

Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ учащихся  
«Прикладные вопросы математики»

Математическое моделирование

## **Анализ временного сигнала системы Лоренца**

Антипов Вадим Валерьевич  
МОУ «Лицей №1» г. Перми, 11 кл.

Волегов Павел Сергеевич  
к.ф.-м.н., доц. каф. ММСП  
ПНИПУ

Пермь  
2011

## Содержание

Введение.....	3
Глава 1. Система Лоренца .....	4
Глава 2. Методы решения систем дифференциальных уравнений.....	5
Глава 3. Методы обработки результатов .....	9
Глава 4. Характерные решения системы Лоренца.....	11
Выводы .....	16
Литература .....	17

## Введение

В середине XX века система Лоренца (маломодовая модель конвекции [1]) стала одной из наиболее известных динамических систем, иллюстрирующих переход к хаосу и возникновение странных аттракторов. Эта модель была создана на основе задачи Релея о конвективной устойчивости подогреваемого снизу горизонтального слоя несжимаемой жидкости.

Например, в слое воды 1 м при подогреве снизу неустойчивость возникает уже при вертикальной разности температуры величиной  $10^{-7}$  градуса, в слое толщиной 1 сантиметр критическая разность температуры равна 0.1 градуса, а слой воды толщиной 1 миллиметр практически абсолютно устойчив. Именно в подогреваемом снизу горизонтальном слое жидкости со свободной верхней границей Бенар обнаружил возникновение после превышения критического градиента температуры гексагональных структур, получивших название ячеек Бенара (рис. 1).

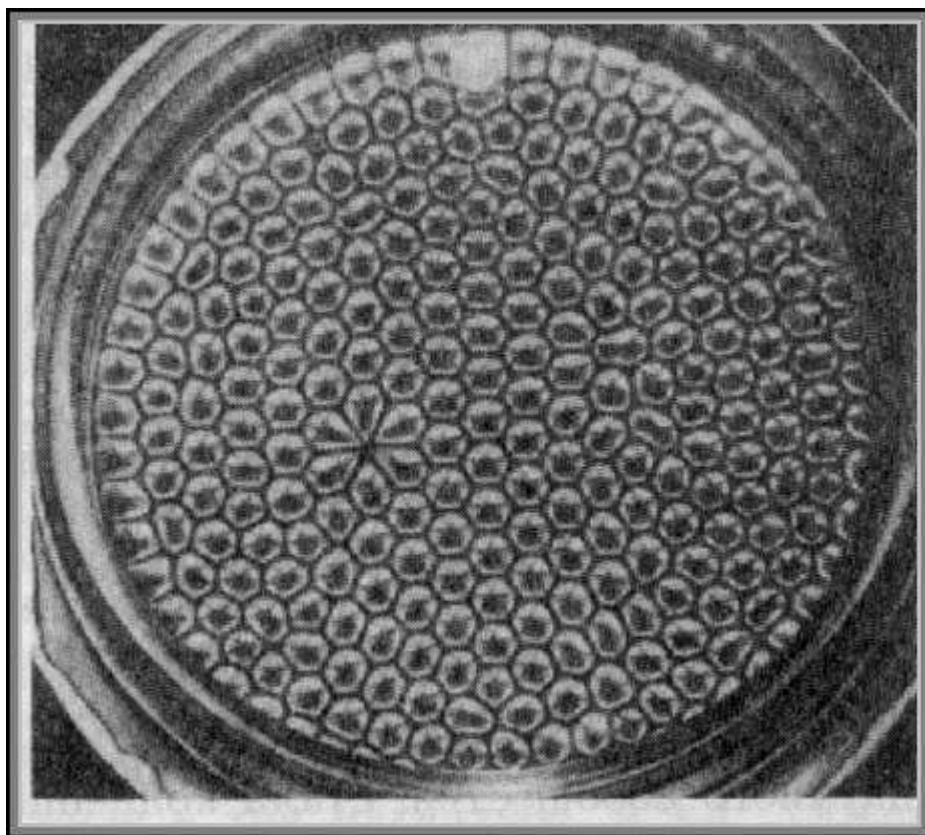


Рис. 1 Ячейки Бенара

Хаос в динамических системах во многом связан с турбулентностью, одним из наиболее сложных объектов исследования механики жидкости и га-

за. Турбулентность до сих пор остается неисследованным до конца явлением, что обеспечивает **актуальность** любых исследований в этом направлении.

**Целью работы** является попытка полного описания поведения системы Лоренца при различных значениях параметров модели.

Для достижения цели исследования нам необходимо решить следующие **задачи**:

- выбрать численный метод для решения системы Лоренца;
- на основе Фурье- и вейвлет-анализа временного сигнала выделить основные типы поведения системы;
- выявить критерий определения поведения системы;
- построить цветовые карты, описывающие распределение характерных решений системы в зависимости от значений параметров модели.

## **Глава 1. Система Лоренца**

В 1900 году была опубликована статья французского исследователя Бенара с фотографией структуры, по виду напоминавшей пчелиные соты. При нагревании снизу слоя ртути, налитой в плоский широкий сосуд, весь слой неожиданно распадался на одинаковые вертикальные шестигранные призмы, которые впоследствии были названы ячейками Бенара.

Нелинейные уравнения, которыми описывается образование и разрушение структур Бенара, называются уравнениями Лоренца. Эдвард Лоренц в 1963 году исследовал решение уравнений, которые служат математической моделью конвективного движения в газах и жидкостях. Они получены в результате обезразмеривания уравнений течения жидкости. Они связывают между собой координаты фазового пространства: скорости потоков в слое, температуру и управляющий параметр. Их решение может быть проведено лишь численно, с помощью компьютеров. Система Лоренца – система трех нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{X} = \sigma X + \sigma Y, \\ \dot{Y} = -XZ + rX - Y, \\ \dot{Z} = XY - bZ, \end{cases} \quad (1)$$

где точкой обозначена производная по безразмерному времени. Рассмотрим подробнее физический смысл коэффициентов этой системы:

1.  $\sigma = \frac{\nu}{\chi}$  – число Прандтля, зависящее от свойств жидкости: от вязкости и температуропроводности, чем больше температуропроводность, тем меньше число Прандтля.
2.  $b = \frac{4}{(1+a)^2}$ , где  $a$  – отношение геометрических размеров.
3.  $r = \frac{R}{R_c}$  – внешний управляющий параметр, где  $R = \frac{g\beta\theta L^3}{\nu\chi}$  – число Релея (пропорционально архимедовой силе и обратно пропорционально вязкости и температуропроводности),  $R_c = \frac{\pi^4(a^2+n^2)^3}{a^2}$  – критическое значение числа Релея.

## Глава 2. Методы решения систем дифференциальных уравнений

В данном разделе рассматриваются вопросы, связанные с численным решением систем обыкновенных дифференциальных уравнений, т.к. система Лоренца не имеет аналитического решения, поэтому приходится решать ее численно.

Методы решения дифференциальных уравнений условно классифицируются по следующему признаку:

- точное решение, позволяющее представить искомую функцию в элементарных функциях;
- приближенные решения, в которых точное решение получается как предел некоторой последовательности; в этом случае, как правило, ис-

пользуются разложения искомой функции в ряды Тейлора, Фурье и так далее;

- численные решения, когда искомая функция определяется для конечного числа значений аргумента в узлах разностной сетки [2].

Для решения нашей системы мы рассматривали методы Эйлера и Рунге-Кутты.

### Метод Эйлера

Пусть для отрезка  $[a, b]$ , на котором ищется решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)), \quad 0 < x \leq T, \quad y(0) = y_0, \quad (2)$$

построена сеточная область  $\Omega_n = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  с постоянным шагом  $h$ . Для построения решения уравнения (2) воспользуемся разложением искомой функции  $y(x)$  в ряд Тейлора вблизи произвольной точки  $x_k \in \Omega_n$ :

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k) \cdot h + \dots \quad (3)$$

Учитывая, что согласно уравнению (2)  $y'(x_k) = f(x_k, y(x_k))$ , это разложение решения можно записать в виде

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + f(x_k, y(x_k)) \cdot h + \dots \quad (4)$$

С помощью полученного выражения построим вычислительный процесс

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot h, \quad k = 1, 2, \dots, \quad y_0 = y(0). \quad (5)$$

### Метод Рунге-Кутты

Для построения разностной схемы интегрирования воспользуемся разложением решения задачи (2) в ряд Тейлора:

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k) \cdot h + y''(x_k) \cdot \frac{h^2}{2} + \dots \quad (6)$$

Заменим вторую производную в этом разложении выражением

$$y''(x_k) = (y'(x_k))' = f'(x_k, y(x_k)) \approx \frac{f(\tilde{x}, \tilde{y}) - f(x_k, y(x_k))}{\Delta x}, \quad (7)$$

где  $\tilde{x} = x_k + \Delta x$ ,  $\tilde{y} = y(x_k + \Delta x)$ , причем  $\Delta x$  подбирается из условия достижения наибольшей точности записанного выражения. Для дальнейших выкладок произведем замену величины  $\tilde{y}$  разложением в ряд Тейлора

$$\tilde{y} = y(x_k + \Delta x) = y(x_k) + y'(x_k) \cdot \Delta x + \dots \quad (8)$$

Для исходного уравнения (2) построим вычислительную схему:

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot h + \frac{h^2}{2\Delta x} (f(x_k + \Delta x, y_k + y'_k \Delta x) - f(x_k, y_k)), \quad (9)$$

которую преобразуем к виду

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h \left[ \left(1 - \frac{h}{2\Delta x}\right) \cdot f(x_k, y_k) + \frac{h}{2\Delta x} f(x_k + \Delta x, y_k + y'_k \cdot \Delta x) \right] = \\ &= y_k + h \left[ \left(1 - \frac{h}{2\Delta x}\right) \cdot f(x_k, y_k) + \frac{h}{2\Delta x} f\left(x_k + \frac{\Delta x}{h} h, y_k + f(x_k, y_k) \frac{\Delta x}{h} h\right) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

Введем обозначения:

$$\alpha = \frac{h}{2\Delta x}, \quad \beta = 1 - \frac{h}{2\Delta x}, \quad \gamma = \frac{\Delta x}{h}, \quad \delta = f(x_k, y_k) \frac{\Delta x}{h}, \quad (11)$$

которые позволяют записать предыдущее выражение в форме

$$y_{k+1} = y_k + h[\beta \cdot f(x_k, y_k) + \alpha \cdot f(x_k + \gamma \cdot h, y_k + \delta \cdot h)]. \quad (12)$$

Очевидно, что все введенные коэффициенты зависят от величины  $\Delta x$  и могут быть определены через  $\alpha$ , который в этом случае играет роль параметра,

$$\beta = 1 - \alpha, \quad \gamma = \frac{1}{2\alpha}, \quad \delta = f(x_k, y_k) \frac{2}{\alpha}. \quad (13)$$

При  $\alpha = 0$  получаем как частный случай уже известную схему Эйлера

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k). \quad (14)$$

При  $\alpha = 1$  выражение (2) записывается в форме

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} \cdot f(x_k, y_k)\right). \quad (15)$$

В этом случае проведение расчетов на очередном шаге интегрирования можно рассматривать как последовательность следующих операций:

1. Вычисляется выражение

$$y_{k+1/2} = y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k), \quad (16)$$

представляющее собой *полушаг* интегрирования по схеме Эйлера, то есть определяется приближенное значение искомой функции в точке  $x_k + \frac{h}{2}$ .

2. Для той же промежуточной точки определяется приближенное значение производной

$$y'_{k+1/2} = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_{k+1/2}\right). \quad (17)$$

3. Определяется уточненное значение функции в конечной точке всего шага, причем по схеме Эйлера с вычисленным на предыдущем шаге значением производной,



$$y_{k+1} = y_k + h \cdot y'_{k+1/2}. \quad (18)$$

Геометрические построения показывают, что получаемое в такой последовательности решение лежит “ближе” к истинному, чем вычисляемое по схеме Эйлера, то есть следует ожидать более высокой точности решения, получаемого методом Рунге-Кутты.

Окончательно схема Рунге-Кутты принимает вид

$$y_{k+1} = y_k + h \left[ (1 - \alpha)f(x_k, y_k) + \alpha \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2\alpha}, y_k + \frac{h}{2\alpha} f(x_k, y_k)\right) \right]. \quad (19)$$

Схемы Рунге-Кутты, имеющие *четвертый* порядок аппроксимации:

$$\begin{cases} K_1 = f(x_k, y_k), \\ K_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_1\right), \\ K_3 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_2\right), \\ K_4 = f(x_k + h, y_k + hK_3), \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4). \end{cases} \quad (20)$$

В нашей программе реализован метод Рунге-Кутты четвертого порядка аппроксимации, т.к. более высокая степень аппроксимации дифференциального уравнения разностным аналогом позволяет получать более точное решение при более крупном шаге и, следовательно, меньшем числе шагов, то есть приводит к снижению требуемых ресурсов ЭВМ.

### Глава 3. Методы обработки результатов

После получения результатов (в т.ч. фазовых траекторий) необходимо определить, являются ли они примерами хаотического или же упорядоченного (возможно очень сложного) движения. Сделать это визуально (по виду фазовых траекторий) зачастую очень сложно, а иногда

просто невозможно. Поэтому для установления характера движения используют так называемый Фурье-анализ при проведении которого для каждой из переменных строится спектр Фурье. Для построения спектра необходимо использовать формулу:

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt, \quad (21)$$

где  $i$  – мнимая единица. Так как  $\hat{f}(\nu)$  является функцией комплекснозначной, то удобнее использовать так называемый энергетический спектр:

$$F_n(\nu) = |\hat{f}(\nu)|^2. \quad (22)$$

Так как имеется дискретный набор значений, то, применяя теорему Котельникова, из (21) получим:

$$\hat{f}_n = \sum_{m=1}^N f_m e^{-\frac{2\pi i m n}{N}} \quad (23)$$

или

$$\hat{f}_n = \sum_{m=1}^N f_m \cos(2\pi \frac{mn}{N}) - i \sum_{m=1}^N f_m \sin(2\pi \frac{mn}{N}) \quad (24)$$

а из (22):

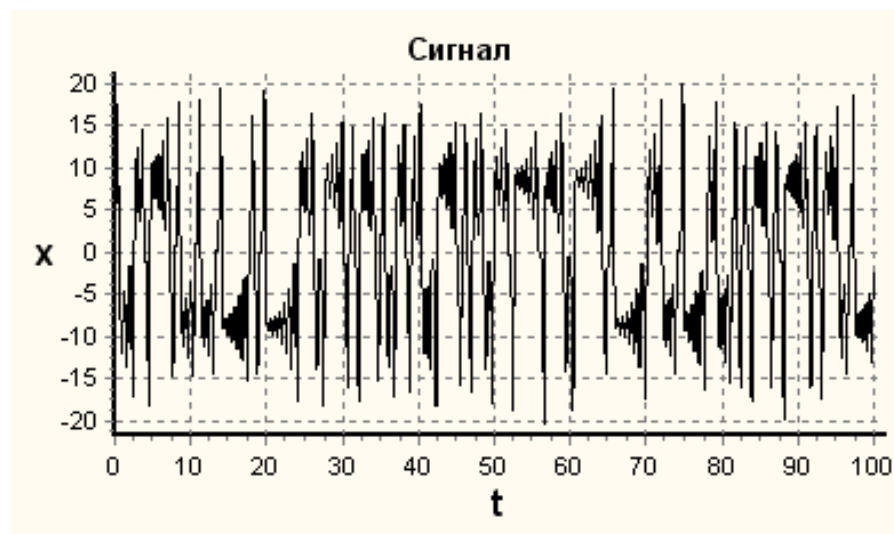
$$F_n = \left( \sum_{m=1}^N f_m \cos(2\pi \frac{mn}{N}) \right)^2 + \left( \sum_{m=1}^N f_m \sin(2\pi \frac{mn}{N}) \right)^2. \quad (25)$$

Обычно  $N$  берется как степень числа 2 (например,  $1024 = 2^{10}$ ) и эти  $N$  значений берутся из области установившегося движения.

После построения энергетических спектров задача об определении характера поведения системы значительно упрощается. В случае детерминированного движения спектр имеет вид одиночных гармонических всплесков, появление непрерывных участков спектра говорит о хаотическом решении.

## Глава 4. Характерные решения системы Лоренца

Для решения системы уравнений Лоренца был использован метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности (20). Для установления характера поведения сигнала был использован метод Фурье (25). При визуальном исследовании спектра удалось выявить три типа поведения решений системы: хаотический (рис. 2), стационарный (рис. 3) и сходный с хаотическим, но несколько иного вида сигнал, который будем называть квазихаотическим (рис.4).

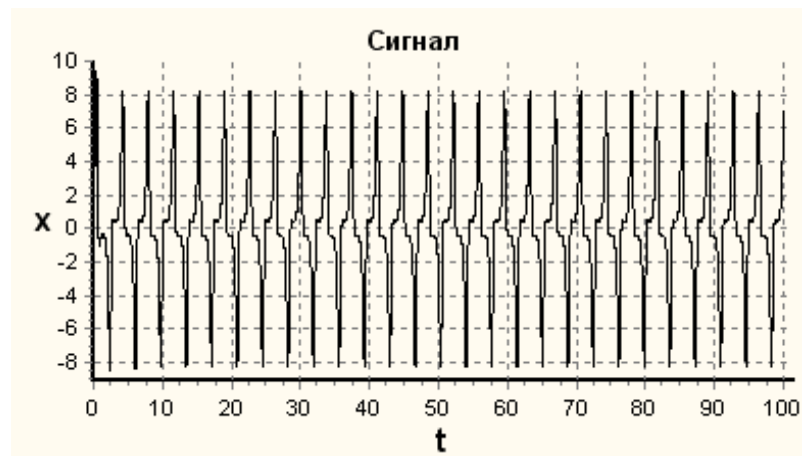


а

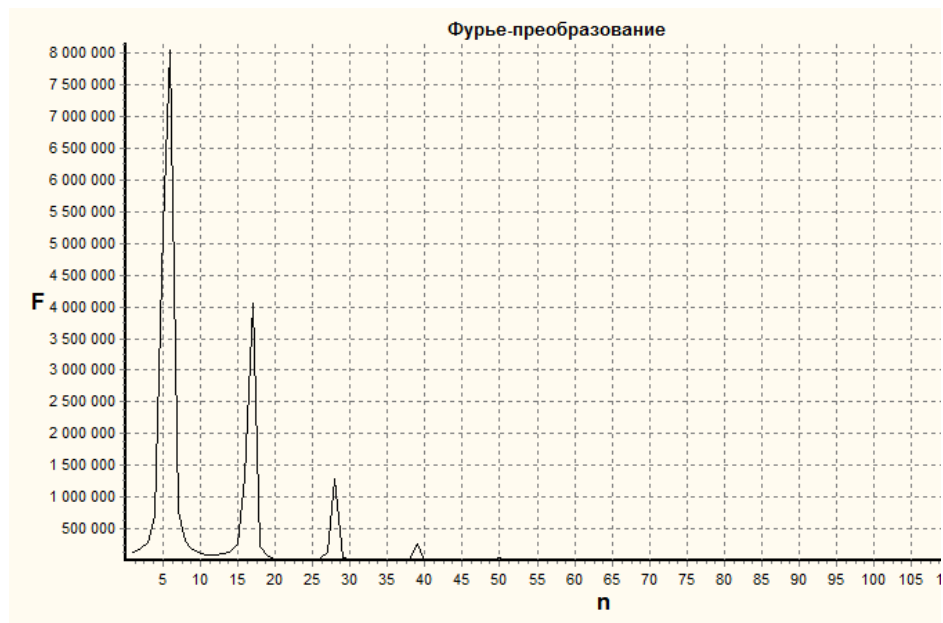


б

Рис.2 Характерный вид сигнала (а) и спектра (б) при хаотическом решении ( $\sigma=10,5$ ,  $r=16,5$ ,  $b=2,6666$ )

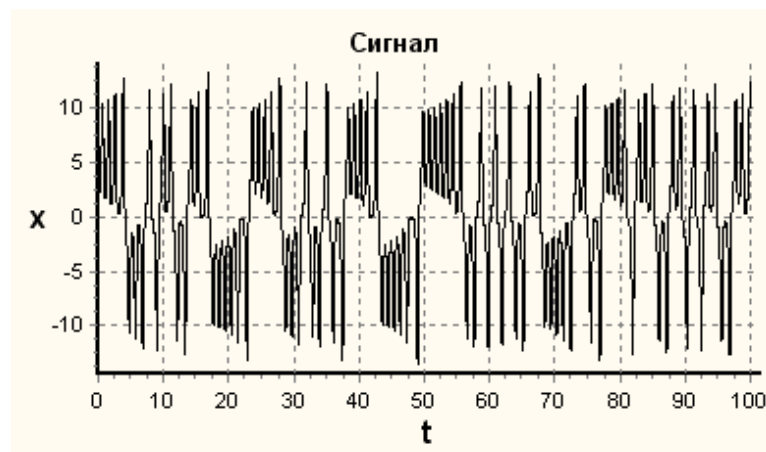


а

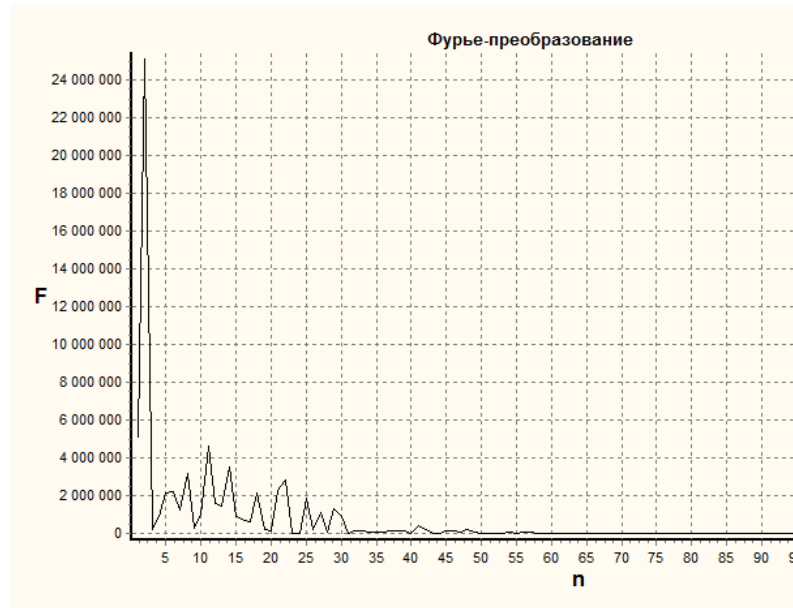


б

Рис.3 Характерный вид сигнала (а) и спектра (б) при стационарном решении ( $\sigma=12$ ,  $r=25$ ,  $b=0,5$ )



а



б

Рис.4 Характерный вид сигнала (а) и спектра (б) при квазихаотическом решении ( $\sigma=10,5$ ,  $r=16,5$ ,  $b=2,6666$ )

На спектре фурье-преобразования квазихаотического сигнала (рис. 4, б) присутствуют «всплески», близкие к «всплескам» фурье-образа стационарного сигнала. Для проверки присутствия в квазихаотическом типе сигнала неких периодов и закономерностей был использован непрерывный вейвлет-анализ. Его преимущество перед Фурье-преобразованием в том, что оно позволяет проследить за изменением спектральных свойств сигнала со временем, указать какие частоты (масштабы) доминируют в данном сигнале в каждый конкретный момент времени. Для построения вейвлет-образов сигнала был использован математический пакет MatLab R2010a.

В качестве основного вейвлета был выбран вейвлет Морле (рис. 5) – комплексная функция вида

$$\psi(t) = e^{-t^2/2} e^{i\omega_0 t}. \quad (26)$$

Данный вейвлет выбран потому, что он относительно простой и при этом дает хорошее спектральное разрешение, а также потому, что один раз выбранная частота  $\omega_0$  для анализирующего вейвлета и заданное тем самым

число осцилляций позволяет в дальнейшем сжимать или растягивать функцию как единое целое, не нарушая подобия отдельных функций семейства.

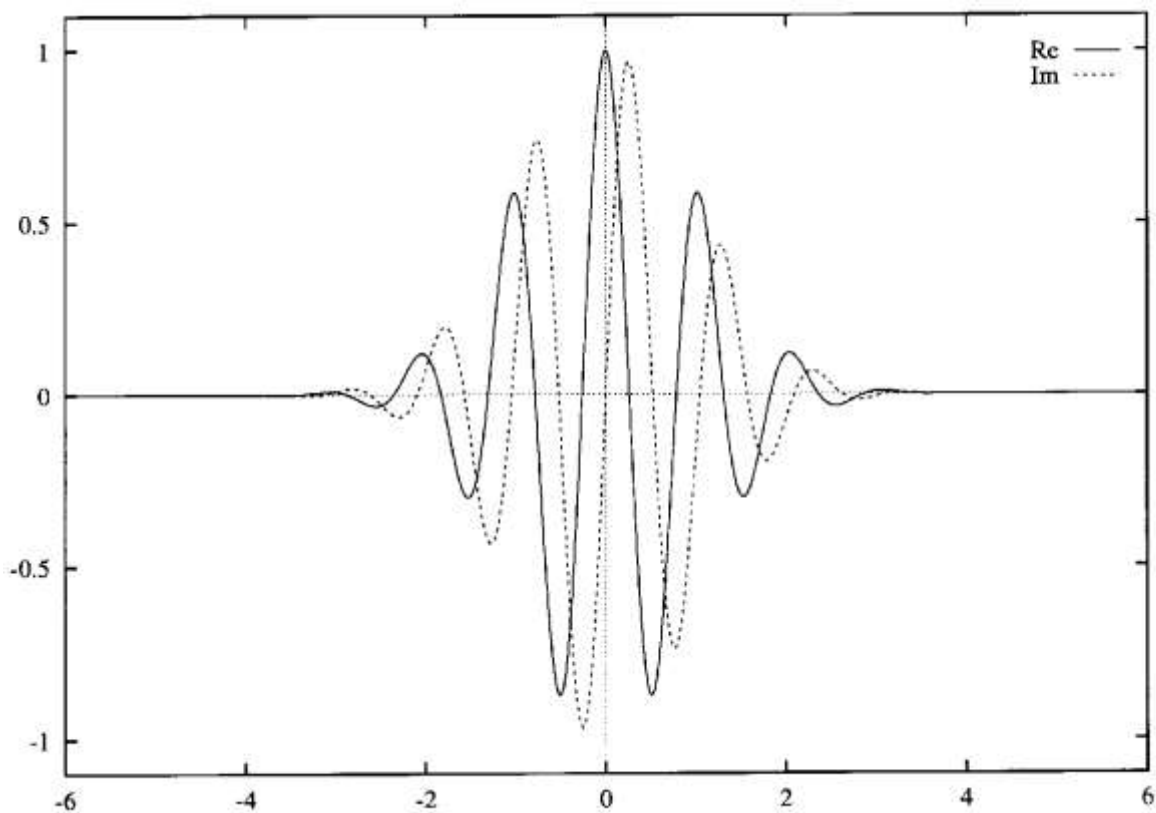


Рис. 5 Вейвлет Морле

Полученные в результате вейвлет-преобразования спектры трех приведенных сигналов показали следующие результаты: полностью хаотический, не имеющий периода сигнал в первом случае (рис. 6) и четкий стационарный, периодический сигнал во втором (рис. 7). В случае так называемого квазихаотического сигнала проявлялись некоторые периоды в сигнале, похожие друг на друга, но все-таки существенно ближе к соответствующему вейвлет-образу хаотического сигнала (рис. 8). При рассмотрении более длительного сигнала (со 100 до 10000 секунд) данного квазихаотического сигнала сигнала это подтвердилось (рис. 9).

В результате были выделены три типа поведения решений системы Лоренца: стационарный, хаотический и квазихаотический, который хоть и имеет некоторую схожесть со стационарным типом поведения решений системы Лоренца, но на самом деле ближе к хаотическому.



Рис. 6 Спектр вейвлет-преобразования  $\sigma=10$ ,  $r=30$ ,  $b=2,6666$

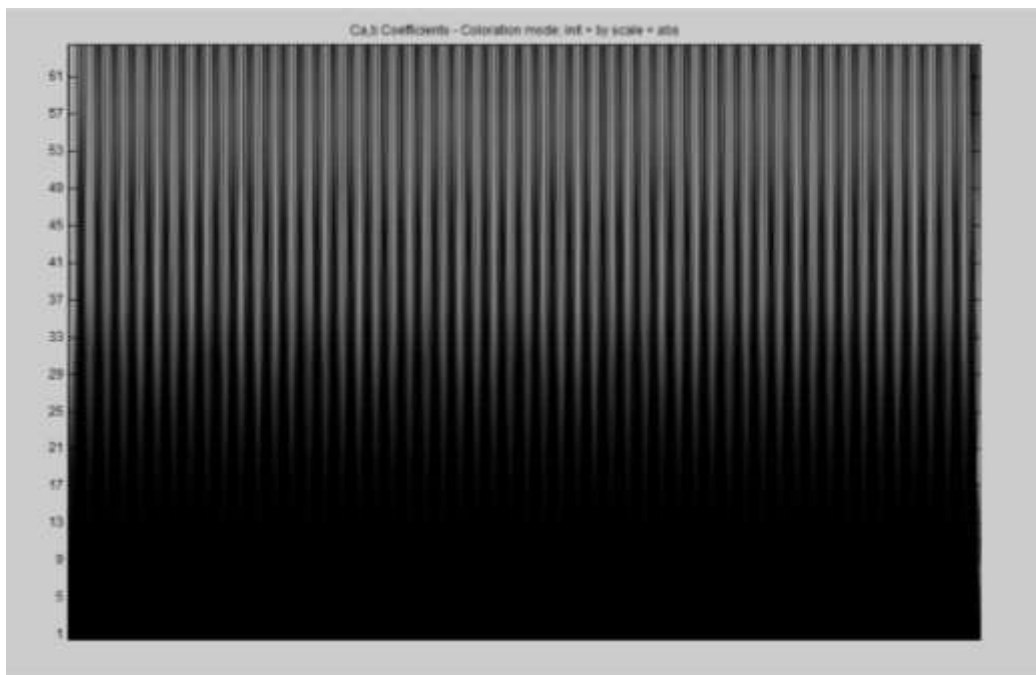


Рис. 7 Спектр вейвлет-преобразования  $\sigma=12$ ,  $r=25$ ,  $b=0,5$



Рис. 8 Спектр вейвлет-преобразования  $\sigma=10,5$ ,  $r=16,5$ ,  $b=2,6666$

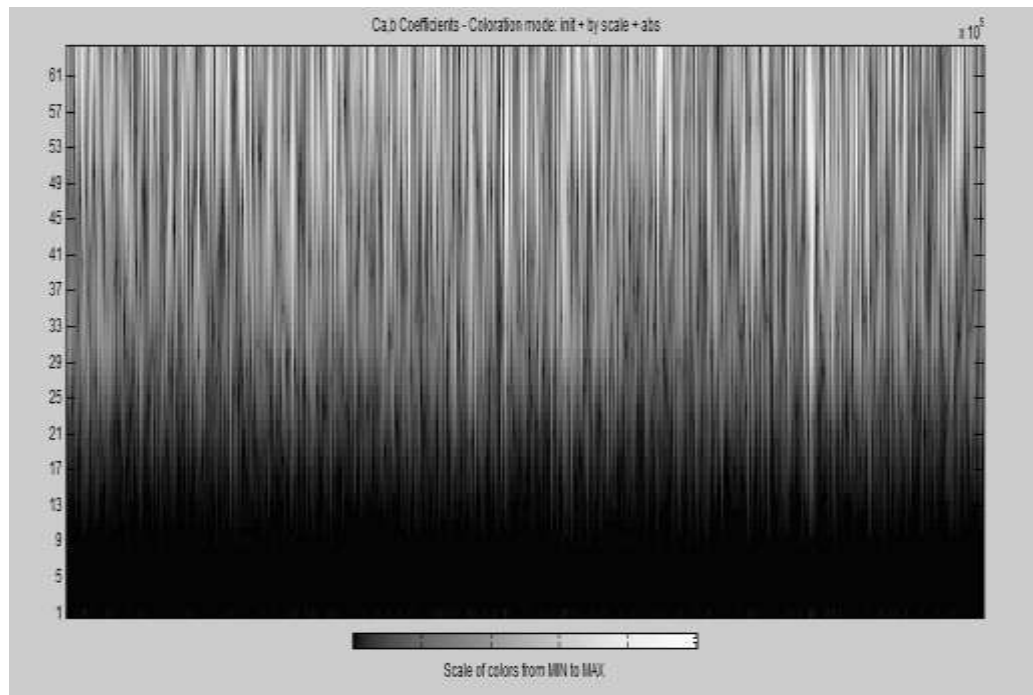


Рис. 9 Продленный со 100 до 10000 секунд спектр вейвлет-преобразования  
 $\sigma=10,5$ ,  $r=16,5$ ,  $b=2,6666$

## Выводы

В работе представлено исследование системы Лоренца (маломодовой модели конвекции). Для решения системы выбран численный метод Рунге-Кутты, так как данная система не решается аналитически. Для обработки по-



лучаемых временных сигналов  $x(t)$  использованы Фурье- и вейвлет-анализ. Визуально выделены три основных типа поведения решений системы Лоренца: хаотический, квазихаотический, стационарный.

### **Литература**

1. Фрик П.Г. Турбулентность: модели и подходы. – Пермь: Изд-во ПГТУ, – 1998. – 108 с.
2. Бояршинов М.Г. Численные методы. – Пермь: Изд-во ПГТУ, – 1998. – 176 с.
3. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. – М: ДМК Пресс, 2005. – 304 с.