УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ МНОГОПРОФИЛЬНОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ
2023-2024 УЧЕБНЫЙ ГОД

8-9 класс

1. (1 балл) В футбольной команде из 11 человек, средний возраст составляет 25 лет. Один из участников команды, возраст, которого 30 лет, решил закончить карьеру, ему на смену пришел новый девятнадцатилетний игрок. Какой средний возраст участников команды стал после обновления состава?

   Решение: Раз средний возраст 11 участников команды -25 лет, то 275 лет – суммарный возраст всех членов команды. Когда ушел один из игроков, то сумма возрастов пяти оставшихся стала равна 245. (245+19):11=24 года.
   Ответ: 24 года.

2. (1 балл) Первая труба заполняет бассейн за 10 часов, вторая за 20 часов. Сколько процентов бассейна будет заполнено, если обе трубы будут работать один час?

   Решение: Работая вместе, две трубы заполняют $\frac{1}{10}+\frac{1}{20}=\frac{3}{20}$ *бассейна за час. Таким образом, будет заполнено 15 %.*
   Ответ: 15 %

3. (1 балл) Из деревни Анрюково в деревню Фролово ведет прямая дорога длинной 35 километров. Автобус Андрюково – Фролово останавливается в пунктах Барановка, Селянка, Демидово и Ельцово. Известно, что от Андрюково до Смирново 12 километров, от Барановки до Демидово – 11 километров, от Селянки до Ельцово – 12 километров, от Демидово до Фролово – 16 километров. Найдите расстояние от Ельцово до Фролово.

   Решение:
   Сделаем схематичный чертеж и найдем расстояния между точками.

   АБ=АФ-(БД+ДФ)=8 км
   ВС=АС-АВ=4 км
   СД=ВД-ВС=7 км
   ДЕ=СЕ-СД=5 км
   ЕФ=ДФ-ДЕ=11 км
   Ответ: 11 км

4. (2 балла) Решите уравнение:
   1-(2-(3-(...2021-(2022-(2023-x))...))) = 2023.

Решение: раскроем скобки 1-2+3-4+… …+2021-2022+2023+x=2023,

-1011+2023+x=2023, x=3035.

Ответ: x=3035.

5. (2 балла) Боковая сторона равнобедренного треугольника *ABC* равна 6, а основание *AC* равно 4. В этом треугольнике провели биссектрисы *AL* и *CM*. Найдите длину отрезка *LM*.

Решение: треугольники *AMC* и *ALC* равны по стороне и двум прилежащим углам. Следовательно, $AM = CL$. Тогда $BM = BL$, и треугольник *MBL* подобен треугольнику *ABC*, а потому $\angle BAC = \angle BML$. Следовательно, отрезки *ML* и *AC* параллельны, поэтому $\angle MLA = \angle MAL$. Значит, треугольник *AML* равнобедренный: $ML = AM$. Пусть $AM = ML = LC = x$. Из подобия треугольников *MBL* и *ABC* получаем:

$$\frac{BM}{AB} = \frac{ML}{AC} \leftrightarrow \frac{6 - x}{6} = \frac{x}{4}$$

откуда $x = 2{,}4$.

Ответ: 2,4.

6. (3 балла) Найдите значение выражения $\frac{5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{x}$ при $x > 0$.

Решение. Выполним преобразования:

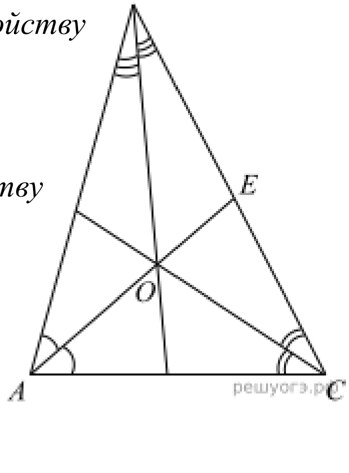
$$\frac{5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{5x+2\sqrt{x}-2\sqrt{x}}{x} = 5.$$

Ответ: 5.

7. (3 балла) Биссектрисы треугольника *ABC* пересекаются в точке *O*. Биссектриса *AE*, проведенная из вершины *A*, делится на отрезки *AO* и *OE*, отношение которых равно $\frac{15}{1}$, а сторона *BC* =18. Найдите периметр треугольника *ABC*.

Решение:



Рассмотрим треугольник ACE, CO — биссектриса, по свойству биссектрисы:

$$\frac{AO}{OE} = \frac{AC}{CE} \Leftrightarrow AC = 15CE$$

Рассмотрим треугольник ABE, BO — биссектриса, по свойству биссектрисы:

$$\frac{AO}{OE} = \frac{AB}{BE} \Leftrightarrow AB = 15BE$$

Складывая два получившихся равенства, получаем:

$$AB + AC = 15(CE + BE) = 15BC = 270$$

Таким образом, периметр треугольника ABC равен 288.

Ответ: 288

10-11 класс

1. (1 балл) Какое наибольшее число последовательных четных натуральных чисел, начиная с 2, можно сложить, чтобы получившаяся сумма была меньше 420?

Решение: Для ответа на вопрос задачи требуется найти такое наибольшее n, *что* *2+4+6+8…+*n *<1600. Рассмотрим арифметическую прогрессию с первым членом 2 и разностью 2. Сумма* n *первых членов арифметической прогрессии вычисляется по формуле:* $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}n,$ $S_n = \frac{4+(n-1)2}{2}n, S_n = (n+1)n.$

Получаем неравенство: $(n+1)n < 420$. *Решим уравнение* $(n+1)n = 420$, *тогда* n*=20 и* n*=-21. Таким образом, сумма 20 первых слагаемых будет равна 420. Тогда наибольшее число, удовлетворяющее условиям равно 19.*

Ответ: 19.

2. (1 балл) Боковая сторона равнобедренного треугольника *ABC* равна 6, а основание *AC* равно 4. В этом треугольнике провели биссектрисы *AL* и *CM*. Найдите длину отрезка *LM*.

Решение: треугольники *AMC* и *ALC* равны по стороне и двум прилежащим углам. Следовательно, $AM = CL$. Тогда $BM = BL$, и треугольник *MBL* подобен треугольнику *ABC*, а потому $\angle BAC = \angle BML$.Следовательно, отрезки *ML* и *AC* параллельны, поэтому $\angle MLA = \angle MAL$.Значит, треугольник *AML* равнобедренный: $ML = AM$. Пусть $AM = ML = LC = x$. Из подобия треугольников *MBL* и *ABC* получаем:

$$\frac{BM}{AB} = \frac{ML}{AC} \leftrightarrow \frac{6-x}{6} = \frac{x}{4}$$

откуда $x = 2{,}4$.

Ответ: 2,4.

3. (1 балл) Найдите значение выражения $\frac{5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{x}$ при $x > 0$.

Решение. Выполним преобразования:

$$\frac{5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}-\frac{2\sqrt{x}}{x}=\frac{5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}-\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{5x+2\sqrt{x}-2\sqrt{x}}{x}=5.$$

Ответ: 5.

4. (2 балла) Имеется два сплава. Первый сплав содержит 10% меди, второй — 40% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 3 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 30% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Решение. Пусть масса первого сплава m кг, а масса второго − $m+3$ *кг, масса третьего сплава −* $2m+3$ *кг. Первый сплав содержит 10% меди, второй − 40% меди, третий сплав − 30% меди. Тогда:*

$$0,1m+0,4(m+3)=0,3(2m+3)\Leftrightarrow\Leftrightarrow 0,5m+1,2=0,6m+0,9\Leftrightarrow m=3\Leftrightarrow 2m+3=9.$$

Таким образом, масса первого сплава равна 3 кг, тогда масса третьего сплава равна 9 кг.

Ответ: 9 кг.

5. (2 балла) Решите уравнение $\sqrt{x^3-5x^2-6x+12}=2+x$, в ответе укажите произведение всех корней.

Решение:

$$\sqrt{x^3-5x^2-6x+12}=2+x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2+x\geq 0,\\ x^3-5x^2-6x+12=(2+x)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 2,\\ x^3-5x^2-6x+12=4+4x+x^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 2,\\ x^3-5x^2-6x+12=4+4x+x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 2,\\ (x^2-2)(x-4)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x\leq 2,\\ \left[\begin{array}{l}x=4,\\ x=\sqrt{2},\\ x=-\sqrt{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{2},\\ x=-\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Ответ: -2.

6. (3 балла) Робот-исследователь, движущийся прямолинейно, во время первого измерения находился в 9 км к северу и 3 км к западу от научной станции, а во время второго измерения находился в 13км к северу и 6 км к западу от научной станции. Определите наименьшее расстояние, на которое робот-исследователь подъезжал к научной станции.

Решение. *Введём прямоугольную систему координат с началом координат в точке, где находится научная станция, ось абсцисс направим на восток, ось ординат — на север. Тогда в момент первого измерения робот находился в точке с координатами (-3;9), а во время второго измерения — в точке с координатами (-6; 13). По условию, робот двигается прямолинейно. Пусть эта прямая задана уравнением* $y = kx + b$. *Найдём коэффициенты* k *и* b *в уравнении этой прямой.*

Таким образом, уравнение прямой $y = -\frac{4}{3}x + 5$. *Тогда наименьшее расстояние, на которое робот приблизится к научной станции, будет равно расстоянию от точки (0;0) до прямой.*

$\rho = \frac{|4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 15|}{\sqrt{4^2 + 3^2}}$*=3 км.*

Ответ: 3км.

7. (3 балла) Гроссмейстер, на шахматном турнире проиграл 40% партий. После перерыва, выиграл 10 партий подряд, и процент проигранных партий стал равен 30. Какое наименьшее количество партий он должен выиграть, после второго перерыва, чтобы процент проигранных снова составил 40?

Решение:

Пусть сначала гроссмейстер сыграл n *партий, из которых он выиграл 0,6*n*.*

Составим уравнение: $\frac{0{,}6n+10}{n+10} = 0{,}7$. *Решением этого уравнения является* n*=30. Таким образом, перед вторым перерывом он сыграл 40 партий. Из которых выиграл 28. Пусть он должен сыграть еще x партий, из которых выиграть y.*

$\frac{28+y}{40+x} = 0{,}6$. *Так как x и y натуральные числа, то значение x, должно быть кратно пяти. Переберем натуральные значения x, кратные пяти. Наименьшее подходящее – 10, тогда y=2.*

Ответ: 2 партии