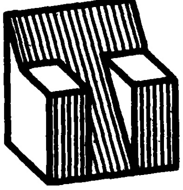
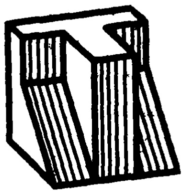
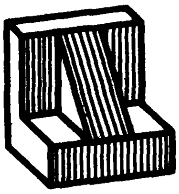
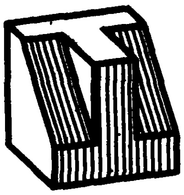
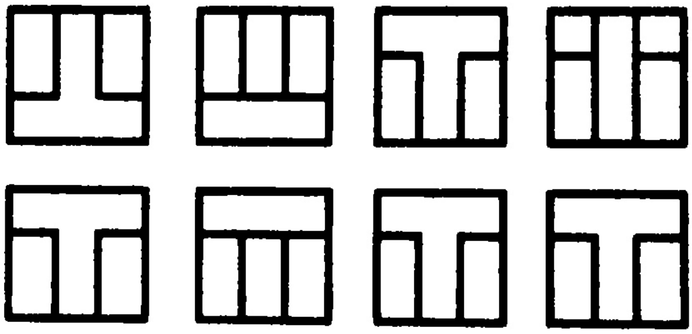
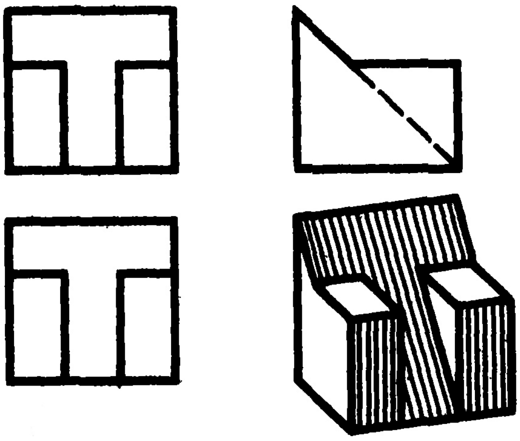
Краевая Политехническая олимпиада
для учащихся г. Перми и Пермского края. 2020 г. заочный этап. 10 кл.

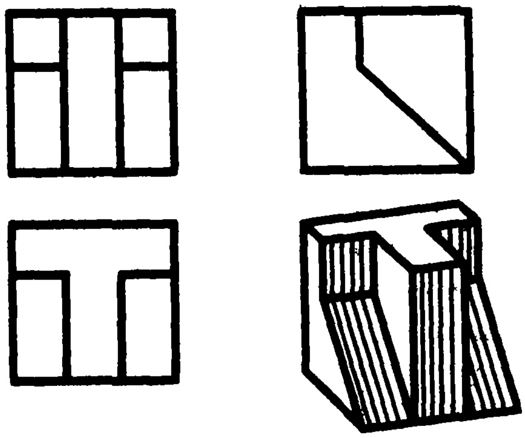
Задание 1. (6 б.) Сопоставьте детали, приведенные на чертеже под номерами 1-4, и их проекции, обозначенные буквами а-г. Для каждой детали начертите недостающую проекцию.

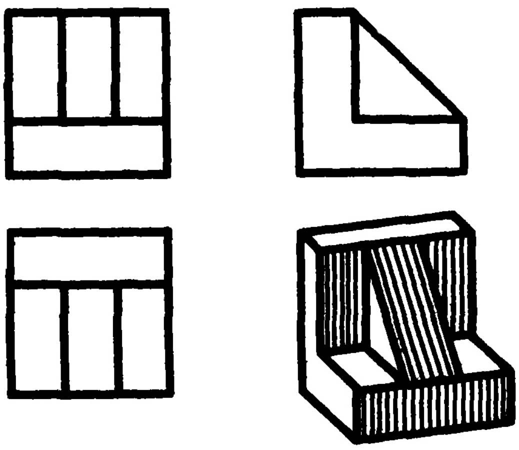

1)

2)

3)

4)

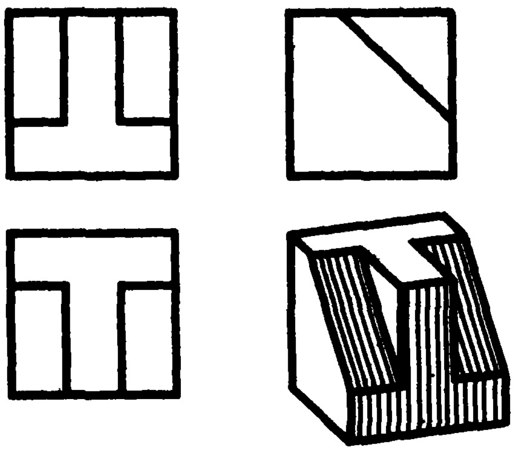

а б в г

Решение. Проекции приведены на рисунке.


1-в


2-г


3-б


4-а

Ответ: 1-в, 2-г, 3-б, 4-а.

Задание 2. (8 б.) В конце августа фирма имела некую сумму денег, предназначенную для закупки нефти. Но 1 сентября руководство положило эту сумму в банк. Известно, что сумма вклада увеличивалась 1 числа каждого месяца на 26% по отношению к сумме на 1 число предыдущего месяца, а цена барреля нефти убывала на 10% ежемесячно. Руководство фирмы 2 ноября сняло всю сумму из банка вместе с процентами, и направило ее на покупку нефти. На сколько процентов (от запланированного объема) увеличилось количество купленной нефти?

Решение. Пусть x - сумма, которую фирма планировала потратить на закупку нефти, y - первоначальная цена барреля нефти. После двух месяцев в банке сумма с процентами составила $1,26^2 x$. За это время цена барреля нефти понизилась до $0,9^2 y$. Тогда фирма сможет купить $\frac{1,26^2 x}{0,9^2 y} = 1,96\frac{x}{y}$, т.е. на 96% больше нефти от запланированного объема.

Ответ: 96%.

Задание 3. (8 б.) Парашютист спускается с постоянной скоростью $V = 5$ м/с. На расстоянии $h = 10$ м от земли у него выпал некий предмет. Найдите промежуток времени между падением на землю этого предмета и приземлением парашютиста. Сопротивлением воздуха для падающего предмета пренебречь, ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

Решение. Время падения парашютиста: $t_1 = \frac{h}{\upsilon}$, время падения предмета находится из уравнения $0 = h - \upsilon t - \frac{gt^2}{2}$ и равно: $t_2 = \frac{-\upsilon + \sqrt{\upsilon^2 + 2gh}}{g}$. Тогда искомое время:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{h}{\upsilon} - \frac{-\upsilon + \sqrt{\upsilon^2 + 2gh}}{g} = 1 \text{ с.}$$

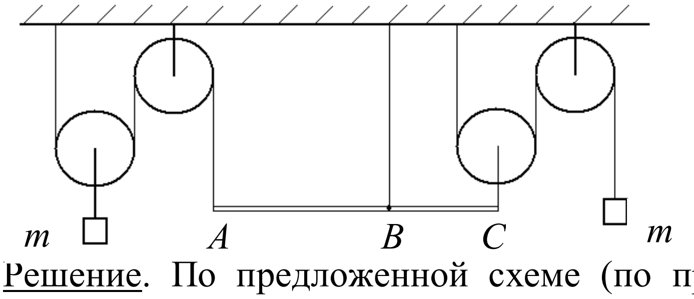
Ответ: 1 с.

Задание 4. (8 б.) В классе 26 человек, среди них два близнеца – Андрей и Сергей. Класс случайным образом делят на две группы по 13 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Андрей и Сергей окажутся в одной группе.

Решение: Пусть один из близнецов находится в некоторой группе. Вместе с ним в группе окажутся 12 человек из 25 оставшихся одноклассников. Вероятность того, что второй близнец окажется среди этих 12 человек, равна $\frac{12}{25} = 0,48$.

Ответ: 0,48.

Задание 5. (15 б.) Ученик собрал приведенный на рис. рычаг. На каком расстоянии от точки A ученик должен подвесить гирю массой 1 кг, чтобы рычаг находился в равновесии? Длины плеч рычага $AB = 40$ см, $BC = 15$ см; $m = 1$ кг.



Решение. По предложенной схеме (по правилу рычага) имеем, что на левую и правую части стержня действуют направленные вертикально вверх силы $F_A = mg/2$

и $F_C = 2mg$. $F = mg$ – сила тяжести подвешенной гири, она направленна вертикально вниз. Определим моменты сил F_A и F_C:

$$M_A = F_A|AB| = \frac{1}{2}m_1 g|AB| = 2 \text{ Н·м}, \; M_C = F_C|BC| = 2m_2 g|BC| = 3 \text{ Н·м}.$$

Поскольку возникающий под действием силы F момент будет препятствовать моментам советующих сил на отрезках *AB* и *BC*, то единственный вариант расположения гири – отрезок *BC*. Из уравнения равновесия найдем расстояние от точки В до точки подвеса груза:

$$\frac{1}{2}m_1 g|AB| = 2m_2 g|BC| - mg|BX|, \; |BX| = 0{,}1 \text{ м}.$$

Таким образом расстояние от точки *A* до точки повеса груза:

$$|AX| = |AB| + |BX| = 0{,}5 \text{ м}.$$

Ответ: 50 см.

Задание 6. (15 б.) Найдите среднюю силу отдачи при стрельбе из автомата пулями массой 9 г со скоростью у среза ствола 800 м/с при скорострельности 300 выстрелов в минуту.

Решение. Среднее значение силы *P* отдачи при стрельбе из автомата в данном случае можно рассматривать как реактивную силу, создаваемую за счет отброса массы $m = 9$ г со скоростью $\upsilon = 800$ м/с за интервал времени $\Delta t = \frac{60}{300} = 0{,}2$ с. Тогда приравнивая количество движения $m\upsilon$ к импульсу $P\Delta t$ этой силы (или, что то же самое, используя второй закон Ньютона), получаем:

$$P = \frac{m\upsilon}{\Delta t} = \frac{0{,}009 \times 800}{0{,}2} = 36 \text{ Н}.$$

Ответ: 36 Н.

Краевая Политехническая олимпиада
для учащихся г. Перми и Пермского края. 2020 г. Заочный этап. 11 кл.

Задание 1. (6 б.) Если Иван при игре в боулинг использует шар с резиновым покрытием, то он сбивает все кегли с вероятностью 0,9, если использует шар с пластиковым покрытием – с вероятностью 0,2. В боулинге есть 10 шаров, из которых 4 с резиновым покрытием, остальные – с пластиковым. Найти вероятность того, что Иван не сумеет сбить все кегли случайно взятым шаром.

Решение. Обозначим за A событие – Иван сбил все кегли. В качестве гипотез возьмем: B_1 - шар с резиновым покрытием, B_2 - шар с пластиковым покрытием. По условию задачи $P\left(B_1\right)=0,4$, $P\left(B_2\right)=0,6$. Условные вероятности: $P_{B_1}\left(A\right)=0,9$, $P_{B_2}\left(A\right)=0,2$. Тогда полная вероятность события A:

$$P(A)=P\left(B_1\right)P_{B_1}\left(A\right)+P\left(B_2\right)P_{B_1}\left(A\right)=0,4\cdot 0,9+0,6\cdot 0,2=0,48,$$

$$P(\overline{A})=1-0,48=0,52.$$

Ответ: 0,52.

Задание 2. (8 б.) В некоторой стране подоходный налог начисляется следующим образом: с суммы, не превышающей 1000 денежных единиц (д.е.), взимается 15%, с дохода от 1000 до 2000 д.е. с первой тысячи взимается 15%, а с оставшейся суммы взимается 25%, если же доход превышает 2000 д.е., то с первой тысячи взимается 15%, со второй 25%, а с оставшейся суммы взимается 50%. Сколько процентов подоходного налога выплачивает гражданин этой страны, получающий после выплаты налога зарплату в 2600 денежных единиц?

Решение. Заметим, что, если после выплаты налога зарплата превышает 2000 денежных единиц, то до выплаты она тем более превышала 2000 единиц. Пусть зарплата до выплаты налога составляла $2000+x$ денежных единиц. Тогда сумма выплаченного налога равна

$$1000\cdot 0,15+1000\cdot 0,25+x\cdot 0,5=400+0,5x,$$

откуда получим:

$$2000+x=2600+400+0,5x \Leftrightarrow 0,5x=1000 \Leftrightarrow x=2000.$$

Таким образом, зарплата гражданина до выплаты налога составляла 4000 денежных единиц, сумма выплаченного налога – 1400 денежных единиц, а выплаченный налог составляет $\dfrac{1400}{4000}\cdot 100\%=35\%$ заработка.

Ответ: 35%.

Задание 3. (8 б.) Верхний конец тонкого однородного стержня закреплен шарнирно, а нижняя часть погружена в воду, причем равновесие достигается, когда стержень расположен наклонно и в воде находится две трети его длины. Какова плотность материала стержня?

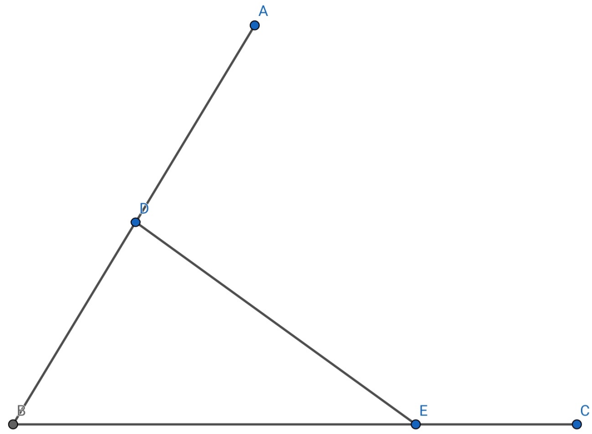
Решение. На стержень действуют направленные вниз силы тяжести $F=\rho gLS$, где ρ – искомая плотность стержня, g – ускорение свободного падения, а L и S – длина и площадь поперечного сечения стержня, и направленная вверх архимедова сила

$F_1 = \rho_1 g\left(\frac{2}{3}L\right)S$, где $\rho_1 = 1000$ кг/м^3 – плотность воды. Первая сила приложена в центре стержня, т.е. на расстоянии $L/2$ от его верхнего конца, а вторая – в середине погруженной части стержня, т.е. на расстоянии $\frac{2}{3}L$ от этого конца.

Равновесие стержня возможно, если эти силы создают относительно закрепленного шарнирно верхнего конца стержня равные по абсолютному значению, но противоположно направленные моменты, т.е. $F\left(\frac{L}{2}\right)\sin\alpha = F_1\left(\frac{2}{3}L\right)\sin\alpha$, где α – угол отклонения стержня от вертикали. Подставляя выражение для действующих сил, получаем $\rho = \frac{8}{9}\rho_1 \approx 889$ кг/м^3.

Ответ: $\rho \approx 889$ кг/м^3.

Задание 4. (10 б.) Из пункта *A* выходит автомобиль, а одновременно из пункта *B* – поезд. Автомобиль движется по направлению к *B* со скоростью 80 км/ч, поезд – по направлению к *C* со скоростью 50 км/ч. В какой момент времени (от начала движения) расстояние между поездом и автомобилем будет наименьшим, если *AB*=200 км? Считается, что движение равномерное и прямолинейное. $\angle ABC = 60°$.



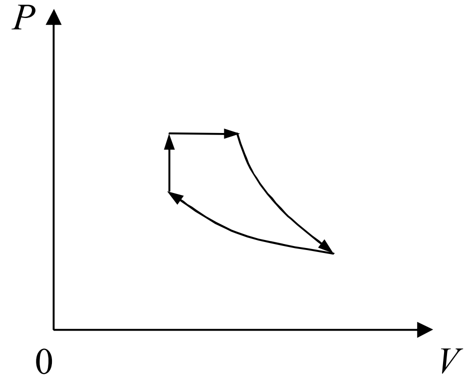
Решение. Пусть в момент времени t поезд автомобиль находится в точке *D*, а поезд – в точке *E* (см. рис.). Тогда расстояния $BD = 200 - 80t$, $BE = 50t$. Заметим, что автомобиль достигнет точки *B* через $\frac{200}{80} = 2{,}5$ часа. В ΔDBE по теореме косинусов получаем:

$$DE = \sqrt{BD^2 + BE^2 - 2BD\cdot BE\cos 60°} = \sqrt{BD^2 + BE^2 - BD\cdot BE} =$$
$$= \sqrt{(200-80t)^2 + (50t)^2 - (200-80t)\cdot 50t} = 10\sqrt{129t^2 - 420t + 400}.$$

Даная функция дает расстояние между автомобилем и поездом в зависимости от времени. Необходимо определить наименьшее значение этой функции при $t \in [0; 2{,}5]$. Поскольку корень является монотонной функцией, минимум достигается в вершине квадратичной функции $129t^2 - 420t + 400$, т.е. при $t_0 = \frac{420}{2\cdot 129} = \frac{70}{43} \approx 1{,}627$ ч.

Ответ: $\frac{70}{43} \approx 1,627$ ч.

Задание 5. (14 б.) Над идеальным одноатомным газом совершается цикл, состоящий из участков изобары, адиабаты, изотермы и изохоры (см. рис.). Известно, что в адиабатическом процессе газ совершает работу A, а в изохорном к нему подводится количество теплоты Q, КПД цикла равно η. Определите работу газа A_P и A_T и подведенное к нему количество теплоты Q_P и Q_T в изобарном и изотермическом процессе.



Решение. Рассмотрим последовательно участки.

$p = const$:

$$\begin{cases} Q_{12} \equiv Q_P = \Delta_{12}U + A_{12} \\ \Delta_{12}U = U_2 - U_1 = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) \\ A_{12} \equiv A_P = p(V_2 - V_1) = \nu R(T_2 - T_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_P = \frac{5}{2}A_P \\ A_P = \nu R(T_2 - T_1) \end{cases} \quad (1)$$

$Q = const$:

$$A_{23} \equiv A = -(U_3 - U_2) = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_3). \; (2)$$

$T = const$:

$$Q_{34} \equiv Q_T = A_{34} \equiv A_T. \; (3)$$

$V = const$:

$$A_{41} = 0, \; Q_{41} \equiv Q = \frac{3}{2}\nu R(T_4 - T_1) \; (4)$$

Заметим, что T_3 и T_4 равны (изотерма). Тогда, сложив (2) и (4), получим:

$$A + Q = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_4) + \frac{3}{2}\nu R(T_4 - T_1) = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) \Rightarrow A_P = \frac{2}{3}(A + Q),$$

КПД цикла есть отношение работы газа за цикл к подведенному теплу:

$$\eta = \frac{A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41}}{Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41}}.$$

С учетом введенных выше обозначений и выкладок получим:

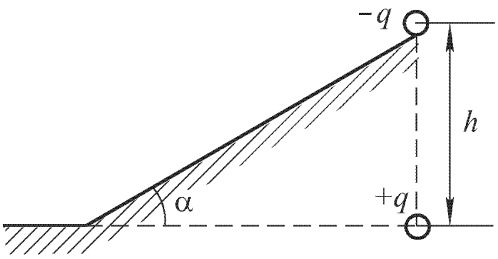
$$\eta = \frac{\frac{2}{3}(A+Q)+A+Q_T+0}{\frac{5}{3}(A+Q)+0+Q_T+Q} \Rightarrow Q_T = \frac{2Q}{1-\eta} - \frac{1}{3}(5A-8Q),$$

Таким образом:

$$A_P = \frac{2}{3}(A+Q), \quad Q_P = \frac{5}{3}(A+Q), \quad A_T = Q_T = \frac{2Q}{1-\eta} - \frac{1}{3}(5A-8Q).$$

Ответ: $A_P = \frac{2}{3}(A+Q), \quad Q_P = \frac{5}{3}(A+Q), \quad A_T = Q_T = \frac{2Q}{1-\eta} - \frac{1}{3}(5A-8Q).$

Задание 6. (14 б.) По гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, с высоты h без начальной скорости соскальзывает небольшое тело массы m, имеющее отрицательный заряд $-q$. В точке пересечения вертикали, проведенной через начальное положение тела, с основанием, закреплен заряд $+q$ (см. рис.). Определите скорость υ, которую будет иметь тело, когда оно достигнет основания плоскости.



Решение. Выберем в качестве нулевого уровня потенциальной энергии тела в поле тяготения Земли основание наклонной плоскости, а в качестве точки с нулевой потенциальной энергией притяжения зарядов – бесконечно удаленную точку.
Запишем закон сохранения механической энергии:

$$E_0 = E_к,$$

$$E_0 = \Pi_0 + K_0 = Mgh - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 h} + 0,$$

$$E_к = \Pi_к + K_к = 0 - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 h}\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{M\upsilon^2}{2},$$

где $\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 h}$ – потенциальная энергия электрического взаимодействия двух зарядов на расстоянии h друг от друга (знак «минус» учитывает разноименность зарядов), ε_0 – электрическая постоянная. Тогда:

$$Mgh - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 h} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 h}\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{M\upsilon^2}{2},$$

где ε_0 - электрическая постоянная.
Из данного уравнения можно выразить скорость тела:

$$\upsilon = \sqrt{2gh - \frac{q^2(1 - \operatorname{tg}\alpha)}{2\pi\varepsilon_0 Mh}},$$

при $h < \frac{q}{2}\sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{\pi\varepsilon_0 Mg}}$ тело не достигнет основания наклонной плоскости.

Ответ: $\upsilon = \sqrt{2gh - \frac{q^2(1 - \operatorname{tg}\alpha)}{2\pi\varepsilon_0 Mh}}$.