Живая математика: о подготовке к олимпиадам

А. И. Буфетов, А. Я. Канель-Белов

Авторы задаются вопросом о причинах неудачного выступления российской команды на Международной математической олимпиаде 2015 г., высказывают ряд положений общего характера об олимпиадном движении в целом, приводя ряд примеров; дают методические предложения об организации подготовки к олимпиаде.

Dieser unbedingte Wille zur Wahrheit: Was ist er? Ist es der Wille, sich nicht täuschen zu lassen? Ist es der Wille, nicht zu täuschen?

Friedrich Nietzsche,
Die fröhliche Wissenschaft (La gaya scienza)[1]

À ceux qui furent mes élèves à qui j'ai donné du meilleur de moi-même et aussi du pire...

A. Grothendieck,
"Fatuité et renouvellement", dédicace (fragment)[2].

1. Введение

В 2015-м году команда России на международной олимпиаде по математике заняла в командном зачёте восьмое место — самое низкое в истории РФ. При этом, также впервые в истории, команда нашей страны осталась без золотых медалей. Относительный рейтинг команды (93,20%) был ниже только в 1992-м году — первом году участия молодого государства в Международной олимпиаде. СССР опускался ниже 8го места лишь однажды — на 9-е в 1981-м году[3], а золотые медали брал на каждой международной олимпиаде, в которой участвовал, начиная с 1962-го года.

Беспрецедентно неудачное выступление команды России в 2015-м году произошло на фоне общего снижения в последние годы — после блестящего первого места в 1999-м году, трёх подряд вторых в 2000–2002, неудачного пятого в 2003-м, уверенного, в течение семи лет (2004–2010), нахождения в первой тройке, страна выпадает из неё в 2011-м и больше не возвращается. Впервые с 1998-го года Россия выпала из первой пятёрки.

Как объяснить это падение? Чем обусловлен провал-2015? «Большим уклонением», которое выправится через год, как в 2003-м? Изменением формата сборов? Появлением новых стран-лидеров, совершивших рывок в последние 10 лет? «Демографической ямой»? Общим снижением уровня школьного математического образования, особенно в том, что касается геометрии? Другими причинами?

[1]Эта безусловная воля к истине: что она такое? Это воля не давать себя обманывать? Это воля самому не обманывать? (Фридрих Ницше, Весёлая наука.)

[2]Ученикам, которым я передал лучшее, что было во мне, а вместе с ним и худшее... (А. Гротендик. Из посвящения первой части "Самодовольство и обновление" книги "Урожаи и посевы".)

[3]Командное место определяется общей суммой баллов, при этом в 1981 году в команде СССР было 6 человек, а не 8, как в других командах. В медальном зачёте команда СССР в 1981 году выступила сильно: 3 золотых, 2 серебряных, 1 бронзовая; для сравнения, в 1979 году команда СССР взяла 2 золотых, 4 серебряных, 1 бронзовую медаль и первое место в командном зачёте.

Очки, места и медали — до известной степени, конечно, условность (например, некоторым участникам команды-2015 до золотой медали не хватило одного балла), а результаты страны на международной олимпиаде никак, вообще говоря, не могут служить показателем уровня математического образования в ней — это хорошо видно на примере Франции[4].

Тем не менее, снижение показателей в последние годы и провал-2015 заставляют задуматься. Лишь очень небольшая доля школьников, вовлечённых в олимпиадное движение, участвует в заключительном этапе всероссийской олимпиады, и ещё гораздо меньшая — в сборах на международную. И все же эти два мероприятия оказывают, на наш взгляд, фундаментальное влияние на всю организацию работы с математически одарёнными детьми в нашей стране. Ориентация на центр традиционна для России. Членов жюри всероссийских олимпиад и тренеров сборов приглашают прочесть лекции и дать мастер-классы в различных регионах. Задачи всероссийских олимпиад и сборов служат эталоном для преподавателей. Соответственно, и в нашей заметке, посвященной олимпиадному движению в целом, мы заостряем внимание на заключительном этапе всероссийской олимпиады и сборах на международную.

В нашей заметке мы высказываем наше видение стратегии подготовки школьников к математическим олимпиадам в общем контексте математического образования и работы с одарёнными школьниками в России. Отнюдь не претендуя на окончательность выводов, мы в первую очередь хотели бы начать широкую дискуссию по этим важным вопросам. Наши предложения сформулированы в шестом разделе. Мы предлагаем рассматривать олимпиадное движение в следующих трех основных аспектах:

1) **Олимпиады как праздник математики.** Для нас олимпиада любого уровня — это в первую очередь праздник математики. Ключевую роль должна играть здесь, на наш взгляд, связь олимпиад с современной математикой. В частности, мы предлагаем как можно активнее привлекать творчески работающих математиков к сотрудничеству с олимпиадным движением на всех его этапах, включая заключительный всероссийский и сборы на международную.

2) **Олимпиады в долгосрочной перспективе.** Мы предлагаем рассматривать олимпиады, в том числе и самого высокого уровня, в широком контексте математического образования. Участие в олимпиадном движении оказывает гигантское влияние на всю будущую жизнь школьника. Легко привести примеры блестящих олимпиадников, ставших блестящими математиками. Вместе с тем, нам далеко не раз с болью приходилось видеть золотых медалистов Международной олимпиады, вступающих на первый курс университета совершенно перегоревшими, не готовыми ни к серьёзной учёбе, ни к творческой работе. Забота о долгосрочном будущем одарённых детей — долг и ответственность всего математического сообщества. Нас вдохновляют слова По-Шеня Ло (Po-Shen Lo), выпускника аспирантуры Принстонского Университета, профессора Университета Карнеги-Меллона, тренера международной команды Соединённых Штатов [11]: “The focus of our program

[4] До сравнительно недавнего времени во Франции не было вообще никакого специального отбора на Международную олимпиаду — в команду назначались ученики выпускных классов лицеев, показавшие лучшие результаты на традиционном Concours général des lycées, проводимом, начиная с 1747-го года, по французскому, греческому и латинскому языкам, математике, философии, истории и физике. Лауреатами по математике были, например, Галуа, взявший пятое место в 1829-м году, Пуанкаре и Адамар. В частности, нельзя было больше, чем однажды выступить на Международной олимпиаде. Результаты Concours général становятся известны в июне, а Международная олимпиада проводится в июле, тем самым, у членов команды оставалось буквально две-три недели на сборы в Париже под руководством преподавателей ведущих Classes préparatoires столицы. В последние годы эта схема пересмотрена в пользу более распространённого в мире отбора команды по итогам региональных олимпиад и других соревнований. Попадание в команду Франции и даже золотая медаль на Международной олимпиаде не дает фанцузскому лицеисту решительно никаких преимуществ (в частности, в Grandes Écoles он поступает по конкурсу на общих основаниях). Наши знакомые французские математики, в том числе успешные олимпиадники в прошлом, в целом склонны к определённому скепсису по отношению к олимпиадному движению в контексте математического образования. Как спинной хребет последнего традиционно воспринимаются Les Classes préparatoires aux grandes écoles.

should be to recognize that we have 54 of the most impactful high school students in terms of potential, and we should help them be successful long-term. That's the goal[5]."

3) **Красота олимпиад.** Э.Б. Винберг [7] пишет: «Очевидными целями школьного курса геометрии являются развитие представлений о геометрии окружающего мира и обучение решению некоторых стандартных задач. Но не менее важно, что этот курс может предоставить прекрасный материал для творчества и способствовать пониманию таких духовных ценностей, как истина и красота». На наш взгляд, то же самое может быть верно и про олимпиадное движение.

   Напротив того, плохая эстетика тренировочных задач тормозит развитие и может сломать учащихся, особенно при большой нагрузке.

   Здесь возникают неизбежно трудные вопросы вкуса. Генрих Густавович Нейгауз [12] пишет: «В конце эмоционального подхода к искусству стоит знаменитая теза: о вкусах не спорят (я лично считаю, что как раз тут-то и надо спорить, так как вкус бывает плохой или хороший).»

За свой вкус математик отвечает своей судьбой.

2. Праздник математики

На всесоюзных олимпиадах была атмосфера праздника. С большой теплотой участвовавшие в них вспоминают сборы, которые проводил А.М. Абрамов (интересно было бы собрать воспоминания о тех сборах и материалы к ним).

Эта праздничность представляется нам ключевой российской традицией работы со школьниками. При этом, как нам представляется, ключевую роль играет акцент на связи олимпиадной математики с профессиональной, чрезвычайно важный, по нашему мнению, на всех уровнях олимпиадного движения — включая заключительный всероссийский и сборы международной команды. Конкретно, нам казалось бы очень желательным участие профессиональных математиков, которые умеют заворожить яркими теориями, показать общую картину своей области, вдохновить учеников красивыми идеями, развить их интуицию. Выступления А.Н. Колмогорова перед участниками всесоюзных олимпиад запоминались, по их рассказам, на всю жизнь.

3. Подготовка к олимпиадам и долгосрочная перспектива

3.1. А.Н. Колмогоров и олимпиадное движение

Подготовка к заключительным этапам олимпиад, а также к международной олимпиаде, в СССР была вписана, как нам представляется, в общий контекст специализированного образования, почти индивидуального на тот момент — достаточно вспомнить стиль работы со школьниками Андрея Николаевича Колмогорова. Такое образование органично включало в себя и популяризацию науки, и знакомство с самыми современными на тот момент достижениями в гуманитарной сфере, при этом дополнялось концепцией единения человека с природой — не просто физкультура, не игровые виды спорта, а походы, путешествия и т.д. Культурная среда — дети проживали вместе, с ними работали и общались как почти сверстники-студенты, так и академики — формировала творческую личность. Олимпиады были соревновательным элементом мотивации.

Н.Б. Васильев и А.А. Егоров пишут в [6]: «Поддержав идею организации всероссийских олимпиад, А.Н. Колмогоров на долгие годы стал основным научным руководителем математической олимпиады. Позднее, когда был образован Центральный оргкомитет всесоюзной олимпиады по

[5]Нашей программе следует сфокусироваться на том, чтобы признать, что у нас занимаются пятьдесят четыре школьника, чей потенциал — из числа самых многообещающих [в Соединённых Штатах — *прим. перев.*]. Мы должны помочь им быть успешными в долгосрочной перспективе. В этом наша цель.

математике, физике и химии, А.Н. Колмогоров возглавил Методическую комиссию по математике при оргкомитете. Его заместителями были в 60-е и 70-е годы М.И. Башмаков и Н.Б. Васильев, в конце 70-х годов — также Н.Х. Розов и А.Н. Земляков, в 80-е годы — В.В. Вавилов и Ю.В. Нестеренко; председателем комиссии с 1983 г. стал академик АН УССР профессор МГУ Б.В. Гнеденко. (...) А.Н. Колмогоров несколько раз приезжал на заключительный тур, исполнял обязанности председателя жюри. С ним обсуждались все принципиальные вопросы — состав жюри, формы проведения олимпиад и их научная программа, содержание задач, итоги олимпиад. Андрей Николаевич считал очень важным участие в работе жюри молодых математиков, в том числе студентов — победителей прошлых олимпиад; тщательную подготовку к лекциям и разбору решений задач со школьниками; поощрение (в частности, упоминание в публикациях об олимпиадах) учителей, чьи ученики показали хорошие результаты. Живо интересовался Андрей Николаевич, отнюдь не лишенный спортивной жилки, и результатами «своих» учеников — школьников из ФМШ при МГУ. Несомненно, самый факт, что олимпиаду возглавляет академик А.Н. Колмогоров, помогал привлечь к участию в олимпиаде многих талантливых людей.»

3.2. Утилитаризм и спорт

На вес
кумир ты ценишь бельведерский
Ты пользы, пользы в нем не зришь.

А.С. Пушкин, Поэт и толпа

На наш взгляд, олимпиады — не самоцель, сама олимпиадная деятельность — этап воспитания будущих исследователей. При их очевидном значении, медали и очки — не главное. Гораздо важнее становление школьников как творческих личностей, реализация их способностей, получение опыта работы на границе возможного.

Мы категорически не согласны с представлением, согласно которому подготовка к олимпиаде высокого уровня — это прежде всего «натаскивание», имеющее мало общего с образованием и ещё меньше с наукой. При таком подходе самое главное — работать (чем больше, тем лучше), «отрешивая» задачи олимпиад, а красивая математика малополезна и не оправдывает затраченных ресурсов.

Тренировка, иногда по необходимости рутинная, и чисто спортивный элемент имманентны олимпиадному движению, однако цена для школьника может оказаться очень высокой.

3.3. Эмоциональное напряжение

Участие в олимпиадном движении вызывает колоссальное эмоциональное напряжение у школьника. Призыв бережно обращаться с талантом может показаться банальным, но мы просим у читателя разрешения поставить акцент на этой банальности.

Зачем нужны отдых и развлечения? Разумеется, для того, чтобы восстановить силы, снять напряжение. Но — далеко не только. Необходимо привести в порядок свои впечатления, нужно, чтобы материал был обработан подсознанием, созданы профессиональные мыслеобразы. Без этого невозможен энтузиазм. Нельзя кормить быстрее, чем переваривается.

4. Олимпиады в контексте математического образования

4.1. Культурная значимость олимпиад

Необходимо упомянуть о культурной значимости олимпиад, как для настоящего, так и для будущего школьника (см. напр. [10]). Например, олимпиадники, даже не ставшие профессиональными математиками, знают, что математика — это и шахматная доска, и графы, и логические парадоксы, и многое другое.

Решение олимпиадных задач разного уровня сложности служит основой для почти всех математических кружков. Подготовка к олимпиадам оказывает значительное влияние на занятия школьников математикой. Именно в решении трудной задачи может состоять достижение подростка. Здесь он оказывается в равном положении со взрослым, даже превосходит его — подготовленный школьник решит олимпиадную задачу быстрее профессора университета.

На трудных задачах вырабатывается интеллектуальная техника и соответствующие волевые качества. Ключевую роль играет сам факт достижения серьезной, но посильной цели в подростковом возрасте.

Олимпиадное движение стало важнейшим явлением в области современного математического образования. Речь идёт, во-первых, об обнаружении талантов, но далеко не только об этом. Благодаря олимпиадной математике удается увидеть роль типичных приемов мышления в работе над трудными задачами и описать их. Организованные единством метода подборки олимпиадных задач по темам «принцип Дирихле», «правило крайнего», «инварианты» и пр. стали частью математической культуры.

Знаменитые книги Д. Пойа [15], [16], [17] естесвенно воспринимать в контексте олимпиадного движения. В целом, на наш взгляд, облик так называемой «венгерской математики» (вспомним, например, Пола Эрдёша или Белу Боллобаша) сформировался во многом под влиянием олимпиад.

Учебник по комбинаторике похож, нам представляется, на олимпиадный самоучитель.

4.2. Примеры.

Мы предлагаем смотреть на олимпиадное движение с точки зрения современной математики, в частности, алгебры, теории чисел, комбинаторики, теории динамических систем. В этом разделе мы иллюстрируем наш тезис на конкретных примерах, взятых из вариантов международных олимпиад последних лет.

Начнём с задачи, близкой нашим собственным научным интересам (см. [2, 4, 5]).

2013.6. Александр Голованов и Михаил Иванов, Санкт-Петербург, РФ.

Пусть $n \geq 3$ — целое число. Рассмотрим окружность и $n+1$ точек на ней, разбивающих её па равные дуги. Рассмотрим все способы пометить эти точки числами $1, 2, \ldots, n$ так, что каждое число использовано ровно один раз. Два способа, отличающихся поворотом, считаются одинаковыми. Способ пометки называется красивым, если для любых четырех меток $a < b < c < d$ таких, что $a + d = b + c$, хорда, соединяющая точки с метками a и d, не пересекает хорду, соединяющую точки с метками b и c. Пусть M — количество красивых способов пометки. Пусть N — количество упорядоченных пар (x, y) натуральных чисел, удовлетворяющих условиям $x + y \leq n$ и $\text{НОД}(x, y) = 1$. Докажите, что $M = N + 1$.

Эта задача открывает дверь в теорию символических динамических систем. От сюжета задачи идут нити, в частности, к цепным дробям и последовательностям Штурма, а, более широко, к теории динамических систем параболического типа, таких как подстановки, перекладывания отрезков, потоки на поверхностях и т.п.

Приведём примеры задач, иллюстрирующие связь недавних олимпиадных задач с современной комбинаторикой.

2014.6. Герхард Вегингер, Австрия.

Говорят, что прямые на плоскости находятся *в общем положении*, если никакие две из них не параллельны и никакие три из них не проходят через одну точку. Любые несколько прямых общего положения разбивают плоскость на части; ограниченными частями разбиения будем называть те из частей, которые имеют конечную площадь. Докажите, что для всех достаточно больших n в каждом множестве из n прямых общего положения можно покрасить не менее $\sqrt{n}$ прямых в синий цвет так, чтобы граница никакой из ограниченных частей разбиения не была полностью синей.

Замечание: за доказательство утверждения задачи, в котором $\sqrt{n}$ заменено на $c\sqrt{n}$, будут начисляться баллы, в зависимости от константы c.

Эта задача возникла из исследования [1], связанного с проблемами Эрдеша – Секереша и Сильвестра – Каллаи.

2012.3, Дэвид Артур, Канада.

Два игрока A и B играют в игру Угадай-ка. Правила этой игры зависят от двух положительных целых чисел k и n, и эти числа известны обоим игрокам. В начале игры A выбирает целые числа x и N такие, что $1 \leqslant x \leqslant N$. Игрок A держит число x в секрете, а число N честно сообщает игроку B. После этого игрок B пытается получить информацию о числе x, задавая A вопросы следующего типа: за один вопрос B указывает по своему усмотрению множество S, состоящее из целых положительных чисел (возможно, это множество уже было указано в одном из предыдущих вопросов) и спрашивает игрока A, принадлежит ли число x множеству S. Игрок B может задать столько вопросов, сколько он хочет. На каждый вопрос игрока B игрок A должен сразу ответить да или нет, при этом ему разрешается соврать столько раз, сколько он хочет; единственное ограничение состоит в том, что из любых $k+1$ подряд идущих ответов хотя бы один ответ должен быть правдивым. После того, как B задаст столько вопросов, сколько он сочтет нужным, он должен указать множество X, содержащее не более чем n целых положительных чисел. Если x принадлежит X, то B выиграл; иначе B проиграл.

Докажите, что:

1) Если $n \geqslant 2^k$, то B может гарантировать себе выигрыш.

2) Для всякого достаточно большого k найдется целое число $n \geqslant 1{,}99^k$, при котором B не сможет гарантировать себе выигрыш.

Пункт 2 значительно сложнее пункта 1. Игрок A может использовать случайную стратегию. Доказательство её корректности позволяет естественным образом придти к локальной лемме Ловаса (см. о ней статью [9] Д.Г. Ильинского, А.М. Райгородского и А.Б. Скопенкова). Подробное изложение связи задачи с локальной леммой Ловаса заинтересованный читатель найдёт в сообщении Карлоса ди Фиоре [8].

4.3. Краткий анализ варианта-2015.

Задача 2015.6, предложенная Россом Аткинсом и Иваном Гуо из Австралии, связана с симпатичным, пусть и несколько экзотическим, сюжетом — «математикой жонглирования» (заинтересованному читателю мы предлагаем обратиться, например, к популярной лекции “The Mathematics of Juggling” профессора Корнельского Университета Аллена Кнутсона (Allen Knutson), выложенной на сервер youtube).

В целом, вариант Международной олимпиады 2015 года показался нам интересным, ярким и содержательным. Нам запомнилась красивая третья задача по геометрии, предложенная украинскими задачными композиторами Даниилом Хилько и Михаилом Плотниковым. Пятая задача, на решение функционального уравнения, предложенная албанским задачным композитором Дорлиром Ахмети, показалась нам свежей, естественной и элегантной. Обе задачи вызвали не совсем понятные нам трудности у команды России.

5. Роль эстетического чувства

You praise the firm restraint with which they write —
I'm with you there, of course:
They use the snaffle and the curb all right,
But where's the bloody horse?

R. Campbell[6]

В любом трудном деле есть тактика, а есть стратегия и «надстратегия» или «философия». Без них невозможно решить трудную задачу, где важна архитектура мыслей. Для развития стратегического мышления особенно важна эстетика.

[6] Твой стиль суховатый и сдержанно краткий// без умолку хвалят друзья...// Уздечка нужна, чтобы править лошадкой.// Но где же лошадка твоя? (Р. Кэмпбелл, перевод С.Я. Маршака.)

Вклад математика определяется не только его «пробивной силой» (способностью решить трудную задачу), но и его вкусом.

Сильная идея является в обличии красоты, роль эстетики становится практически значимой. Важно развивать эстетическое чувство. Здесь помогает искусство, поэтому важна культурная программа.

Осмелимся вновь высказать банальность: роль красоты — вещь абсолютно универсальная для всех сфер человеческой деятельности. Многие выпускники мехмата МГУ рассказывали нам о сильных впечатлениях, которые на них произвели музыкальные вечера, организованные А.Н. Колмогоровым и П.С.Александровым. П.С. Александров вспоминал, что Ф. Хаусдорф и Л. Брауэр прекрасно играли на фортепиано. Ф. Хаусдорф — автор комедии, с успехом шедшей более, чем в тридцати немецких городах. Оперная музыка — одно из увлечений Г.Я. Перельмана.

Чисто технические упражнения не могут принести радость. Если человек не хочет что-то делать, следует задуматься — почему? Перефразируя вторую речь Сократа к Федру ([14], 246е–254а), представим себе карету, лошадь и извозчика. Извозчик (наше сознание и сознательная воля) сам может везти карету очень недолго, но он может управлять лошадью (подсознанием), которая и везет карету нашей судьбы.

Подлинный энтузиазм возникает, когда человек ощущает ценность того, что он делает. Именно такой энтузиазм позволяет лучше переносить нагрузки, оправдывает трудовые будни, мотивирует изучение техники, приносит удовлетворение от усилий.

Победа вдохновляет. Такие переживания очень нужны, но всё же недостаточны. Научная значимость результата придаёт смысл работе.

6. Наши предложения

1) Наше ключевое предложение состоит в том, чтобы методической работой последнего этапа всероссийской и сборов на международную олимпиаду руководил *творчески работающий математик*. Разумеется, он не может заменить собой тренеров и организаторов. Тем не менее, последнее слово в кадровых назначениях и при компоновке варианта, при составлении научного и культурного расписания олимпиады и сборов, а также роль арбитра при апелляции и в других спорных вопросах должны, на наш взгляд, принадлежать ему.

2) Мы предлагаем как можно шире привлекать профессиональное математическое сообщество к сотрудничеству с олимпиадным движением.

3) Нужно экономить силы учеников. Преподаватель СУНЦ МГУ В.В. Рождественский говорил: «Хороший репетитор и блестящий репетитор оба научат. Но последний сделает это, затратив меньше ресурсов ученика.»

4) Нужно создавать командный дух, — чтобы ребята общались, обменивались идеями, в некоторых случаях вместе работали над задачами.

5) Необходимо продумать досуг и культурное развитие школьников.

6) Нужно сочетать техническую подготовку с развитием вкуса и стратегического мышления.

7) Наконец, мы хотели бы обратиться ко всем заинтересованным лицам с просьбой сформулировать своё видение концепции подготовки к олимпиадам, в том числе, международной. Мы с глубокой благодарностью примем все комментарии. Их можно отправлять, например, в редакцию журнала “Математическое образование”.

7. Заключение

У нас была счастливая возможность работать с участниками команды России 2015-го года. На наш взгляд, эти блестяще одарённые молодые математики ничуть не слабее своих коллег — золотых медалистов прошлых лет. Мы очень болеем за нашу команду и горячо желаем ей успеха в 2016-м году.

Благодарности. Мы глубоко благодарны Э. Брейару, Ю.С. Ильяшенко, А.К. Ковальджи, Д.О. Орлову, С.Е. Рукшину, М.А. Островскому, В.В. Прасолову, М.Б. Скопенкову, В.А. Тиморину, В.М. Тихомирову, Б.Р. Френкину и А.И. Эстерову за полезные обсуждения.

Литература

[1] Bose R., Cardinal J., Collette S., Hurtado F., Korman M., Langerman S., Taslakian P., Coloring and Guarding Arrangements. - URL: arxiv:1205.5162.

[2] Канель-Белов А.Я., Чернятьев А.Л. Описание нормальных базисов граничных алгебр и факторных языков медленного роста // Математические заметки, принята в печать.

[3] Канель-Белов А.Я. Олимпиады: дверь в математику или спорт? // Математическое Просвещение. - Т. 15. - 2011. - С. 182-186.

[4] Bufetov A.I. Limit theorems for translation flows // Annals of Mathematics. - V. 179. - 2014. - № 2. - P. 431-499.

[5] Bufetov A.I., Solomyak B. On the modulus of continuity for spectral measures in substitution dynamics // Advances in Mathematics. - V. 260. - 2014. - P. 84-129.

[6] Васильев Н.Б., Егоров А.А Задачи Всесоюзных математических олимпиад. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. - 14 л. - (Б-ка мат. кружка; вып. 18).

[7] Винберг Э.Б. О концепции учебника геометрии А.В. Погорелова // Математическое Просвещение. - Т. 19. - 2015.

[8] Di Fiore C. A report on the third problem of IMO 2012. - URL: artofproblemsolving.com.

[9] Ильинский Д.Г., Райгородский А.М., Скопенков А.Б. Независимость и доказательства существования в комбинаторике // Математическое Просвещение. - Т. 19. - 2015.

[10] Константинов Н.Н. Турнир Городов и Математическая олимпиада // Математическое Просвещение. - Сер. 3. - Вып. 1. - 1997. - С. 164-174.

[11] Lamb E. Math Boot Camp Prepares U.S. Team for International Mathematical Olympiad. - URL: www.simonsfoundation.org.

[12] Нейгауз Г.Г. Святослав Рихтер (творческий портрет) // Советская культура. - 11.06.1960. (Цит. по Нейгауз Г.Г. Размышления, воспоминания, дневники, избранные статьи, письма к родителям. - Сов. композитор, 1975.

[13] Перельман Я.И. Живая математика, Математические рассказы и головоломки / Издание восьмое, переработанное и дополненное. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1967.

[14] Plato, Phaedrus, Platonis opera II / Oxford Classical Texts. - Clarendon Press, 1922.

[15] Пойа Д. Как решать задачу. - М.: Учпедгиз, 1961.

[16] Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. - М.: Наука, 1975.

[17] Пойа Д. Математическое открытие. - М.: Наука, 1976.

Буфетов Александр Игоревич,
профессор РАН, ведущий научный сотрудник
МИАН им. В.А. Стеклова,
ИППИ РАН им. А.А. Харкевича,
НИУ ВШЭ (Москва),
Национальный центр научных
исследований (Франция)

bufetov@mi.ras.ru

Канель-Белов Алексей Яковлевич,
Московский физико-технический институт,
университет Бар-Илана (Израиль),
доктор физ.-мат. наук.

kanelster@gmail.com