 2 краба, 2 курицы и 1 коза в сумме дают 17, поэтому курица — это 5.

Итак, ответом в задаче является число 15243. □

Задача 3.5. Ваня написал на доске число 1347.

— Смотри! — заметил Петя. — В этом числе каждая из двух последних цифр равна сумме двух предыдущих.

— Точно! — согласился Вася.

— А сможешь написать самое большое четырёхзначное такое число?

Помогите Васе справиться с Петиным заданием.

Ответ: 9099.

Решение. Ясно, что в числе 9099 каждая из двух последних цифр равна сумме двух предыдущих.

Если бы с таким свойством существовало четырёхзначное число ещё больше, то его первая цифра была бы равна 9, а вторая была бы не меньше 1. Но тогда третья цифра была бы не меньше $9 + 1 = 10$, что невозможно. □

Задача 3.6. Петя умеет рисовать всего 4 вещи: солнце, мячик, помидор и банан. Зато крайне правдоподобно! Сегодня он нарисовал несколько вещей, среди которых ровно 15 жёлтых, 18 круглых и 13 съедобных. Какое наибольшее количество мячиков он мог нарисовать?

Петя считает, что все помидоры круглые и красные, все мячики круглые и могут быть любого цвета, а все бананы жёлтые и не круглые.

Ответ: 18.

Решение. Поскольку всего круглых вещей 18, а все мячики — круглые, то мячиков было не больше 18. Заметим, что их могло быть как раз ровно 18, если было нарисовано 2 жёлтых мячика, 16 зелёных мячиков и 13 бананов. □

Задача 3.7. Катя коротает время, пока родители работают. На листке бумаги она задумчиво в два ряда нарисовала Чебурашек (в каждом ряду оказался нарисован хотя бы один Чебурашка).

Потом, подумав, между каждыми двумя соседними Чебурашками в ряду она нарисовала по крокодилу Гене. А затем слева от каждого Чебурашки — по старухе Шапокляк. И напоследок между каждыми двумя персонажами в ряду она нарисовала по Кракозябре.

Внимательно посмотрев на рисунок, она поняла, что красиво получились у неё только Кракозябры, и яростно стёрла всех остальных. В итоге родители увидели два ряда Кракозябр: всего 29 штук. Сколько Чебурашек было стёрто?

Ответ: 11.

Решение. Кракозябры нарисованы в точности в промежутках между остальными персонажами. В каждом из двух рядов промежутков на 1 меньше, чем персонажей, поэтому

Кракозябр на 2 меньше, чем всех остальных персонажей. Следовательно, Чебурашек, крокодилов Ген и старух Шапокляк всего $29 + 2 = 31$. Далее будем рассматривать только их, забыв про Кракозябр.

У каждого Чебурашки слева есть одна соседняя старуха Шапокляк, поэтому их поровну. Крокодилы Гены нарисованы в точности в промежутках между Чебурашками, поэтому по ранее описанному принципу их на 2 меньше, чем Чебурашек.

Мысленно добавим 2 крокодила Гены. Тогда всего персонажей станет $31 + 2 = 33$. При этом всех трёх персонажей стало поровну, поэтому Чебурашек было всего 11. □

Задача 3.8. У берега реки покачивался небольшой плот. К берегу подошли 5 мышат весом по 70 г, 3 крота весом по 90 г и 4 хомячка весом по 120 г. Какое минимальное количество граммов должен выдерживать плот, чтобы все звери смогли на нём переправиться на другой берег, возможно, за несколько ходок «туда-сюда»? Плот не может передвигаться по реке без гребца.

Ответ: 140.

Решение. Если плот выдерживает меньше двух зверей, то все переправиться не смогут. Действительно, в этом случае каждый раз один зверь будет кататься на плоту туда-сюда, без возможности остаться с другой стороны реки (ведь плот обратно без гребца вернуться не сможет).

Значит, нужно, чтобы плот выдерживал хотя бы двух самых лёгких зверей, т. е. хотя бы $70 \cdot 2 = 140$ грамм. Покажем, что если грузоподъёмность плота равна 140 грамм, то все звери смогут переправиться на другой берег.

Назначим двух мышат «гребцами», назовём их A и B. Два мышонка-гребца плывут на другой берег; B там остаётся, а A возвращает плот. После этого на плоту переплывает на другой берег один любой зверь. Мышонок B возвращает плот обратно.

Итак, один зверь переправлен, а остальные и плот — в исходной позиции. Значит, повторив точно такие же операции, мы сможем перевезти следующего зверя. И так всех по очереди.

В самом конце A и B переплывут на тот берег, и все звери переправятся. □

4 класс

Задача 4.1. Поставьте в соответствие каждой букве цифру 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы выполнялись все неравенства.

$$\text{З} > \text{А} > \text{М} < \text{Е} < \text{Н} < \text{А}$$

Разным буквам должны соответствовать разные цифры. В качестве ответа запишите число ЗАМЕНА.

Ответ: 541234.

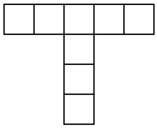
Решение. Из условия следует, что М $<$ Е $<$ Н $<$ А $<$ З. Числа от 1 до 5 упорядочены однозначно, поэтому М $=1$, Е $=2$, Н $=3$, А $=4$, З $=5$. Тогда ЗАМЕНА $=541234$. □

Задача 4.2. Понедельник будет через пять дней после позавчера. А какой день недели будет завтра?

Ответ: Суббота.

Решение. Если через пять дней после позавчера будет понедельник, то позавчера — это среда. Тогда сегодня — это пятница, а завтра — это суббота. □

Задача 4.3. Сколько на данной картинке существует прямоугольников со сторонами, идущими по линиям сетки? (Квадрат также является прямоугольником.)



Ответ: 24.

Решение. В горизонтальной полоске 1×5 существует 1 пятиклеточный, 2 четырёхклеточных, 3 трёхклеточных, 4 двуклеточных и 5 одноклеточных прямоугольников. Итого $1+2+3+4+5=15$ прямоугольников.

В вертикальной полоске 1×4 существует 1 четырёхклеточный, 2 трёхклеточных, 3 двуклеточных, 4 одноклеточных прямоугольника. Итого $1+2+3+4=10$ прямоугольников.

При этом дважды посчитан один одноклеточный прямоугольник в пересечении полосок (и только он). Значит, ответом в задаче является число $15+10-1=24$. □

Задача 4.4. Четыре девочки: Катя, Оля, Лиза и Рита — встали в круг в некотором порядке. На них были платья разных цветов: розовое, зелёное, жёлтое и голубое. Известно, что:

- на Кате было не розовое и не голубое платье;
- девочка в зелёном платье стоит между Лизой и девочкой в жёлтом;
- Рита не в зелёном и не в голубом платье;
- Оля стоит между Ритой и девочкой в розовом платье.

Кто во что одет?

Ответ: Катя одета в зелёное платье, Оля — в голубое, Лиза — в розовое, Рита — в жёлтое.

Решение. Из первого и четвёртого утверждений следует, что на Кате, Оле и Рите не розовое платье. Значит, в розовом платье Лиза.

Из третьего утверждения следует, что Рита не в зелёном и не в голубом платье. Но при этом она и не в розовом. Значит, она в жёлтом платье.

Из первого утверждения следует, что Катя не в розовом и не в голубом платье. Но при этом она и не в жёлтом. Значит, она в зелёном платье.

Соответственно, на Оле оставшееся голубое платье.

Отметим также, что если девочки встанут по кругу в порядке Рита–Оля–Лиза–Катя, то все утверждения задачи о том, кто между кем стоит, будут верны. $\square$

Задача 4.5. Напишите наибольшее восьмизначное число, в котором встречаются все чётные цифры. (Чётные цифры: 0, 2, 4, 6, 8.)

Ответ: 99 986 420.

Решение. Число 99 986 420 подходит под условие задачи. Предположим, существует большее восьмизначное число. Ясно, что три его первые цифры должны быть девятками. Поскольку чётных цифр всего 5, то последние пять цифр — это 0, 2, 4, 6, 8 в некотором порядке. Но тогда такое восьмизначное число не может превосходить 99986420, противоречие. $\square$

Задача 4.6. Часть цифр в прямоугольнике уже расставлена. Расставьте на оставшихся местах цифры так, чтобы:

- сумма цифр в каждом столбце была одинаковой;
- сумма цифр в каждой строчке была одинаковой;
- сумма цифр в красных клетках была равна сумме цифр в любой строчке.

В качестве ответа введите трёхзначное число ABC.

4		3
	A	1
1		6
B	2	C

Ответ: 652.

Решение. Если к сумме двух верхних красных чисел мы прибавим 3, то получится то же число, что и если бы мы прибавили сумму двух нижних красных чисел. Следовательно, неизвестное нижнее красное число равно 2. Тогда в каждой строчке сумма равна $1+2+6 = 9$. Значит, неизвестное верхнее красное число дополняет $4 + 3$ до 9, т. е. оно тоже равно 2.

Мы получили, что сумма цифр в каждой строчке равна 9. Это означает, что сумма чисел во всей таблице равна 36, а в каждом столбце — по 12. Теперь нетрудно, последовательно рассматривая столбцы и строчки с одним неизвестным числом, заполнить всю таблицу (например, сначала можно установить, что $C = 2$ и $A = 6$, а потом $B = 5$):

4	2	3
2	6	1
1	2	6
5	2	2

Получаем, что числом *ABC* является 652. □

Задача 4.7. У берега реки стоит Белоснежка, а рядом с ней 7 гномов в следующем порядке слева направо:

Весельчак, Ворчун, Простачок, Скромник, Соня, Умник и Чихун.

У берега качается лодка, вмещающая только 3 гномов и Белоснежку. Белоснежка единственная умеет грести. Любые два гнома, стоящие рядом в изначальном ряду, поссорятся без присмотра Белоснежки. Белоснежка должна перевезти всех гномов на другой берег и никого не поссорить. Отметьте всех, кого Белоснежка возьмёт с собой в последнюю поездку.

Ответ: Ворчун, Скромник, Умник.

Решение. Рассмотрим только момент перед самой последней поездкой. В этот момент на исходном берегу стоит Белоснежка и не более 3 гномов, тогда на другом берегу — не менее 4 гномов. Поскольку эти хотя бы 4 гнома находятся без присмотра Белоснежки и не поссорились, то среди них нет тех, кто стоял рядом в изначальном ряду. Значит, это могут быть только Весельчак, Простачок, Соня и Чихун. Тогда на исходном берегу с Белоснежкой — Ворчун, Скромник и Умник.

Напоследок приведём один из возможных алгоритмов переправ.

1. Туда Белоснежка перевозит Ворчуна, Скромника, Умника; обратно возвращается одна.
2. Туда Белоснежка перевозит Весельчака, Простачка, Соню; обратно возвращает Ворчуна, Скромника, Умника.
3. Туда перевозит Чихуна, обратно возвращается одна.
4. Туда Белоснежка перевозит Ворчуна, Скромника, Умника. □

Задача 4.8. Если в числе 79777 зачеркнуть цифру 9, получится число 7777. Сколько существует различных пятизначных чисел, из которых можно получить 7777, зачеркнув одну цифру?

Ответ: 45.

Решение. Заметим, что 77777 — одно из таких чисел. Далее будем рассматривать пятизначные числа, у которых для получения 7777 надо зачёркивать не 7.

Если в числе зачёркивается первая цифра, то для неё есть 8 вариантов: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9.

Если же в числе зачёркивается вторая, третья, четвёртая или пятая цифра, то для неё есть 9 вариантов: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9.

Очевидно, все соответствующие числа различны, и их $1 + 8 + 9 + 9 + 9 + 9 = 45$. □

5 класс

Задача 5.1. Саша выписал на доску все двузначные числа, делящиеся на 6, а затем стёр те из них, которые оканчиваются не на 4. Какое наибольшее число в итоге оказалось написано на доске?

Ответ: 84.

Решение. Возьмём самое большое двузначное число, делящееся на 6, — это 96, и будем последовательно вычитать из него 6. Таким образом мы переберём все числа, кратные 6, в порядке убывания. Остановимся на первом из них, которое оканчивается на 4, оно нам и нужно:

$$96 \to 90 \to 84\,.$$

□

Задача 5.2. На столе лежат апельсин, банан, мандарин, персик и яблоко. Их веса равны 100 г, 150 г, 170 г, 200 г, 280 г, но неизвестно, какой фрукт сколько весит.

Известно, что:

- персик легче апельсина;
- банан тяжелее яблока, но легче персика;
- мандарин легче банана;
- яблоко и банан вместе тяжелее апельсина.

Какой фрукт сколько весит?

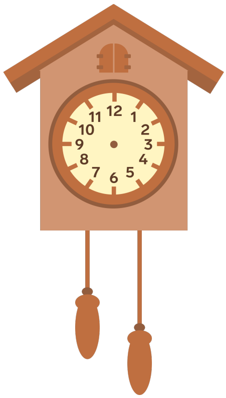
Ответ: Мандарин — 100 г, яблоко — 150 г, банан — 170 г, персик — 200 г, апельсин — 280 г.

Решение. Из первых двух утверждений следует, что яблоко легче банана, банан легче персика, персик легче апельсина. Из третьего утверждения следует, что мандарин тоже легче банана. Схематично это можно записать так: я, м $<$ б $<$ п $<$ а.

Мы знаем, что яблоко и мандарин — самые лёгкие фрукты, но пока не знаем, который из них легче. Про остальные фрукты знаем, что они тяжелее, и знаем, как они упорядочены по массе. Получается, что апельсин весит 280 г, персик — 200 г, банан — 170 г.

Осталось установить соответствие между массами 100 г, 150 г и яблоком, мандарином. Если яблоко весит 100 г, то вместе с бананом они весят 270 г, что меньше 280 г, поэтому последнее из условий не выполняется. Значит, мандарин весит 100 г, а яблоко — 150 г. □

Задача 5.3. На стене висят часы с кукушкой. Когда начинается новый час, кукушка говорит «ку-ку» количество раз, равное числу, на которое показывает часовая стрелка (например, в 19:00 «ку-ку» звучит 7 раз). Как-то утром Максим подошёл к часам, когда на них было 9:05. Он стал крутить пальцем минутную стрелку, пока не перевёл часы на 7 часов вперёд. Сколько раз за это время прозвучало «ку-ку»?



Ответ: 43.

Решение. Кукушка будет говорить «ку-ку» с 9:05 до 16:05. В 10:00 она скажет «ку-ку» 10 раз, в 11:00 — 11 раз, в 12:00 — 12 раз. В 13:00 (когда стрелка указывает на цифру 1) «ку-ку» прозвучит 1 раз. Аналогично, в 14:00 — 2 раза, в 15:00 — 3 раза, в 16:00 — 4 раза. Всего

$$10 + 11 + 12 + 1 + 2 + 3 + 4 = 43\,.$$ □

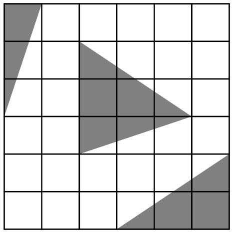
Задача 5.4. На дискотеку по случаю окончания учебного года пришло в два раза больше мальчиков, чем девочек. Маша посчитала, что девочек, кроме неё самой, на дискотеке на 8 меньше, чем мальчиков. Сколько мальчиков пришло на дискотеку?

Ответ: 14.

Решение. Пусть на дискотеке d девочек, тогда мальчиков в два раза больше, т. е. $d + d$. Девочек, кроме Маши, всего $d - 1$ (все, кроме неё самой).

Поскольку мальчиков на 8 больше, чем остальных девочек, кроме Маши, то $d + d = (d - 1) + 8$. Отсюда следует, что $d = 7$, тогда мальчиков всего $7 + 7 = 14$. □

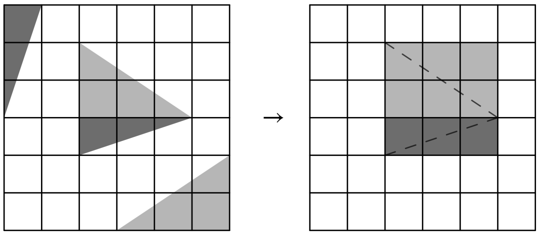
Задача 5.5. Из клетчатого квадрата 6×6 вырезали серые треугольники. Чему равна площадь оставшейся фигуры? Длина стороны каждой клетки равна 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: 27.

Решение. Площадь всего квадрата равна $6 \cdot 6 = 36$ кв. см.

Разделим треугольник, расположенный в середине квадрата, на два меньших треугольника, как показано на картинке слева. Тогда тёмно-серые треугольники можно объединить в прямоугольник 1×3, а светло-серые — в прямоугольник 2×3. Тогда площадь фигуры, которая получится после вырезания всех треугольников, равна $36 - 3 - 6 = 27$ кв. см.



□

Задача 5.6. На доске написано одно трёхзначное число и два двузначных. Сумма чисел, в записи которых есть семёрка, равна 208. А сумма чисел, в записи которых есть тройка, равна 76. Найдите сумму всех трёх чисел.

Ответ: 247.

Решение. Обозначим трёхзначное число A, двузначные числа — B и C. Среди чисел, сумма которых равна 76, не может быть трёхзначного числа. Из единственного числа эта сумма также состоять не может, так как иначе это число 76, но в нём нет тройки. Значит, 76 — это сумма двух двузначных чисел, в каждом из которых есть тройка:

$$B + C = 76.$$

Среди чисел, сумма которых равна 208, точно есть трёхзначное (так как сумма двузначных только 76). Оно не может быть там одно, так как в числе 208 нет семёрки. Значит, в этой сумме есть хотя бы одно двузначное число — но не оба сразу (иначе трёхзначное было бы равно $208 - 76 = 132$, но в нём нет семёрки).

Не нарушая общности, будем считать, что двузначное число в этой сумме равно B. Тогда

$$A + B = 208,$$

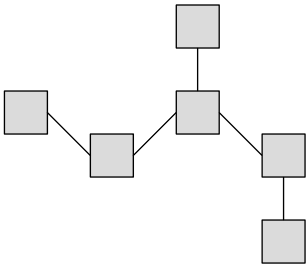
причём у обоих этих чисел есть семёрка.

Следовательно, в числе B есть и тройка, и семёрка, т. е. $B = 37$ или $B = 73$.

Если $B = 73$, то $C = 76 - B = 3$ — не двузначное. Значит, $B = 37$, $C = 76 - 37 = 39$, $A = 208 - 37 = 171$.

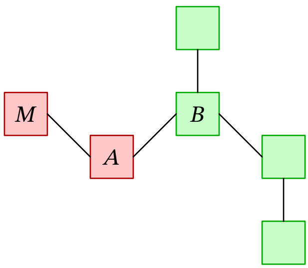
Сумма всех чисел получается равной $171 + 37 + 39 = 247$. $\square$

Задача 5.7. Вася хочет расставить в квадратики числа от 1 до 6 (каждое — по одному разу) так, чтобы выполнялось следующее условие: если два квадратика соединены, то в том, который выше, число больше. Сколько существует способов это сделать?



Ответ: 12.

Решение. Раскрасим квадратики в зелёный и синий цвет, как на рисунке. Числа в квадратиках одного цвета будут упорядочены по убыванию сверху вниз. Для красных квадратиков нужно выбрать два числа от 1 до 6: большее поставить в верхний квадратик, меньшее — в нижний. Это могут быть любые два числа с таким условием: меньшее из них должно быть меньше второго по величине из оставшихся чисел (которые пойдут в зелёные квадратики и однозначно там упорядочатся). На картинке число в квадратике A должно быть меньше числа в квадратике B. Рассмотрим случаи того, что может находиться в квадратике M.



1. Если в квадратик M поставить число 6, то в квадратик A можно поставить любое из чисел 3, 2, 1 (в зелёной цепочке должно быть хотя бы два числа, больших A).
2. Если в квадратик M поставить число 5, то в квадратик A можно поставить любое из чисел 3, 2, 1.

3. Если в квадратик M поставить число 4, то в квадратик A можно поставить любое из чисел 3, 2, 1.
4. Если в квадратик M поставить число 3, то в квадратик A можно поставить любое из чисел 2, 1.
5. Если в квадратик M поставить число 2, то в квадратик A можно поставить только число 1.

Итого всего $3 + 3 + 3 + 2 + 1 = 12$ вариантов. $\square$

Задача 5.8. В стране 100 городов: 30 из них находятся в горной части страны, а 70 — в равнинной. В течение трёх лет между городами устанавливали авиасообщение. Каждый год в стране открывалось 50 новых авиарейсов: все города случайным образом разбивались на 50 пар, и между городами из одной пары открывался рейс. Через три года оказалось, что из 150 открытых рейсов ровно 21 соединяет пару «горных» городов. Сколько рейсов соединяют пару «равнинных» городов?

Ответ: 81.

Решение. У каждого рейса есть два конца (два города, которые он соединяет). При этом каждый город после трёх лет является концом ровно трёх рейсов.

В «горных» городах у рейсов всего $30 \cdot 3 = 90$ концов. При этом 21 рейс проходит между двумя «горными» городами. У каждого рейса между «горными» городами два конца, поэтому каждый такой рейс посчитан два раза. Оставшиеся $90 - 2 \cdot 21 = 48$ — это концы рейсов, выходящих из «горных» городов и ведущих в «равнинные». Таким образом, рейсов между «горными» и «равнинными» городами ровно 48.

Теперь рассмотрим концы рейсов, выходящих из «равнинных» городов. Всего их $70 \cdot 3 = 210$, однако, как мы уже выяснили, 48 из них — это концы рейсов, ведущих в «горные» города. Тогда у рейсов между двумя «равнинными» городами есть $210 - 48 = 162$ конца. У каждого такого рейса два конца, поэтому ответом в задаче является число $162 : 2 = 81$. $\square$

6 класс

Задача 6.1. Маша расставила числа от 1 до 16 в клетки таблицы 4×4 так, чтобы любые два числа, отличающиеся на единицу, стояли в соседних по стороне клетках.

А Саша стёр все числа, кроме 1, 4, 9 и 16. Какое число стояло в клетке с вопросом?

	1		**?**
	4		
		16	
		9	

Ответ: 13.

Решение. Так как любые два числа, отличающиеся на единицу, стоят в соседних клетках, то в верхнем левом углу должно стоять либо число 2 (сосед 1), либо число, имеющее ровно одного соседа — 1 или 16. Второй вариант нам не подходит, поэтому мы можем вписать числа 2 и 3 в таблицу.

2	**1**		**?**
3	**4**		
		16	
		9	

Если число 8 будет стоять правее числа 9, то однозначно восстанавливается расстановка чисел 7, 6, 5.

2	**1**		**?**
3	**4**	**5**	**6**
		16	**7**
		9	**8**

Но тогда в верхний правый угол мы не сможем поставить ни одно число, поэтому этот вариант нам не подходит. Получается, слева от числа 9 стоит число 8, а справа — 10.

2	**1**		**?**
3	**4**		
		16	
	8	**9**	**10**

В левой части таблицы однозначно восстанавливается расстановка чисел 7, 6, 5, а в правой части — 11 и 12.

2	**1**		**?**
3	**4**		**12**
6	**5**	**16**	**11**
7	**8**	**9**	**10**

Рядом с числом 16 может стоять только число 15. Теперь остаётся только вписать в таблицу числа 13 и 14.

2	**1**	**14**	**13**
3	**4**	**15**	**12**
6	**5**	**16**	**11**
7	**8**	**9**	**10**

□

Задача 6.2. Для приготовления одной порции салата требуются 2 огурца, 2 помидора, 75 грамм брынзы и 1 перец. На складе ресторана есть 60 перцев, 4,2 кг брынзы, 116 помидоров и 117 огурцов. Сколько порций получится?

Ответ: 56.

Решение. Перца хватит на $60 : 1 = 60$ порций.

Брынзы хватит на $4200 : 75 = 56$ порций (килограммы перевели в граммы).

Помидоров хватит на $116 : 2 = 58$ порций.

Огурцов хватит на $117 : 2 = 58{,}5$, т. е. на 58 целых порций.

Поскольку в каждой порции должны быть все ингредиенты, то получится приготовить ровно 56 порций. □

Задача 6.3. Витя и его мама одновременно вышли из дома и пошли в противоположные стороны с одинаковой скоростью: Витя — в школу, а мама — на работу. Через 10 минут Витя понял, что у него нет ключей от дома, а вернётся из школы он раньше мамы, поэтому он стал догонять её, увеличив скорость в пять раз. Через сколько минут с того момента, как он понял, что надо забрать ключи, Витя догонит маму?

Ответ: 5 минут.

Решение. Пусть Витя и мама проходили изначально по s метров в минуту. Через 10 минут, когда Витя понял, что он забыл ключи, расстояние между ним и мамой стало равно $10s + 10s = 20s$. Когда Витя стал догонять маму, он проходил $5s$ метров в минуту, значит, расстояние между ним и мамой сокращалось на $4s$ метров в минуту. Значит, оно уменьшится до нуля за $20s : 4s = 5$ минут. □

Задача 6.4. Алексей, Борис, Вениамин и Григорий подозреваются в ограблении банка. Полиции удалось выяснить следующее:

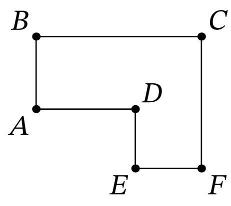
- если Григорий невиновен, то Борис виновен, а Алексей невиновен;
- если Вениамин виновен, то Алексей и Борис невиновны;
- если Григорий виновен, то Борис тоже виновен;
- если Борис виновен, то кто-то из двух — Алексей и Вениамин — точно виновен.

Отметьте тех, кто участвовал в ограблении.

Ответ: Алексей, Борис и Григорий участвовали в ограблении.

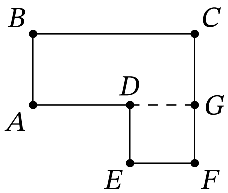
Решение. Из первого и третьего утверждений следует, что Борис точно виновен. Тогда из второго утверждения следует, что Вениамин не может быть виновен. Из четвёртого утверждения следует, что кто-то из двух — Алексей или Вениамин — виновен, т. е. виновен Алексей. Тогда из первого утверждения следует, что Григорий не может быть невиновен, т. е. Григорий виновен. □

Задача 6.5. В парке проложены дорожки, как показано на рисунке. Двое рабочих начали их асфальтировать, одновременно стартовав из точки A. Они укладывают асфальт с постоянными скоростями: первый — на участке A–B–C, второй — на участке A–D–E–F–C. В итоге они закончили работу одновременно, потратив на неё 9 часов. Известно, что второй работает в 1,2 раза быстрее первого. Сколько *минут* второй укладывал асфальт на участке DE?



Ответ: 45.

Решение. Пусть прямая AD пересекает прямую CF в точке G, как на рисунке ниже. Поскольку $ABCG$ и $DEFG$ являются прямоугольниками, имеем $AB = CG$, $BC = AG$, $EF = DG$ и $DE = FG$.



Второй работает в 1,2 раза быстрее первого, а время работы было одинаковым, поэтому второй закатал асфальта в 1,2 раза больше первого. Пусть на участке $A{-}B{-}C$ первый закатал $x = AB + BC$ асфальта, тогда второй на участке $A{-}D{-}E{-}F{-}C$ закатал

$$1{,}2x = AD + DE + EF + FG + GC = (AD + EF + CG) + (DE + FG) =$$
$$= (BC + AB) + (DE + DE) = x + 2DE\,.$$

Отсюда находим, что $DE = 0{,}1x$, то есть это в 12 раз меньше всего асфальта на втором участке. Значит, и времени второй рабочий на участке DE затратил в 12 раз меньше, чем на всём своём пути. Всего он работал $9 \cdot 60 = 540$ минут, поэтому на DE он потратил $\frac{540}{12} = 45$ минут. □

Задача 6.6. С дерева сорвали несколько апельсинов (не обязательно равной массы). Когда их взвесили, то оказалось, что масса любых трёх апельсинов, взятых вместе, составляет меньше 5% от суммарной массы *остальных* апельсинов. Какое наименьшее количество апельсинов могло быть сорвано?

Ответ: 64.

Решение. 64 апельсина могло быть, например, если все они имели одинаковую массу m, ведь $\frac{3m}{61m} < 0{,}05$.

Предположим, апельсинов было не более 63. Рассмотрим три самых тяжёлых апельсина с суммарной массой M. Все остальные апельсины (которых не более 60) можно разделить на не более чем 20 групп, в каждой из которых не более 3 апельсинов. Очевидно, в каждой группе суммарная масса не превосходит M, поэтому суммарная масса во всех группах не превосходит $20M$. Поскольку $\frac{M}{20M} = 0{,}05$, три самых тяжёлых апельсина составляют не меньше 5% от суммарной массы остальных апельсинов. Противоречие. □

Задача 6.7. Петя загадывает четырёхзначное число вида $\overline{20{*}{*}}$.

Вася последовательно проверяет, делится ли загаданное Петей число на $1, 3, 5, 7, 9, 11$, и если делится, то Вася платит Пете $1, 3, 5, 7, 9$ или 11 рублей соответственно. Например, за число 2000 Вася заплатил бы Пете $1 + 5 = 6$ рублей.

Какое наибольшее количество рублей может получить Петя?

Ответ: 31.

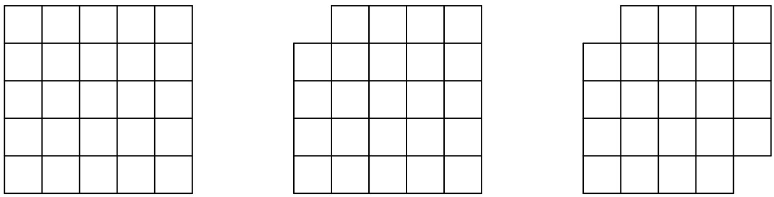
Решение. Предположим, число Пети делится на 9 и делится на 11. Тогда оно делится и на 99. Такое число в указанном диапазоне ровно одно — это $2079 = 3^3 \cdot 7 \cdot 11$. За него Петя получил бы $1 + 3 + 7 + 9 + 11 = 31$ рубль.

Если же число Пети не делится на 9 или не делится на 11, то он получит не более $1 + 3 + 5 + 7 + 11 = 27$ рублей, что меньше 31. $\square$

Задача 6.8. Существует ровно 120 способов закрасить пять клеток в таблице 5×5 так, чтобы в каждом столбце и в каждой строке была закрашена ровно одна клетка.

Существует ровно 96 способов закрасить пять клеток в таблице 5×5 без угловой клетки так, чтобы в каждом столбце и в каждой строке была закрашена ровно одна клетка.

Сколько существует способов закрасить пять клеток в таблице 5×5 без двух угловых клеток так, чтобы в каждом столбце и в каждой строке была закрашена ровно одна клетка?



Ответ: 78.

Решение. Рассмотрим раскраски таблицы 5×5, описанные в условии (т. е. такие, в которых в каждом столбце и в каждой строке закрашена ровно одна клетка).

Для удобства введём несколько обозначений. Левую верхнюю угловую клетку таблицы 5×5 назовём A, правую нижнюю — B. Пусть среди раскрасок первой таблицы ровно a имеют закрашенную клетку A, ровно b имеют закрашенную клетку B. Очевидно, что $a = b$ из симметрии.

Заметим, что количество раскрасок второй таблицы равно количеству раскрасок первой таблицы, у которых клетка A не закрашена. А количество раскрасок третьей таблицы равно количеству раскрасок первой таблицы, у которых и A, и B не закрашены. Чтобы его найти, мы из 120 вычтем количество раскрасок первой таблицы, у которых закрашена A или B. Для подсчёта количества таких раскрасок мы сложим a и b, а также вычтем то, что посчитано дважды, — способы, где и A, и B закрашены.

Все раскраски первой таблицы делятся на два вида: те, в которых закрашена клетка A, и те, в которых не закрашена. Отсюда следует равенство $120 = a + 96$, т. е. $a = 24$. Тогда и $b = 24$.

Раскрасок, где и A, и B закрашены, столько же, сколько способов закрасить центральный квадрат 3×3. Легко видеть, что их ровно $3! = 6$ (выбрать закрашенную клетку в его верхней строке можно 3 способами, в средней — уже 2, в нижней — 1).

Итак, ответом в задаче является число $120 - (24 + 24 - 6) = 78$. $\square$

7 класс

Задача 7.1. Андрей, Борис и Денис ели конфеты, каждый ел со своей постоянной скоростью. Пока Андрей ел 4 конфеты, Борис успевал съесть только 3. Денис же ел конфеты быстрее всех: он съедал 7 конфет, пока Андрей ел 6. Всего ребята съели 70 конфет. Кто сколько съел конфет?

Ответ: Андрей съел 24, Борис съел 18, Денис съел 28.

Решение. Из условия следует, что пока Андрей ест 12 конфет, Борис съедает 9 конфет, а Денис — 14, т. е. суммарно втроём съедается 35 конфет. Тогда, чтобы съесть 70 конфет, каждый из них должен съесть вдвое больше: Андрей — 24, Борис — 18, Денис — 28. □

Задача 7.2. Трое пиратов делили клад. Первому досталась треть от изначального количества монет и ещё 1 монета, второму досталась четверть от изначального количества монет и ещё 5 монет, третьему досталась пятая часть от изначального количества монет и ещё 20 монет (при этом все монеты оказались разобраны). Сколько монет было в кладе?

Ответ: 120.

Решение. Обозначим за m общее изначальное количество монет в кладе. Суммарно пираты забрали $(\frac{m}{3}+1)+(\frac{m}{4}+5)+(\frac{m}{5}+20)$ монет. Они разделили весь клад, значит, эта сумма равна m. Раскрывая скобки в уравнении

$$\left(\frac{m}{3}+1\right)+\left(\frac{m}{4}+5\right)+\left(\frac{m}{5}+20\right)=m$$

и приводя дроби к общему знаменателю, получаем $\frac{47}{60}m+26=m$, откуда $\frac{13}{60}m=26$, то есть $m=120$. □

Задача 7.3. Четверо друзей Андрей, Борис, Вячеслав и Геннадий работают архитектором, баристой, ветеринаром и гитаристом. Однажды они вместе пошли в кино и купили билеты на четыре подряд идущих места.

Оказалось, что:

- рядом с ветеринаром сидят архитектор и гитарист;
- у баристы сосед справа — Борис;
- Вячеслав сидит правее и Андрея, и Бориса;
- Андрей знает обоих своих соседей;
- гитарист и бариста сидят не рядом.

У кого какая профессия?

Ответ: Бариста — Геннадий, архитектор — Борис, ветеринар — Андрей, гитарист — Вячеслав.

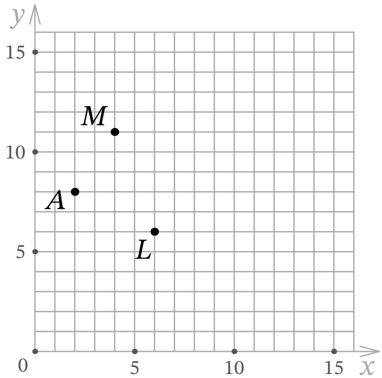
Решение. Из первого и последнего условий следует, что люди сидят либо в порядке «бариста, архитектор, ветеринар, гитарист», либо в обратном. Но у баристы есть сосед справа, следовательно, возможен только первый случай.

Из второго утверждения следует, что второй слева (архитектор) — это Борис.

Из четвёртого утверждения следует, что Андрей сидит не с краю, значит, он сидит на третьем месте слева (и его профессия — ветеринар).

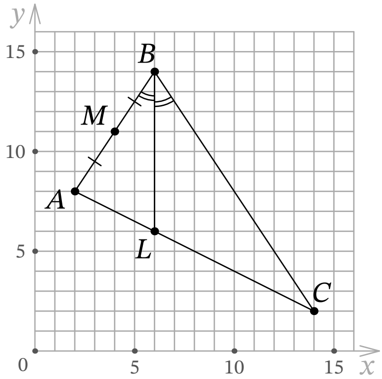
Из третьего же утверждения следует, что Вячеслав — крайний справа (и его профессия — гитарист), тогда Геннадий — крайний слева (и его профессия — бариста). □

Задача 7.4. В треугольнике ABC были проведены медиана CM и биссектриса BL. Затем с чертежа стёрли все отрезки и точки, кроме точек $A(2;8)$, $M(4;11)$ и $L(6;6)$. Какие координаты имела точка C?



Ответ: $(14;2)$.

Решение. Поскольку M является серединой AB, точка B имеет координаты $(6;14)$. Поскольку $\angle ABL = \angle CBL$, точка C лежит на прямой, симметричной прямой AM относительно вертикальной прямой BL. Также точка C лежит на прямой AL. Аккуратно найдя «по клеточкам» точку пересечения этих прямых, получаем, что C имеет координаты $(14;2)$.



□

Задача 7.5. Если взвод солдат разбить на бригады по 7 человек, то 2 человека не войдут ни в одну бригаду. Если же взвод разбить на бригады по 12 человек, то снова 2 человека не войдут ни в одну бригаду. Какое минимальное количество солдат надо добавить во взвод, чтобы его целиком можно было разбить как на бригады по 7 человек, так и на бригады по 12 человек?

Ответ: 82.

Решение. Взвод можно целиком разбить и на бригады по 7, и на бригады по 12 человек в том и только в том случае, если количество людей в нём делится на $7 \cdot 12 = 84$.

Выкинем двух людей из взвода. Тогда оставшиеся разбиваются на бригады обоими способами, значит, их количество делится на 84. Вернём выкинутых двух человек обратно; чтобы добраться до следующего числа, кратного 84, нужно добавить ещё 82 человека. □

Задача 7.6. В ряд высажено 101 дерево: тополя, берёзы и сосны. Между каждыми двумя тополями растёт хотя бы одно дерево, между каждыми двумя берёзами растёт хотя бы два дерева, между каждыми двумя соснами растёт хотя бы три дерева. Сколько сосен могло быть высажено? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 25, 26.

Решение. Рассмотрим любые четыре подряд идущих дерева. Если среди них нет сосны, то деревья там чередуются (два одинаковых дерева рядом стоять не могут) берёзы и тополя, но тогда между двумя берёзами будет только одно дерево, что невозможно по условию. Значит, среди любых четырёх подряд идущих деревьев обязательно есть сосна.

Также понятно, что среди любых четырёх подряд идущих деревьев не может быть двух сосен, иначе между ними было бы меньше трёх деревьев.

Разобьём весь ряд деревьев на 25 четвёрок и одно дерево. В каждой четвёрке ровно одна сосна, следовательно, всего сосен 25 или 26 (в зависимости от того, какое дерево осталось).

Оба случая возможны, как видно из следующих примеров (подчёркиванием выделены периоды):

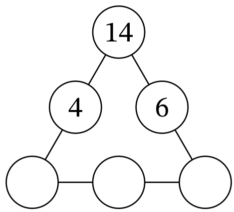
$$\underline{\text{Т, Б, Т, С}},\ \underline{\text{Т, Б, Т, С}},\ \ldots,\ \underline{\text{Т, Б, Т, С}},\ \text{Т.}$$

$$\underline{\text{С, Т, Б, Т}},\ \underline{\text{С, Т, Б, Т}},\ \ldots,\ \underline{\text{С, Т, Б, Т}},\ \text{С.}$$

□

Замечание. Можно доказать, что других примеров, кроме приведённых выше, не существует.

Задача 7.7. В трёх из шести кругов диаграммы записаны числа 4, 14 и 6. Сколькими способами в оставшиеся три круга можно поставить натуральные числа так, чтобы произведения троек чисел вдоль каждой из трёх сторон треугольной диаграммы были одинаковыми?



Ответ: 6.

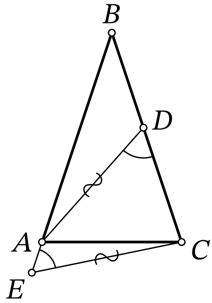
Решение. Пусть a, b, c — натуральные числа в трёх нижних кругах, идущие слева направо. По условию $14 \cdot 4 \cdot a = 14 \cdot 6 \cdot c$, т. е. $2a = 3c$. Отсюда следует, что $3c$ чётно, тогда и c чётно. Значит, $c = 2k$ для некоторого натурального k, тогда из равенства $2a = 3c$ следует, что $a = 3k$.

Также должно выполняться равенство $14 \cdot 4 \cdot 3k = 3k \cdot b \cdot 2k$, что означает $b \cdot k = 28$. Заметим, что по выбору числа k, являющегося натуральным делителем числа 28, однозначно определяются натуральные a, b, c. У числа 28 есть ровно 6 натуральных делителей: это $1, 2, 4, 7, 14, 28$. Значит, и способов расставить числа в кружки тоже 6. □

Задача 7.8. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). На луче BA за точкой A отмечена точка E, на стороне BC отмечена точка D. Известно, что

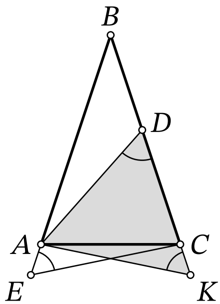
$$\angle ADC = \angle AEC = 60^\circ, AD = CE = 13.$$

Найдите длину отрезка AE, если $DC = 9$.



Ответ: 4.

Решение. Отметим на луче BC точку K такую, что $BE = BK$. Тогда и $AE = CK$.

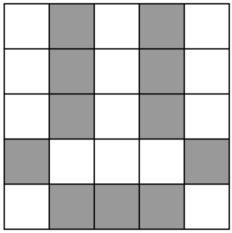


Заметим, что треугольники ACE и CAK равны по двум сторонам ($AE = CK$, AC — общая сторона) и углу между ними ($\angle CAE = \angle ACK$ — смежные с равными углами при основании равнобедренного треугольника). Следовательно, $AK = CE = 13$ и $\angle AKC = \angle AEC = 60^\circ$.

В треугольнике ADK углы при вершинах D и K равны 60°, поэтому он является равносторонним, и $DK = AK = AD = 13$. Следовательно, $AE = CK = DK - DC = 13 - 9 = 4$. □

8 класс

Задача 8.1. В квадрате 5×5 покрасили в чёрный цвет некоторые клетки так, как показано на рисунке. Рассмотрим всевозможные квадраты, стороны которых идут по линиям сетки. В скольких из них одинаковое количество чёрных и белых клеток?



Ответ: 16.

Решение. Одинаковое количество чёрных и белых клеток может быть только в квадратах 2×2 или 4×4 (в остальных квадратах всего нечётное количество клеток, поэтому чёрных и белых среди них не может быть поровну). Неподходящих квадратов 2×2 только два (оба из которых содержат центр таблицы, а клеток выше центра не содержат), значит, подходящих квадратов 2×2 ровно $16-2=14$. А среди квадратов 4×4 нам подходят только оба нижних.

Итак, всего квадратов, в которых поровну чёрных и белых клеток, ровно $14+2=16$. □

Задача 8.2. Среднее арифметическое трёх двузначных натуральных чисел x, y, z равно 60. Какое наибольшее значение может принимать выражение $\frac{x+y}{z}$?

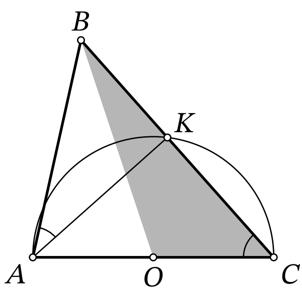
Ответ: 17.

Решение. Из условия следует, что сумма чисел x, y, z равна $60\cdot3=180$. Тогда

$$\frac{x+y}{z}=\frac{180-z}{z}=\frac{180}{z}-1\leqslant\frac{180}{10}-1=17,$$

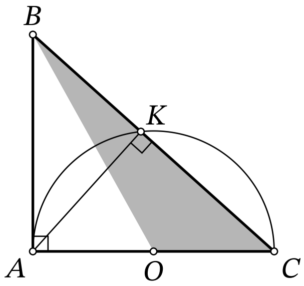
поскольку $z\geqslant10$. Заметим также, что при $x=90$, $y=80$, $z=10$ значение 17 достигается. □

Задача 8.3. В треугольнике ABC известны стороны $AC=14$ и $AB=6$. Окружность с центром O, построенная на стороне AC как на диаметре, пересекает сторону BC в точке K. Оказалось, что $\angle BAK=\angle ACB$. Найдите площадь треугольника BOC.



Ответ: 21.

Решение. Поскольку AC — диаметр окружности, точка O является серединой AC, а также $\angle AKC = 90°$.



Тогда

$$\angle BAC = \angle BAK + \angle CAK = \angle BCA + \angle CAK = \angle BKA = 90°\,.$$

Площадь прямоугольного треугольника ABC можно найти как $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 14 = 42$. Поскольку медиана BO делит его площадь пополам, площадь треугольника BOC равна $\frac{42}{2} = 21$. □

Задача 8.4. Найдите любое решение ребуса

$$\overline{ABCA} = 182 \cdot \overline{CD},$$

где A, B, C, D — четыре различные ненулевые цифры (запись $\overline{XY...Z}$ означает десятичную запись числа).

В качестве ответа напишите четырёхзначное число $\overline{ABCD}$.

Ответ: 2916.

Решение. $\overline{ABCA} = 1001A + 10 \cdot \overline{BC}$. Заметим, что 1001 и 182 делятся на 91, следовательно, $10 \cdot \overline{BC}$ тоже делится на 91, т. е. $\overline{BC} = 91$.

Подставив $B = 9$, $C = 1$ и сократив на 91, получим уравнение $11A = 10+2D$. В левой части этого равенства стоит число, делящееся на 11, а в правой — чётное двузначное число, меньшее 30. Следовательно, это число равно 22, откуда $A = 2$ и $D = 6$. □

Задача 8.5. В забеге участвовали несколько людей, среди которых были Андрей, Дима и Лёня. Никакие два участника этого забега не прибежали одновременно.

- Людей, прибежавших до Андрея, в 2 раза меньше, чем людей прибежавших после него.
- Людей, прибежавших до Димы, в 3 раза меньше, чем людей, прибежавших после него.
- Людей, прибежавших до Лёни, в 4 раза меньше, чем людей прибежавших после него.

Какое наименьшее количество людей могло участвовать в забеге?

Ответ: 61.

Решение. Обозначим за x количество людей, прибежавших до Андрея, тогда после него прибежало $2x$ людей. Получаем, что всего в забеге был $3x + 1$ участник.

Обозначив за y количество людей, прибежавших до Димы, получим, что всего был $4y + 1$ участник.

Наконец, обозначив за z количество людей, прибежавших до Лёни, получим, что всего был $5z + 1$ участник.

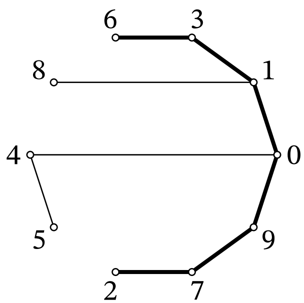
Если из общего числа бегунов вычесть 1, должно получиться число, делящееся на 3, 4 и 5. Наименьшее такое число равно 60, следовательно, участников было не меньше 61.

Осталось заметить, что для 61 участника условие могло выполняться. Например, если среди них Андрей прибежал 21-м, Дима — 16-м, а Лёня — 13-м. □

Задача 8.6. Натуральное число назовём *интересным*, если все его цифры различны, а сумма любых двух рядом стоящих цифр — квадрат натурального числа. Найдите наибольшее интересное число.

Ответ: 6310972.

Решение. Отметим на плоскости 10 точек, обозначающих цифры от 0 до 9, и соединим те из них, которые в сумме дают квадрат натурального числа.



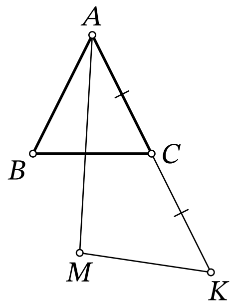
На такой картинке необходимо найти путь максимальной длины, так как в наибольшем числе должно быть максимальное количество цифр. Несложно заметить, что это путь 2—7—9—0—1—3—6. Чтобы число было наибольшим, первая цифра должна быть как можно больше, т. е. ответом является число 6310972. □

Задача 8.7. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = AC$ и $\angle ABC = 53°$. Точка K такова, что C — середина отрезка AK. Точка M выбрана так, что:

- B и M находятся по одну сторону от прямой AC;
- $KM = AB$;

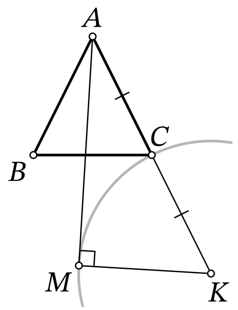
- угол MAK — максимальный из возможных.

Сколько градусов составляет угол BAM?



Ответ: 44.

Решение. Обозначим длину отрезка AB за R. Проведём окружность с центром K и радиусом R (на ней лежит точка M), а также касательную AP к ней так, чтобы точка касания P лежала по ту же сторону от AC, что и B. Поскольку M лежит внутри угла PAK или на его границе, то угол MAK не превосходит угол PAK, причём равны эти углы, только если точки M и P совпадают. Следовательно, M и есть эта точка касания.



Радиус KM окружности перпендикулярен касательной AM. Также в прямоугольном треугольнике AMK катет MK вдвое меньше гипотенузы AK, поэтому $\angle MAK = 30°$. Также из условия получаем, что $\angle BAC = 180° - 2 \cdot 53° = 74°$. Итак,

$$\angle BAM = \angle BAC - \angle MAK = 74° - 30° = 44° .$$

□

Задача 8.8. Компьютер умеет применять к числу три операции: «увеличить на 2», «увеличить на 3», «умножить на 2». В компьютер ввели число 1 и заставили его перебрать всевозможные комбинации из 6 операций (каждая из таких комбинаций применяется к исходному числу 1). После скольких из этих комбинаций у компьютера в итоге получится чётное число?

Ответ: 486.

Решение. Если перед последней операцией число было нечётным, то одна из двух операций «увеличить на 3» или «умножить на 2» сделает его чётным, а третья нет. Аналогично, если перед последней операцией число было чётным, то одна из двух операций «увеличить на 2» или «умножить на 2» сделает его чётным, а третья нет.

Получаем, что первые 5 операций можно делать в любом порядке — это 3^5 вариантов. Для получения чётного результата на последней операции есть ровно 2 варианта, следовательно, искомых комбинаций всего $3^5 \cdot 2 = 486$. □

9 класс

Задача 9.1. В таблице 3×3 расставлены цифры от 1 до 9 (каждая цифра записана ровно в одной клетке). Цифры 1, 2, 3, 4 расположены, как показано на рисунке. Также известно, что сумма цифр, стоящих в клетках, соседних по стороне с цифрой 5, равна 9. Найдите сумму цифр, стоящих в клетках, соседних по стороне с цифрой 6.

1		3
2		4

Ответ: 29.

Решение. Заметим, что наименьшая возможная сумма цифр вокруг цифры 5 равна как раз $1 + 2 + 6 = 9$, и возможно это лишь тогда, когда она стоит под цифрой 1 и над цифрой 2, а цифра 6 стоит в центре.

Действительно, если 5 стоит в центре, то сумма окружающих её цифр равна $6 + 7 + 8 + 9 > 9$. А если 5 стоит не в центре (а цифра в центре не меньше 6) и не под 1, то сумма окружающих её цифр не меньше $1 + 3 + 6 > 9$.

1		3
5	6	
2		4

Раз 6 стоит в центре, то сумма окружающих её цифр равна $5 + 7 + 8 + 9 = 29$. □

Задача 9.2. В первый час смены мастер изготовил 35 деталей. Затем он понял, что, сохранив текущую скорость, ему придётся задержаться на час, чтобы выполнить план на смену. Увеличив свою скорость на 15 деталей в час, он выполнил план на полчаса раньше окончания смены. Сколько деталей должен изготовить мастер за смену?

Ответ: 210.

Решение. Обозначим за N количество деталей, которое ему ещё нужно изготовить. Если бы он продолжил делать 35 деталей в час, то закончил бы за $\frac{N}{35}$ часов. Когда он ускорился и стал производить по 50 деталей в час, он закончил работу за $\frac{N}{50}$ часов.

Из условия следует, что $\frac{N}{35} - \frac{N}{50} = 1{,}5$, то есть $\frac{3}{350}N = 1{,}5$, откуда находим $N = 175$. Тогда количество деталей, которое нужно изготовить за одну смену, равно $175 + 35 = 210$. ☐

Задача 9.3. Фермер сказал: «У меня есть N кроликов. Длинные уши ровно у 13 из них. А умеют далеко прыгать ровно 17 из них».

Путник справедливо заметил: «Следовательно, среди Ваших кроликов гарантированно хотя бы 3 кролика одновременно и имеют длинные уши, и умеют далеко прыгать».

Какое наибольшее значение может принимать число N?

Ответ: 27.

Решение. Если $N \geqslant 28$, то путник не прав: возможно, у фермера были всего 2 кролика с длинными ушами, умеющие далеко прыгать. Кроме них были 11 кроликов с длинными ушами, но не умеющие далеко прыгать, а также 15 кроликов без длинных ушей, умеющие далеко прыгать. А остальные $N - 28$ кроликов и не имеют длинных ушей, и не умеют далеко прыгать.

Если $N = 27$, то путник прав. Действительно, из условия следует, что ровно 10 кроликов не умеют далеко прыгать. Поскольку у 13 кроликов длинные уши, то хотя бы $13 - 10 = 3$ из них и имеют длинные уши, и умеют далеко прыгать. ☐

Задача 9.4. За круглым столом сидят 40 рыцарей и 10 самураев. Ровно у 7 рыцарей сосед справа — самурай. Какое наибольшее количество рыцарей могло сидеть рядом с двумя рыцарями?

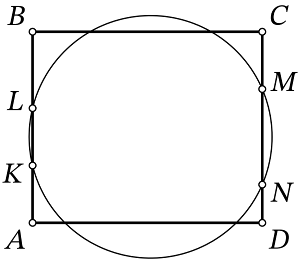
Ответ: 32.

Решение. Разобьём сидящих за столом людей на чередующиеся группы подряд идущих рыцарей и подряд идущих самураев. Из условия следует, что таких групп ровно 14 (среди которых 7 групп рыцарей и 7 групп самураев), так как 7 рыцарей из условия — это в точности самые правые рыцари в группах рыцарей.

Заметим, что хотя бы 8 рыцарей не сидят рядом с двумя рыцарями: это 7 рыцарей из условия и ещё хотя бы 1 самый левый в рыцарь в группе из более чем одного рыцаря (она существует, так как групп 7, а рыцарей 40). Следовательно, не больше $40 - 8 = 32$ рыцарей сидят между двумя рыцарями.

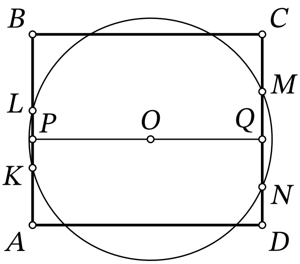
Теперь приведём пример. Для этого возьмём 6 групп рыцарей из 1 человека и одну группу из 34, а самураев произвольно распределим по 7 группам (не забывая, что группы рыцарей и самураев чередуются). Ясно, что 32 не крайних рыцаря из «большой» группы рыцарей являются искомыми. ☐

Задача 9.5. Дан прямоугольник $ABCD$. Окружность пересекает сторону AB в точках K и L, а сторону CD — в точках M и N соответственно (K лежит между A и L, M лежит между C и N). Найдите длину отрезка MN, если $AK = 10$, $KL = 17$, $DN = 7$.



Ответ: 23.

Решение. Опустим из центра окружности O перпендикуляры OP и OQ на хорды KL и MN соответственно. Прямые KL и MN параллельны, поэтому точки P, O, Q лежат на одной прямой. Поскольку $OK = OL$ и $OM = ON$, точки P и Q являются серединами отрезков KL и MN соответственно.



В прямоугольнике $APQD$ противоположные стороны AP и DQ равны, поэтому

$$18{,}5 = 10 + \frac{17}{2} = AP = QD = 7 + \frac{MN}{2},$$

откуда получаем $MN = 23$. □

Задача 9.6. Учитель написал на доске число. Саша решил поделить его с остатком на 102, а Маша — на 103. Оказалось, что частное, полученное Сашей, и остаток, полученный Машей, в сумме дают 20. Какой остаток получил Саша? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 20.

Решение. Обозначим за n число на доске, поделим его с остатком на 102 и на 103:

$$n = 102a + b; \quad n = 103c + (20 - a).$$

Вычтем из первого равенства второе:

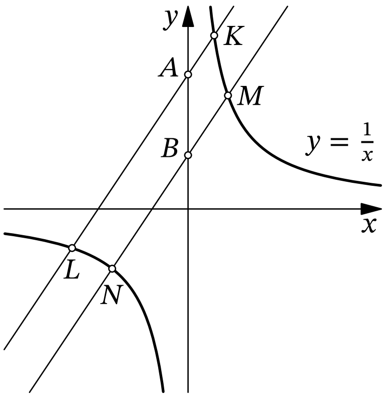
$$0 = 103(a - c) + (b - 20).$$

Из этого следует, что $b - 20$ делится на 103. Поскольку $0 \leqslant b \leqslant 101$, получаем, что $b = 20$.

Заметим также, что, например, для числа $n = 122$ как раз возможен остаток $b = 20$. $\square$

Задача 9.7. Через точки $A(0;14)$ и $B(0;4)$ проведены две параллельные прямые. Первая прямая, проходящая через точку A, пересекает гиперболу $y = \frac{1}{x}$ в точках K и L. Вторая прямая, проходящая через точку B, пересекает гиперболу $y = \frac{1}{x}$ в точках M и N.

Чему равно $\dfrac{AL - AK}{BN - BM}$?



Ответ: 3,5.

Решение. Обозначим угловой коэффициент данных параллельных прямых за k. Поскольку прямая KL проходит через точку $(0;14)$, её уравнение имеет вид $y = kx + 14$. Аналогично, уравнение прямой MN имеет вид $y = kx + 4$.

Абсциссы точек K и L (обозначим их x_K и x_L соответственно) являются корнями уравнения $kx + 14 = \frac{1}{x}$, что переписывается как $kx^2 + 14x - 1 = 0$. Аналогично, абсциссы точек M и N (обозначим их x_M и x_N соответственно) являются корнями уравнения $kx + 4 = \frac{1}{x}$, то есть $kx^2 + 4x - 1 = 0$. По теореме Виета $x_K + x_L = -\frac{14}{k}$ и $x_M + x_N = -\frac{4}{k}$.

Обозначим $\angle(KL, Ox) = \alpha$. Тогда

$$\frac{AL - AK}{BN - BM} = \frac{\frac{|x_L|}{\cos\alpha} - \frac{|x_K|}{\cos\alpha}}{\frac{|x_N|}{\cos\alpha} - \frac{|x_M|}{\cos\alpha}} = \frac{-x_L - x_K}{-x_N - x_M} = \frac{\frac{14}{k}}{\frac{4}{k}} = \frac{14}{4} = 3{,}5\,. \qquad \square$$

Задача 9.8. Компания ребят решила поиграть в компьютерную игру. Любые два человека либо играют сообща, либо друг против друга; причём если игрок A играет сообща с B, а B играет против C, то A тоже играет против C. Из скольких ребят состоит компания, если у каждого игрока было ровно 15 соперников? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 16, 18, 20, 30.

Решение. Из условия задачи следует, что все игроки разбиваются на несколько групп так, что внутри группы любые двое играют сообща, а любые два человека из разных групп — друг против друга. Для каждого игрока количество его соперников — это разность общего количества людей в компании и количества людей в его группе. Поскольку для всех игроков данная величина одинакова и равна 15, получаем, что количество человек в каждой группе одинаково.

Обозначим за n количество групп, а за m — количество людей в одной группе. Тогда количество соперников у каждого человека равно

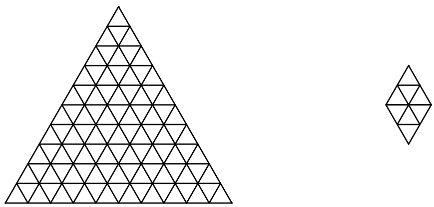
$$(n-1)m = 15.$$

Есть ровно четыре способа разложить число 15 в упорядоченное произведение двух натуральных чисел: $15 = 1 \cdot 15 = 3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 = 15 \cdot 1$. В каждом из этих четырёх случаев находим пару (n, m): $(2, 15)$, $(4, 5)$, $(6, 3)$, $(16, 1)$.

Для ответа осталось вычислить произведение mn для каждого из случаев и получить четыре ответа: 30, 20, 18, 16. Все эти ответы достигаются в случаях, когда вся компания ребят разбивается на n групп по m игроков в каждой (для соответствующих m и n). □

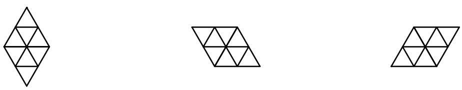
10 класс

Задача 10.1. Равносторонний треугольник со стороной 10 разбит на 100 маленьких равносторонних треугольничков со стороной 1. Найдите количество ромбов, состоящих из 8 маленьких треугольничков (такие ромбы можно поворачивать).

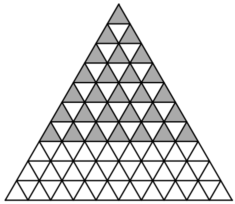
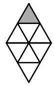


Ответ: 84.

Решение. Ромбы, состоящие из восьми треугольников, могут быть одного из трёх видов:



Ясно, что количество ромбов каждого направления будет одинаковым, так что рассмотрим только вертикальные. Каждый из них однозначно определяется своим верхним треугольником. Теперь легко посчитать количество таких треугольников.

В первом ряду такой треугольник 1, во втором — 2, в третьем — 3, ..., в седьмом — 7. Всего $1 + 2 + 3 + ... + 7 = 28$ вертикальных ромбов, а следовательно, ответом в задаче является $28 \cdot 3 = 84$. $\square$

Задача 10.2. Сколько существует действительных чисел x таких, что значение выражения $\sqrt{123 - \sqrt{x}}$ является целым числом?

Ответ: 12.

Решение. Из условия следует, что величина $s = 123 - \sqrt{x} \leqslant 123$ является квадратом целого числа. Поскольку $11^2 < 123 < 12^2$, эта величина может принимать одно из 12 значений 0^2, $1^2, 2^2, ..., 11^2$. А по каждому из этих 12 значений s однозначно определяется своё значение $x = (123 - s)^2$ (очевидно, что все эти значения x различны). $\square$

Задача 10.3. Ровно в полдень из посёлка выехал грузовик и поехал в город, в это же время из города выехал автомобиль и поехал в посёлок. Если бы грузовик выехал на 45 минут раньше, то они бы встретились на 18 километров ближе к городу. А если бы автомобиль выехал на 20 минут раньше, то они бы встретились на k километров ближе к посёлку. Найдите k.

Ответ: 8.

Решение. Все расстояния будем выражать в километрах, время — в часах, скорость — в километрах в час. Обозначим расстояние между посёлком и городом за S, скорость грузовика — за x, скорость автомобиля — за y. Время до первой встречи равно $\frac{S}{x+y}$, следовательно, расстояние от посёлка до места реальной встречи равно $\frac{Sx}{x+y}$.

В первом гипотетическом сценарии за 45 минут грузовик проедет $0{,}75x$ километров, значит, до места предполагаемой первой встречи пройдёт ещё $\frac{S - 0{,}75x}{x+y}$ часов, и грузовик проедет ещё $\frac{(S - 0{,}75x)x}{x+y}$ километров. По условию мы знаем, что

$$18 = 0{,}75x + \frac{(S - 0{,}75x)x}{x+y} - \frac{Sx}{x+y} = 0{,}75\frac{xy}{x+y},$$

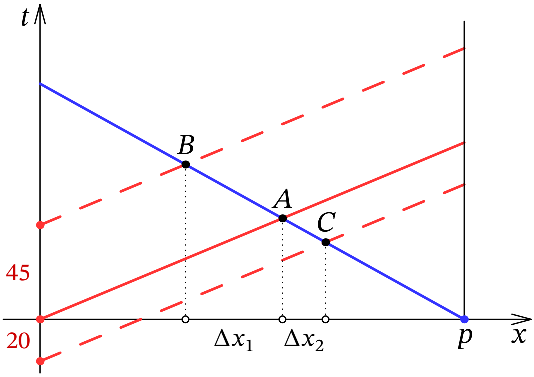
откуда находим $\frac{xy}{x+y} = 18 \cdot \frac{4}{3} = 24$.

Во втором сценарии за 20 минут автомобиль проедет $y/3$ километров, значит, до места предполагаемой второй встречи пройдёт ещё $\frac{S - y/3}{x+y}$ часов, и грузовик за это время проедет $\frac{(S - y/3)x}{x+y}$ километров. Величина, которую нам надо найти, равна

$$\frac{Sx}{x+y} - \frac{(S - y/3)x}{x+y} = \frac{xy/3}{x+y} = 24/3 = 8\,.$$ $\square$

Другое решение. Вместо сценария «грузовик выехал на 45 минут раньше» будем рассматривать сценарий «автомобиль выехал на 45 минут позже» — ясно, что место встречи при этом будет таким же.

Решим задачу графически. По оси Ox отложим координаты машин так, чтобы город соответствовал координате 0, а посёлок — координате $p > 0$. По оси Ot будем откладывать время (общее начало движения в исходном сценарии будет соответствовать $t = 0$). График движения автомобиля изобразим красной линией, а грузовика — синей; кроме этого, отметим два альтернативных графика движения автомобиля (с началом на 45 минут позже и на 20 минут раньше). Точку встречи в исходном сценарии (место и время) обозначим за A, а в альтернативных — за B и C:



По теореме Фалеса

$$\frac{45}{20} = \frac{AB}{AC} = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}.$$

Так как по условию $\Delta x_1 = 18$ километров, то $\Delta x_2 = 8$ километров. □

Задача 10.4. Рассмотрим последовательность

$$a_n = \cos(1\underbrace{00...0}_{n-1}{}^\circ).$$

Например, $a_1 = \cos 1^\circ$, $a_6 = \cos 100000^\circ$.

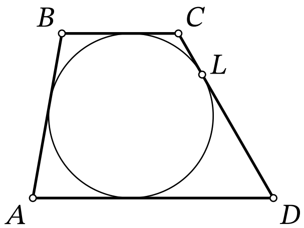
Сколько среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ положительных?

Ответ: 99.

Решение. Заметим, что для целого x, делящегося на 40, косинусы углов x° и $10x^\circ$ совпадают, поскольку разность этих углов $9x^\circ$ делится на 360°. Следовательно, $\cos((10^k)^\circ) = \cos((10^{k+1})^\circ)$ для всех $k \geqslant 3$.

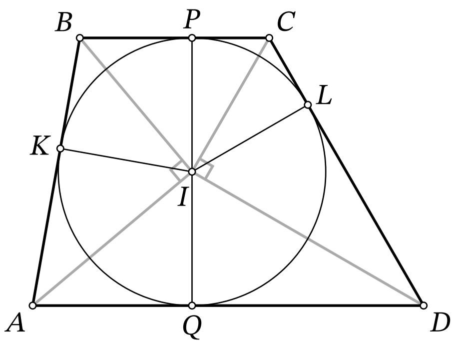
Ясно, что $\cos(1^\circ) > 0$, $\cos(10^\circ) > 0$, $\cos(100^\circ) < 0$, а далее $0 < \cos(1000^\circ) = \cos(10000^\circ) = \ldots = \cos((10^{99})^\circ)$. Значит, среди наших чисел ровно 99 положительных. □

Задача 10.5. В трапецию $ABCD$ вписана окружность ω, L — точка касания ω и стороны CD. Известно, что $CL : LD = 1 : 4$. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $BC = 9$, $CD = 30$.



Ответ: 972.

Решение. Отметим центр окружности I, а также точки касания P, Q, K со сторонами BC, AD, AB соответственно. Заметим, что $IP \perp BC$, $IQ \perp AD$, т. е. точки P, I, Q лежат на одной прямой, и PQ — высота данной трапеции, равная диаметру её вписанной окружности. Также равны отрезки касательных $AK = AQ$, $BK = BP$, $CP = CL$, $DL = DQ$.



Из условия следует, что $CP = CL = \frac{1}{5} \cdot 30 = 6$, $DQ = DL = \frac{4}{5} \cdot 30 = 24$. Тогда $BK = BP = BC - CP = 9 - 6 = 3$.

Поскольку прямые CI и DI являются биссектрисами углов C и D трапеции, имеем $\angle ICD + \angle IDC = \frac{1}{2}(\angle C + \angle D) = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$, т. е. треугольник CID — прямоугольный с прямым углом при вершине I. Так как IL является его высотой, опущенной на гипотенузу, $IL = \sqrt{CL \cdot DL} = 12$. Это радиус окружности.

Аналогично рассмотрев высоту IK в прямоугольном треугольнике AIB, получаем $12 = IK = \sqrt{AK \cdot BK}$. Используя $BK = 3$, извлекаем $AK = AQ = 48$.

Итак, площадь трапеции равна

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot CH = \frac{9 + (48 + 24)}{2} \cdot 24 = 972\,. \qquad \square$$

Задача 10.6. В клетчатой таблице 5 строк и 6 столбцов; в каждой клетке стоит либо крестик, либо нолик, либо звёздочка. Известно, что:

- в каждом столбце число ноликов не меньше числа крестиков;
- в каждом столбце число ноликов не меньше числа звёздочек;
- в каждой строке число крестиков не меньше числа ноликов;
- в каждой строке число крестиков не меньше числа звёздочек.

Сколько звёздочек может быть в такой таблице? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 6.

Решение. Поскольку в каждом столбце ноликов не меньше, чем крестиков, то и во всей таблице ноликов не меньше, чем крестиков. Аналогично, рассматривая строки, получается, что во всей таблице крестиков не меньше, чем ноликов. Следовательно, крестиков и ноликов поровну во всей таблице, а также их поровну как в каждой строке, так и в каждом столбце.

Из условия также следует, что в каждом столбце не может быть 0 или 1 нолик, поэтому их не меньше 2. Поскольку крестиков и ноликов в столбце поровну, то их не может быть 3 или более, т. е. их ровно по 2. Следовательно, в каждом столбце ровно одна звёздочка, т. е. их всего 6.

Отметим также, что описанная конструкция действительно существует. Например, в следующей таблице все условия выполняются:

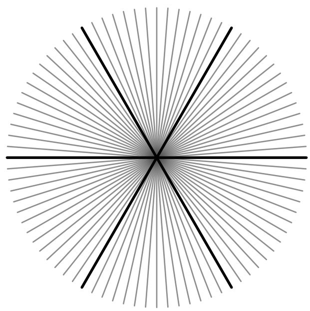
×	×	×	○	○	○
○	○	○	×	×	×
*	*	×	×	○	○
○	○	*	*	×	×
×	×	○	○	*	*

□

Задача 10.7. Оля нарисовала на плоскости N различных прямых, любые две из которых пересекаются. Оказалось, что среди любых 15 прямых обязательно найдутся две, угол между которыми равен 60°. При каком наибольшем N такое возможно?

Ответ: 42.

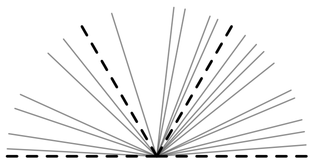
Решение. Сперва покажем, что такие 42 прямые существуют. Проведём три прямые так, чтобы угол между любыми двумя из них был 60°, и возьмём 14 таких троек под разными углами:



Ясно, что при выборе любых 15 прямых как минимум две из них окажутся в одной тройке, и угол между ними равен 60°. Например, под описанную конструкцию подходят 42 прямые, проходящие через одну точку, угол между любыми двумя соседними из которых равен $\frac{180^\circ}{42}$.

Теперь докажем, что прямых, подходящих под условие, не может быть 43 или более. Предположим противное и рассмотрим такие 43 прямые. Выберем произвольную точку O на плоскости; вместо каждой прямой будем рассматривать прямую, параллельную данной, проходящую через O (очевидно, что углы между прямыми не меняются при таких параллельных переносах; так как изначально все прямые пересекались, то после переноса они не могут совпасть).

Проведём через точку O вспомогательную прямую, не совпадающую ни с одной из проведённых и не составляющую ни с одной из них угол 60°; будем называть эту прямую «горизонталью». Выберем «верхнюю» полуплоскость относительно горизонтали и разобьём её на три сектора по 60°:



Ясно, что каждая из рассматриваемых 43 прямых проходит ровно через один сектор; значит, по принципу Дирихле в одном из секторов будет не менее 15 прямых. Но все углы между прямыми в одном секторе будут строго меньше 60°, что даёт противоречие. □

Задача 10.8. Действительные числа x и y таковы, что $x^3 + 21xy + y^3 = 343$. Чему может равняться $x + y$? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 7, −14.

Решение. Непосредственным раскрытием скобок легко проверить тождество

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)\,.$$

Это означает, что выражение в левой части может зануляться либо в случае $a + b + c = 0$, либо в случае $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$, что возможно только при $a=b=c$, поскольку

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2}\,.$$

Условие задачи эквивалентно равенству

$$x^3+y^3+(-7)^3-3xy\cdot(-7)=0\,.$$

Из продемонстрированного выше следует, что это справедливо либо когда $x+y-7=0$ (т. е. $x+y=7$), либо когда $x=y=-7$ (при этом $x+y=-14$). $\square$