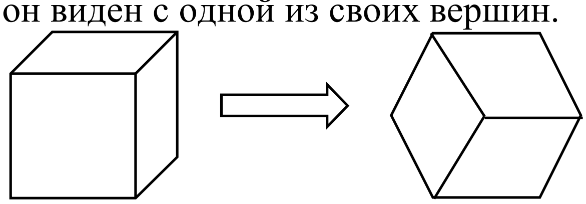
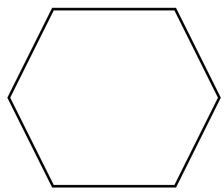
Решения задач краевой Политехнической олимпиады
для учащихся г. Перми и Пермского края. 2019 г. Заочный этап. 9 кл.

Задание 1. (8 б.)
В летнем лагере отдыхают 178 человек. Для проведения одного из мероприятий всех ребят надо разбить на команды по 7 и 13 человек. Какое наибольшее количество команд по 7 человек можно собрать? Ответ обоснуйте.
Решение. Пусть x и y - количество команд по 7 и 13 человек, соответственно. Для того, чтобы всех ребят разбить на команды, должно выполняться равенство: $7x+13y=178$. Выразим из него количество команд по 7 человек: $x=\frac{178-13y}{7}=25-2y+\frac{3+y}{7}$. Поскольку x - целое число, значит $3+y$ должно без остатка делиться на 7. Кроме того, чтобы команд по 7 человек было наибольшее количество, y должен быть наименьшим. Отсюда $y=4 \Rightarrow x=18$.
Ответ: 18.

Задание 2. (10 б.)
Тело кубической формы подвешено за вершину куба к лампочке. Какой формы будет тень от куба на полу? Нарисуйте форму тени и объясните, почему она будет именно такой. Лампочку считать точечным источником.
Решение. Согласно принципу прямолинейности света, свет от точечного источника распространяется во все стороны по лучам, исходящим из этого источника. Таким образом, в данном случае световые лучи будут распространяться вдоль граней куба, прилежащих к данной вершине.
Нарисуем вид куба, как он виден с одной из своих вершин.



В таком случае свет, распространяясь вдоль трех граней куба, будет образовывать на полу тень, по форме совпадающую с очертаниями куба (рисунок справа). Тогда форма тени – правильный шестиугольник.



Ответ: Тень имеет форму правильного шестиугольника.

Задание 3. (10 б.)
Плитка шоколада разделена линиями так, что образуются 6 рядов по 4 кусочка в каждом. Два друга решили поиграть в такую игру: каждый по очереди разламывает шоколад по имеющимся линиям на две части. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Который из друзей выиграет? Ответ обоснуйте.

Решение. Игра будет продолжаться до тех пор, пока шоколадка не будет разделена на $6 \cdot 4 = 24$ кусочков. Для этого потребуется 23 хода. Поскольку количество ходов нечетное, выиграет всегда тот из друзей, кто первым ломал шоколадку.
Ответ: выиграет игрок, ходивший первым.

Задание 4. (12 б.)
Два автомобиля одновременно выехали из Перми в Екатеринбург. Один автомобиль первую половину **времени** ехал со скоростью 40 км/ч, а вторую со скоростью 60 км/ч. Второй автомобиль первую половину **пути** ехал со скоростью 40 км/ч, а вторую со скоростью 60 км/ч. Какой из автомобилей быстрее приедет в Екатеринбург?
Решение. Рассчитаем среднюю скорость движения автомобиля в первом случае:
$$v_{ср(1)} = \frac{s}{t} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2} = \left| t_1 = t_2 \right| = \frac{v_1 + v_2}{2} = 50 \ ^{км}\!/_{ч} \ .$$
Во втором случае формула для средней скорости будет выглядеть иначе:
$$v_{ср(1)} = \frac{s}{t} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{s_1 + s_2}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}} = \left| s_1 = s_2 \right| = \frac{2 v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 48 \ ^{км}\!/_{ч} .$$
Таким образом, т.к. общее расстояние в обоих случаях одинаково, а средняя скорость первого автомобиля больше, чем у второго, то первый автомобиль приедет в Екатеринбург раньше.
Ответ: первый автомобиль приедет в Екатеринбург раньше.

Задание 5. (14 б.)
Уравнение $a(2x-1) + b(3x-2) = 2x$ имеет больше 2018 корней. Найдите значения чисел a и b.
Решение. Данное уравнение является линейным уравнением вида $k \cdot x = b$ и может либо не иметь корней, либо иметь один корень, либо иметь бесконечное количество корней. Преобразуем уравнение:
$$a(2x-1) + b(3x-2) = 2x \Leftrightarrow x(2a + 3b - 2) = a + 2b .$$
Больше 2018 корней уравнение имеет только в том случае, когда корней бесконечное количество, т.е. когда $k = b = 0$, значит:
$$\begin{cases} 2a + 3b - 2 = 0, \\ a + 2b = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4b + 3b - 2 = 0, \\ a = -2b, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2, \\ a = 4. \end{cases}$$
Ответ: $a = 4, b = -2.$

Задание 6. (16 б.)
Камень сбрасывают с высоты H без начальной скорости. В тот же момент времени с поверхности земли вертикально вверх бросают камень с начальной скоростью V_0. Через какое время оба камня окажутся на одной высоте? Найдите эту высоту. При какой наименьшей начальной скорости второго камня два камня могут встретиться в воздухе?

<u>Решение</u>. Запишем уравнения движения для первого тела (сброшенного без начальной скорости) и для второго тела (подброшенного вверх):

$$y_1(t) = H - \frac{gt^2}{2},$$

$$y_2(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Так как известно, что оба тела начали двигаться в одно и то же время, то время их встречи можно определить из уравнения:

$$y_1\left(t_{встр}\right) = y_2\left(t_{встр}\right),$$

$$H - \frac{gt_{встр}^2}{2} = v_0 t_{встр} - \frac{gt_{встр}^2}{2},$$

$$t_{встр} = \frac{H}{v_0}.$$

Координату встречи (она же – высота, на которой произойдет встреча) можно определить, подставив время встречи в любое из уравнений движения:

$$y_{встр} = y\left(t_{встр}\right) = H - \frac{gt_{встр}^2}{2} = H - \frac{g}{2}\left(\frac{H}{v_0}\right)^2.$$

Для того, чтобы найти условия встречи, необходимо, чтобы встреча произошла при $y_{встр} \ge 0$, тогда из решения соответствующего неравенства получаем ограничения на v_0:

$$y_{встр} = H - \frac{g}{2}\left(\frac{H}{v_0}\right)^2 > 0 \Rightarrow v_0 \ge \sqrt{\frac{gH}{2}}.$$

<u>Ответ</u>: $t_{встр} = \frac{H}{v_0}$, $y_{встр} = H - \frac{g}{2}\left(\frac{H}{v_0}\right)^2$, $v_0 \ge \sqrt{\frac{gH}{2}}$.

Решения задач краевой Политехнической олимпиады для учащихся г. Перми и Пермского края. 2019 г. Заочный этап. 10 кл.

Задание 1. (8 б.)

На чемпионате Европы по фигурному катанию среди 24 участниц выступает по одной спортсменке от Финляндии, Швеции и Норвегии. Порядок выступлений определяется жребием. Найдите вероятность того, что фигуристка из Швеции будет выступать перед спортсменками из Финляндии и Норвегии.

Решение. Общее количество спортсменок для ответа на вопрос неважно. Сколько бы их ни было, для указанных стран есть 6 способов взаимного расположения среди выступающих (Ф – Финляндия, Ш – Швеция, Н – Норвегия): ...Ф...Ш...Н..., ...Ф...Н...Ш..., ...Ш...Н...Ф..., ...Ш...Ф...Н..., ...Н...Ф...Ш..., ...Н...Ш...Ф... Фигуристка из Швеции будет выступать после остальных в двух случаях. Поэтому вероятность того, что спортсменки случайным образом будут распределены именно так, равна 2/6=1/3.

Ответ: 1/3.

Задание 2. (8 б.)

Некоторое тело свободно падает с высоты 45 м. Найдите среднюю скорость движения тела на последней трети пути.

Решение. Пусть тело падает с некоторой высоты H без начальной скорости. Запишем уравнение движения тела:

$$y(t) = H - \frac{gt^2}{2}.$$

Найдем время, за которое тело пройдет все расстояние H:

$$y(t_1) = H - \frac{gt_1^{\,2}}{2} = 0 \;\Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Аналогично можно найти время, за которое тело прошло первые 2/3 своего пути:

$$y(t_2) = H - \frac{gt_2^{\,2}}{2} = \frac{2}{3}H \;\Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2H}{3g}}.$$

Тогда время движения на последней трети пути равно:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}} - \sqrt{\frac{2H}{3g}}\;,$$

а среднюю скорость движения можно рассчитать по формуле:

$$v_{ср} = \frac{\frac{1}{3}H}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{3}H}{\sqrt{\frac{2H}{g}} - \sqrt{\frac{2H}{3g}}} \approx 28 м/с.$$

Ответ: $v_{ср} \approx 28$ м/с.

Задание 3. (12 б.)

Решите неравенство: $\left|\sqrt{10x-3}-2\right|+\left|\sqrt{10x-3}-8\right|\le 10$.

Решение. Введем замену переменной $t=\sqrt{10x-3}\ge 0$, тогда неравенство примет вид:

$$|t-2|+|t-8|\le 10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t\le 2, \\ -t+2-t+8\le 10, \end{cases} \\ \begin{cases} t\in[2;8], \\ t-2-t+8\le 10, \end{cases} \\ \begin{cases} t\ge 8, \\ t-2+t-8\le 10, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t\le 2, \\ t\ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} t\in[2;8], \\ \forall t, \end{cases} \\ \begin{cases} t\ge 8, \\ t\le 10, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow t\in[0;10].$$

Произведем обратную замену: $0\le\sqrt{10x-3}\le 10 \Leftrightarrow 0\le 10x-3\le 100 \Leftrightarrow x\in[0,3;10,3]$.

Ответ: $x\in[0,3;10,3]$.

Задание 4. (12 б.)

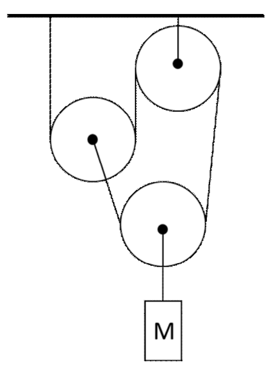
Периметр треугольника с целыми сторонами равен 8. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

Решение. Треугольник существует тогда и только тогда, когда сумма двух любых сторон больше третьей стороны или когда каждая из сторон меньше полупериметра треугольника. В данном случае каждая из сторон должна быть целым числом, меньше 4. Легко показать, что такое возможно только если стороны треугольника равны 3, 3 и 2. Радиус вписанной окружности можно определить по формуле $r=S/p$, где $p=4$ и $S=\sqrt{p(p-2)(p-3)(p-3)}=2\sqrt{2}$ (по формуле Герона). Тогда $r=\dfrac{2\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

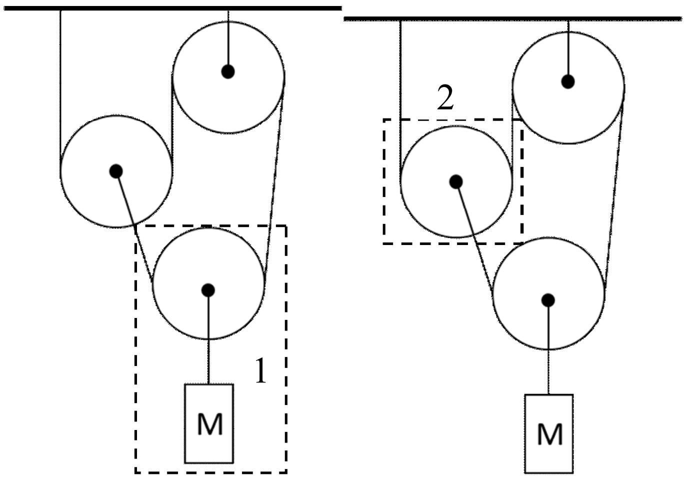
Ответ: $r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Задание 5. (14 б.)

Определите ускорение, с которым движется тело массы M (см. рис.). Нити считать невесомыми и нерастяжимыми, блоки – невесомыми, трением пренебречь.



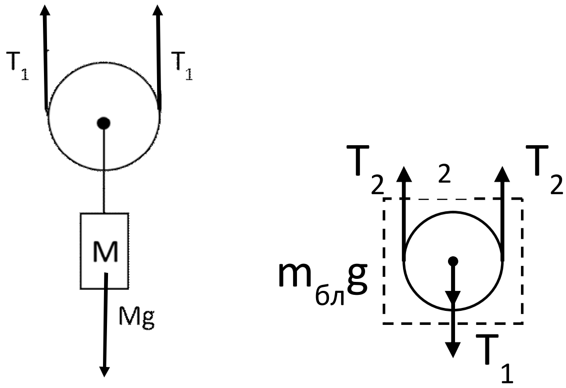
Решение. Рассмотрим две подсистемы: тело и подвижный блок (1) и подвижный блок (2) (см. рисунок).



Для каждой из подсистем запишем второй закон Ньютона в проекции на ось у, направленную вертикально вниз:

$$(1):\ Ma = Mg - 2T_1\ ,$$

$$(2):\ m_{бл}a_{бл} = 2T_2 - T_1 - m_{бл}g\ .$$



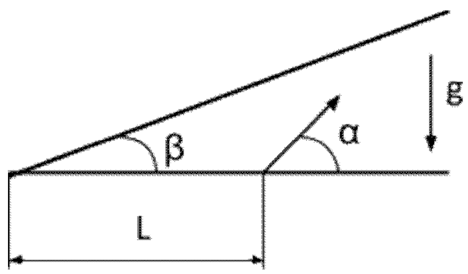
Т.к. блок невесом, то $m_{бл} = 0$, значит, $2T_2 - T_1 = 0$. Но силы T_1 и T_2 приложены к одной и той же нити (см. рисунок), а для невесомой нити известно, что сила натяжения вдоль неё – постоянна. Отсюда следует, что $T_2 = T_1 = 0$ и из (1) ускорение груза:

$$a = g\,.$$

Ответ: g.

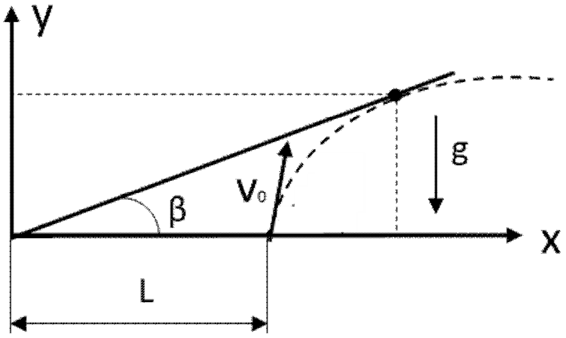
Задание 6. (16 б.)

Орудие стреляет из-под укрытия, наклоненного к горизонту под углом β, находясь на расстоянии L от основания укрытия (см. рис.). Ствол орудия закреплен под углом α к горизонту (α>β). С какой максимальной скоростью V_0 может вылететь снаряд, не задев укрытия?



Решение. Запишем уравнения движения снаряда в системе координат, показанной на рисунке:

$$x(t) = L + v_0 \cos\alpha,$$
$$y(t) = v_o \sin\alpha - \frac{gt^2}{2},$$
$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha,$$
$$v_y(t) = v_0 \sin\alpha - gt.$$



В момент касания траектории снаряда с укрытием t_1 его скорость должна быть направлена под углом β к горизонту (иначе произойдет взаимодействие снаряда и укрытия):

$$\frac{v_y(t_1)}{v_x(t_1)} = \frac{v_0 \sin\alpha - gt_1}{v_0 \cos\alpha} = \operatorname{tg}\beta\,, \tag{1}$$

в тот же момент времени можно записать связь координат снаряда (см. рисунок):

$$\frac{y(t_1)}{x(t_1)} = \frac{v_0 \sin\alpha t_1 - \frac{gt_1^2}{2}}{L + v_0 \cos\alpha t_1} = \operatorname{tg}\beta\,. \tag{2}$$

Решая систему уравнений (1)–(2) относительно неизвестных t_1 и v_0, получим:

$$v_0 = \frac{\sqrt{2gL\operatorname{tg}\beta}}{\cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)}.$$

<u>Ответ</u>: $v_0 = \dfrac{\sqrt{2gL\operatorname{tg}\beta}}{\cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)}$.

Решения задач краевой Политехнической олимпиады для учащихся г. Перми и Пермского края. 2019 г. Заочный этап. 11 кл.

Задание 1. (8 б.)

Решите неравенство: $\sqrt{4+x}+\sqrt[4]{16-x}>2$.

Решение. Определим область допустимых значений данного неравенства:

$$\begin{cases}4+x\ge 0,\\ 16-x\ge 0,\end{cases}\Leftrightarrow x\in[-4;16].$$

Рассмотрим функции $y=\sqrt{4+x}$ и $y=\sqrt[4]{16-x}$: они обе неотрицательны, при этом первая функция является монотонно возрастающей, а вторая – монотонно убывающей.

При $x\in[-4;0)$ $y=\sqrt{4+x}\ge 0$ и $y=\sqrt[4]{16-x}>\sqrt[4]{16}=2$, значит $\sqrt{4+x}+\sqrt[4]{16-x}>2$.

При $x\in(0;16]$ $y=\sqrt{4+x}>\sqrt{4}=2$ и $y=\sqrt[4]{16-x}\ge 0$, значит $\sqrt{4+x}+\sqrt[4]{16-x}>2$.

При $x=0$ $y=\sqrt{4+x}=2$ и $y=\sqrt[4]{16-x}=2$, значит неравенство выполняется ($2+2>2$).

Таким образом, неравенство верно при любых значениях аргумента из области допустимых значений.

Ответ: $x\in[-4;16]$.

Задание 2. (10 б.)

Фабричная труба высоты 30 м выносит дым при температуре 80°С. Определите перепад давления в трубе, обеспечивающий тягу. Температура воздуха равна −5°С, плотность воздуха 1,29 кг/м^3.

Решение. Дым из трубы начнет двигаться вверх, если перепад давления сверху и снизу будет равен весу горячего воздуха, находящегося в трубе:

$$\Delta p\ge \Delta\rho_{возд}gH\ ,$$

где Н – высота трубы, а $\Delta\rho_{возд}$ - разница плотностей горячего воздуха в трубе и холодного воздуха снаружи.

Плотность горячего воздуха можно определить, используя уравнение Менделеева-Клапейрона, связав ее с плотностью воздуха снаружи (изменением атмосферного давления по высоте при постоянной температуре можно пренебречь):

$$\rho=\frac{\mu p}{RT}\Rightarrow \rho_{гор.возд.}=\rho_{наруж.возд.}\frac{T_{внутр}}{T_{внеш}}\ .$$

Подставив все значения, получим оценку:

$$\Delta p\ge 123\,Па\ .$$

Ответ: $\Delta p\ge 123$ Па.

Задание 3. (10 б.)

Фирма должна произвести ремонт дороги за 10 дней. Для стимулирования быстроты выполнения работ руководство фирмы выплачивает бригаде рабочих по 235 тыс. руб. премии за каждый сэкономленный день. Для выполнения работ фирма арендует технику, платя 40 тыс. руб. за первый день аренды и за каждый последующий – на 30 тыс. руб. больше, чем за предыдущий. При каком количестве дней, затраченных на ремонт, общие расходы фирмы (на аренду оборудования и премии) будут наименьшими?

Решение. Пусть $n \in [1;10]$ - количество дней, которые фирма потратила на ремонт дороги. Тогда затраты на аренду техники можно вычислить как сумму арифметической прогрессии и они составят $S_n = \frac{2 \cdot 40 + 30(n-1)}{2} n = 15n^2 + 25n$ тыс. руб. Расходы на премии рабочим равны $235(10-n)$ тыс. руб., тогда суммарные затраты фирмы:

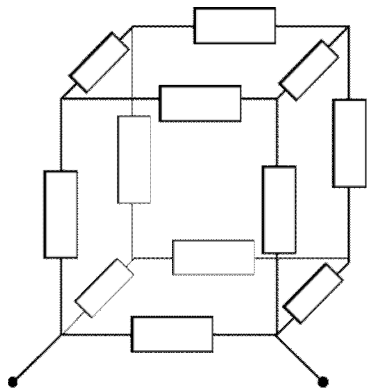
$$f(n) = 15n^2 + 25n + 2350 - 235n = 15n^2 - 210n + 2350.$$

Необходима найти наименьшее значение данной функции при $n \in [1;10]$. Поскольку функция квадратичная, наименьшее значение будет достигаться в вершине параболы $n_{\min} = \frac{210}{2 \cdot 15} = 7$.

Ответ: 7 дней.

Задание 4. (12 б.)

Электрическая цепь содержит 12 резисторов, расположенных на ребрах куба (см. рис.). Сопротивление каждого резистора равно R. Найдите общее сопротивление такой цепи при подключении к клеммам, обозначенным на рисунке черными точками.



Решение. Из соображений симметрии можно заметить, что потенциалы точек A и B, так же, как и потенциалы точек C и D, попарно равны, т.к. при показанном способе подключения куб симметричен относительно плоскости, показанной на рисунке 1 ниже.

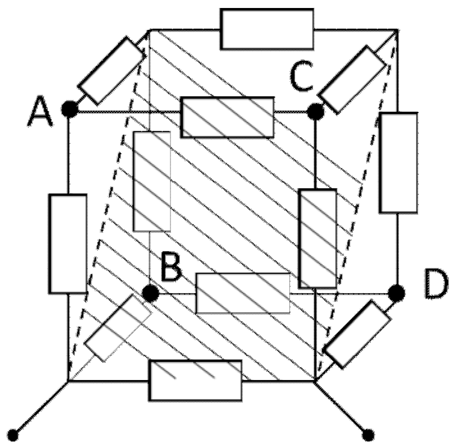


Рис. 1

Если потенциалы каких-либо точек в цепи равны, то эти точки можно связать проводником. В таком случае, исходное соединение сопротивлений можно представить в виде плоской схемы, показанной на рис. 2.

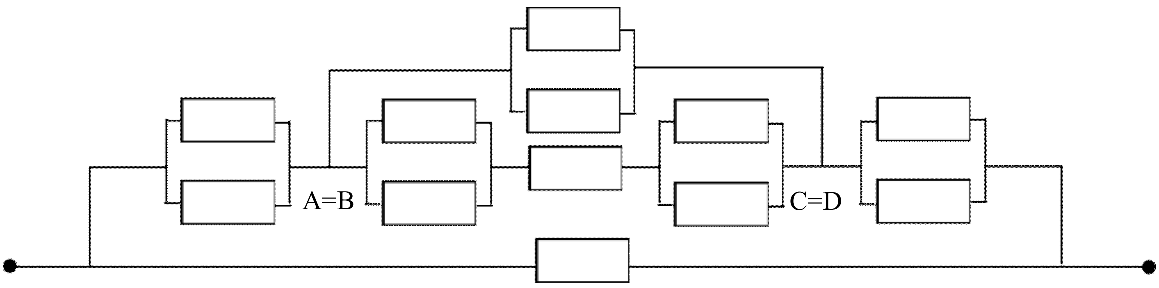


Рис. 2.

Используя формулы для соединений сопротивлений при параллельном:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

и последовательном соединении:

$$R = R_1 + R_2,$$

и последовательно объединяя резисторы, получим итоговое сопротивление цепи: $R_{общ} = \frac{7}{12}R$.

Ответ: $\frac{7}{12}R$.

Задание 5. (14 б.)

На координатной плоскости xOy изображена фигура, все точки которой удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} y^2 - xy - 6x^2 \le 0, \\ x^2 - 4x + 3 \le 0. \end{cases}$$

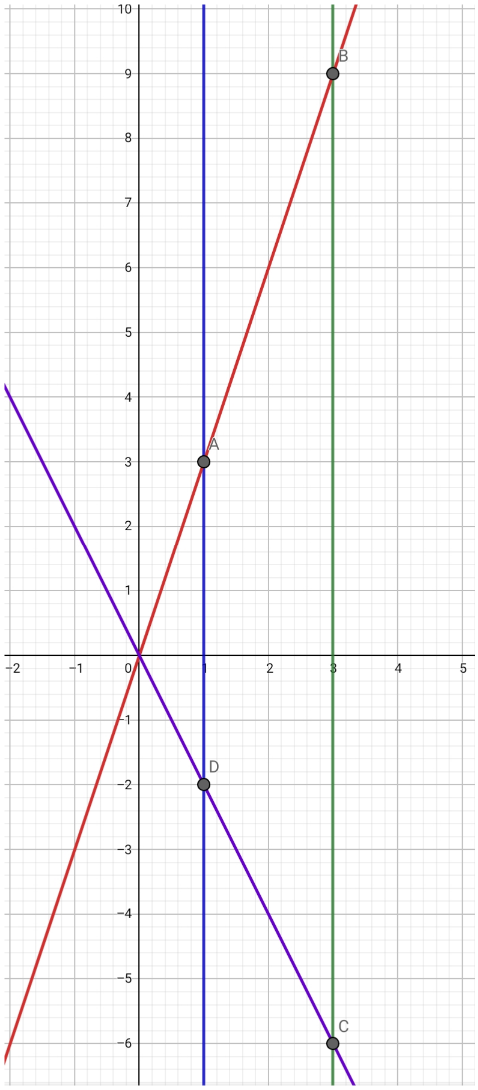
Найдите площадь этой фигуры.

Решение. Разложим данные выражения на множители:

$$\begin{cases} y^2 - xy - 6x^2 \le 0, \\ x^2 - 4x + 3 \le 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-3x)(y+2x) \le 0, \\ (x-1)(x-3) \le 0. \end{cases}$$

Изобразим на координатной плоскости прямые $y = 3x$, $y = -2x$, $x = 1$, $x = 3$, они будут границами области, являющейся решением системы.

Таким образом, решением системы являются все точки, лежащие внутри трапеции *ABCD* с основаниями *AD*=5 и *CB*=15 и высотой 2. Площадь такой трапеции $S = \frac{5+15}{2} \cdot 2 = 20$.



Ответ: 20.

Примечание: Определение границ области путем подстановки нескольких точек в систему неравенств без доказательства того, что границы являются прямыми линиями, является некорректным.

Задание 6. (16 б.)

Однородная цепь массы M и длиной L лежит на краю гладкого стола так, что половина ее длины свисает вертикально вниз. В какой-то момент времени цепь начинает соскальзывать вниз. Найдите время, за которое цепь полностью соскользнет со стола.

Решение. Рассмотрим ситуацию в некоторый произвольный момент времени t>0, когда длина «свисающей» части цепи равна x ($x \geq L/2$). Запишем второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось в этот момент времени:

$$Ma_x = -m(t)g = -\mu x g,$$

где $\mu = M/L$ – линейная плотность цепи, а $m(t)$ – масса той части цепи, которая в данный момент занимает вертикальное положение.

Учитывая, что $a_x = \ddot{x}$, и перенося все слагаемые в одну часть уравнения, получаем:

$$\mu L\ddot{x} + \mu x g = 0,$$

или

$$\ddot{x} + x\frac{g}{L} = 0\,.$$

Полученная формула полностью совпадает с основным уравнением гармонических колебаний математического маятника длины L, для которого известна формула для периода колебаний:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\ .$$

Учитывая, что для математического маятника период – это время, за которое координата дважды изменяется от минимального до максимального значения, а в задаче координата x должна за искомое время измениться на «половину амплитуды», получаем время соскальзывания:

$$t_{соск} = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}\,.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}$.