Математика **8 класс**

Время выполнения задания – 240 минут.

Максимальное количество баллов – 100.

Задание 1 (15 баллов)

Число $a*b$ есть произведение b последовательных натуральных чисел, наименьшее из которых равно a (в частности, $a*1= a$). Найдите все пары натуральных чисел a, b, для которых выполнено равенство $a*b=2(b*a)$.

Ответ. (1;3) и (2;3). **Решение**. Число $a*b$ есть произведение натуральных чисел от a до $a+b-1$, а число $b*a$ есть произведение натуральных чисел от b до $a+b-1$. Поэтому данное равенство означает, что $a\ldots(b-1)=2, b-1\geq a$. Это означает, что либо $a=1, b-1=2$, либо $a=b-1=2$

Критерии:

Только правильный ответ: -. (2 балла)

Замечено, что при $a < b$ в $a * b$ есть «новые» множители $a, \ldots, b-1$: от $\pm$ (11 баллов)

Задание 2 (15 баллов)

В параллелограмме ABCD отмечена точка K такая, что AB=BK=KC. Докажите, что центр параллелограмма равноудален от середин всех сторон треугольника AKD.

Доказательство. Пусть O – точка пересечения диагоналей, E – середина отрезка AK, F – середина отрезка KD, M – середина отрезка AD. Тогда, рассматривая средние линии в треугольниках ACK, BDF и ACD, приходим к равенствам OF=BK/2=CK/2=OE=CD/2=OM. Что и требовалось.

Критерии:

Доказано, что расстояние от центра параллелограмма до середины AD равно расстоянию до середины другой стороны, но не рассмотрена третья: $\frac{+}{2}$ (8 баллов)

Задание 3 (15 баллов)

Настойчивый восьмиклассник Вася выписал в ряд 2021 нечётное число $n_1, n_2, \ldots, n_{2021}$. Затем он построил новый ряд из 2020 чисел по следующему правилу: p_1 получается перемножением всех делителей числа n_1 (в том числе единицы и самого числа) и всех делителей числа n_2, p_2 получается перемножением всех делителей числа n_2 и всех делителей числа n_3 и т.д. Вася утверждает, что $n_1=3$, $n_{2021}=13$, а у произведения $p_1 p_2 \ldots p_{2020}$ последние четыре цифры – 2021. Стоит ли верить Васе?

Решение. Нет, не стоит. Рассмотрим остаток от деления произведения $p_1 p_2 \ldots p_{2020}$ на 4. Все делители чисел $n_2, \ldots, n_{2020}$ входят в это произведение дважды, а квадрат любого нечётного числа при делении на 4 даёт остаток 1. Поэтому рассматриваемое произведение по модулю 4 будет сравнимо с $3 \cdot 13=39$, то есть будет давать остаток 3. Но число 2021 при делении на 4 даёт остаток 1.

Критерии:

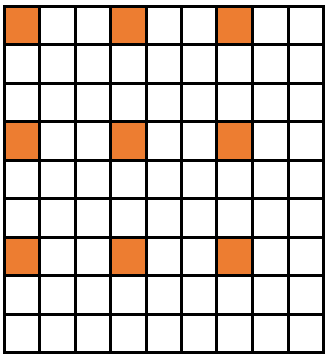
Бездоказательно утверждается, что $\frac{p_1p_2 \dots p_{2020}}{n_1n_{2021}}$ не может иметь остаток 3 от деления на 4: $\mp$ (5 баллов)

Бездоказательно утверждается, что число вида $39x^2$ не может иметь остаток 2021 от деления на 10000 (иметь последние цифры 2021): $\mp$ (5 баллов)

Задание 4 (15 баллов)

Назовём ход ладьи банальным, если она смещается на кратное трём число клеток. В противном случае назовём ход оригинальным. Может ли ладья обойти поле 9×9, чередуя банальные и оригинальные ходы так, чтобы в каждой клетке ладья побывала ровно один раз?

Решение. Нет, не может. Пусть такой обход существует. Выделим множество клеток, указанное на рисунке. Ясно, что банальный ход ведёт из любой клетки этой области в другую её клетку, а не банальный из неё выводит. Поэтому при обходе отмеченные клетки посещаются парами, если обход не начинается и не кончается одной из них. Но мы всегда можем решить эту проблему, сдвинув закрашенную область на одну или две клетки по горизонтали. Значит, можно считать, что все закрашенные клетки посещаются парами. Но их нечётное число.



Критерии:

Присутствует правильное разбиение на зоны и получено противоречие из нечетного количества клеток в зоне, но не учитывается, что в какой то зоне мы могли начать или закончить: $\pm$ (11 баллов)

Задание 5 (20 баллов)

Имеется 111 палочек длин 1, 2, 3, …, 111. Их выкладывают по кругу в некотором порядке. Обязательно ли найдутся лежащие подряд три палочки, из которых можно сложить треугольник?

Решение. Не обязательно. Условие означает, что среди любых трёх подряд лежащих палочек наименьшая будет больше разности двух других. Приведём конструкцию, для которой это выполняться не будет. Будем брать не 111 палочек, а любое их количество, кратное трём. При этом вместо палочек будем работать с набором чисел 1, 2, 3, …, 3k. Сперва выложим круг из 2k чисел от k+1 до 3k: 2k, 2k+1, 2k-1, 2k+2, 2k-2, 2k+3, …, k+2, 3k-1, k+1, 3k. Разницы между соседями будут таковы: 1, 2, 3, …, 2k-2, 2k-1, k. Затем вставим числа 1, 2, …, k в промежутки с разностями 1, 3, 5, …, 2k-1 соответственно. При этом во все промежутки, кроме первого, вставляется число меньшее разности. Для первой тройки 2k, 2k+1, 1 неравенство треугольника также не выполняется.

Критерии:

Приведён правильный пример, но не доказано, что он работает: $\pm$ (14 баллов)

Задание 6 (20 баллов)

Натуральное число N называется интересным, если в системе счисления с основанием t оно задаётся четырёхзначным числом $\overline{abcd}$ (то есть, $N = at^3 + bt^2 + ct + d,\ 0 \le a, b, c, d \le t-1, a \ne 0$) таким, что $\overline{ab} + \overline{cd} = \overline{bc}$. Сколько существует пар интересных чисел, сумма которых тоже является интересным числом? Ответ, конечно, должен зависеть от числа t.

Ответ: $\binom{t-1}{4}$

Критерии:

Получен общий вид интересного числа: от -. (3 балла)

Доказано, что таких пар интересных чисел столько же, сколько и четвёрок (b_1, c_1, b_2, c_2), для которых $b_1 - c_1 \ge 2, b_2 - c_2 \ge 2, c_1 + c_2 \ge t - 1$: от $\mp$ (6 баллов)