Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ учащихся
«Прикладные вопросы математики»

Математическое моделирование

Численное решение уравнения нестационарной теплопроводности

Бабиков Артем
МОУ «Лицей №1» г. Перми, 11 кл.
Волегов П.С., к.ф.-м.н., доц.

Оглавление

Введение

Проблема теплопроводности актуальна в современном мире. Она актуальна как в быту, так и в промышленности. Я выбрал эту тему, потому что я хочу узнать, какую роль теплопроводность играет в нашем мире. Почему, когда сковородку ставишь на огонь, то через некоторое время её ручка тоже очень сильно нагрета?! Исторически считалось, что передача тепловой энергии связана с перетеканием теплорода от одного тела к другому. Однако более поздние опыты, в частности, нагрев пушечных стволов при сверлении, опровергли реальность существования теплорода как самостоятельного вида материи. Соответственно, в настоящее время считается, что явление теплопроводности обусловлено стремлением занять состояние более близкое к термодинамическому равновесию, что выражается в выравнивании температуры.

С помощью программы, задав первоначальные условия для металлической пластины, мы узнаем, как распределяется тепло по ней. Я предполагаю, что у каждого вещества своя теплопроводность. Какие-то вещества лучше проводят тепло, какие-то хуже.

Определение теплопроводности

Теплопроводность (не путать с термическим сопротивлением и температуропроводностью) — это перенос теплоты структурными частицами вещества (молекулами, атомами, электронами) в процессе их теплового движения. Такой теплообмен может происходить в любых телах с неоднородным распределением температур, но механизм переноса теплоты будет зависеть от агрегатного состояния вещества. Явление теплопроводности заключается в том, что кинетическая энергия атомов и молекул, которая определяет температуру тела, передаётся другому телу при их взаимодействии или передаётся из более нагретых областей тела к менее нагретым областям. Иногда теплопроводностью называется также количественная оценка способности конкретного вещества проводить тепло.

Для теплопроводности требуется физический контакт между телами. Следовательно, данный способ применим только к телам и неподвижным жидкостям. Контакт позволяет кинетической энергии физически перейти от молекул более теплого вещества к более холодному. Это происходит благодаря тому, что молекулы с более высокой энергией более теплого тела сталкиваются с молекулами более холодного тела. Такой обмен происходит при прикосновении тел друг к другу. При столкновении колебания молекул более теплого тела становятся менее интенсивными, тогда как интенсивность колебания молекул более холодного тела увеличивается.

Обратите внимание, что молекулы более теплого тела не проникают в более холодное. Если бы это произошло, то это была бы массопередача. Часть кинетической энергии передается молекулам более холодного тела. Когда уровень кинетической энергии более теплого тела уменьшается, его температура также понижается. И если уровень кинетической энергии более холодного тела увеличивается, его температура повышается. Данная передача энергии продолжится до тех пор, пока тела не достигнут теплового равновесия. В этой точке температура обоих тел выравнивается, и теплопередача прекращается. Теплопроводность также происходит через тело, если существует разница температур на различных участках его поверхности, или в жидкости, если ее участки различной температуры.

У некоторых веществ теплопроводность лучше, чем у других. Железо, медь, серебро, золото и подобные металлы — хорошие проводники. Они передают теплоту намного интенсивнее, чем такие материалы, как пробка, асбест, керамика и древесина. Повышение интенсивности теплопередачи происходит из-за того, что у этих материалов два способа передачи кинетической энергии. Кроме способа, описанного в предыдущем абзаце, эти материалы также передают теплоту при помощи свободных электронов. Свободные электроны — это электроны, которые освобождаются с орбит атомов при поглощении достаточного количества тепловой или электрической энергии. Такие электроны свободно движутся сквозь материал и отдают дополнительную кинетическую энергию при столкновении с другими электронами.

В процессе передачи энергии по материалу они отдают всю дополнительную кинетическую энергию и снова притягиваются на орбиту атома, который также отдал свободный электрон. Так как свободных электронов очень много они довольно активно участвуют в процессе передачи энергии в материале. И наоборот, диэлектрики проводят энергию только колебаниями молекул к смежным молекулам. Стекло, древесина, пробка и другие диэлектрики не отдают свободные электроны.

Относительную способность материала проводить теплоту называют теплопроводностью. Теплопроводность — это количество энергии, которое проходит через одну квадратную единицу (метр2) материала в одну единицу (метр) толщиной за один час при разнице температур в один градус (°C).

В установившемся режиме поток энергии, передающейся посредством теплопроводности, пропорционален градиенту температуры:

$$\vec{q} = -\varkappa \operatorname{grad}(T),$$

где $\vec{q}$ — вектор потока тепла — количество энергии, проходящей в единицу времени через единицу площади, перпендикулярной каждой оси, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности (иногда называемый просто теплопроводностью), T — температура. Это выражение известно как закон теплопроводности Фурье.

В интегральной форме это же выражение запишется так (если речь идёт о стационарном потоке тепла от одной грани параллелепипеда к другой):

$$P = -\varkappa \frac{S \Delta T}{h},$$

где P — полная мощность тепловых потерь, S — площадь сечения параллелепипеда, ΔT — перепад температур граней, h — длина параллелепипеда, то есть расстояние между гранями.

Коэффициент теплопроводности измеряется в Вт/(м·K).

Уравнения параболического типа

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x), \tag{5.13}$$

с краевыми условиями

$$\begin{cases} u(0,x) = U(x); \\ u(t,0) = U_0(t), \quad u(t,L) = U_L(t), \end{cases} \tag{5.14}$$

описывающее процессы теплопроводности (η играет роль коэффициента температуропроводности) в тонком однородном стержне, либо диффузии (η - коэффициент диффузии).

Трехслойная схема Ричардсона

Для уравнения (5.13) разностный аналог с использованием пятиточечного шаблона (рис. 5.4) записывается в виде:

$$\frac{\overset{+}{u}_j - \overset{-}{u}_j}{2\tau} = \eta \frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{h^2} + f_j. \tag{5.16}$$

Для оценки устойчивости этой разностной схемы воспользуемся методом Неймана. Предполагая, как и ранее, справедливым разложение возмущения в ряд Фурье, для k-гармоники

$$\left(\delta u_j^{n-1}\right)^{(k)} = \left(\rho_k\right)^{n-1} a_k e^{ikx_j}, \quad \left(\delta u_j^{n}\right)^{(k)} = \left(\rho_k\right)^{n} a_k e^{ikx_j}, \quad \left(\delta u_j^{n+1}\right)^{(k)} = \left(\rho_k\right)^{n+1} a_k e^{ikx_j}$$

получаем (рассматривается возмущение только начальных данных; правая часть уравнения неизменна):

$$\frac{1}{2\tau}\left(\left(\rho_k\right)^{n+1} - \left(\rho_k\right)^{n-1}\right)e^{ikx_j} = \left(\rho_k\right)^{n} \frac{\eta}{h^2}\left(e^{ik(x_j-h)} - 2e^{ikx_j} + e^{ik(x_j+h)}\right),$$

$$\rho_k^2 - \rho_k \frac{2\tau\eta}{h^2}\left(e^{-ih} - 2 + e^{ih}\right) - 1 = 0.$$

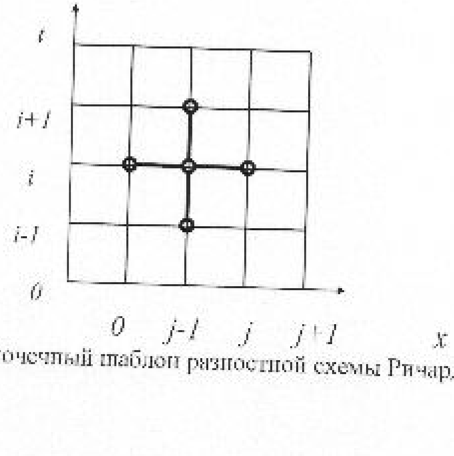


Рис. 5.4. Пятиточечный шаблон разностной схемы Ричардсона

Вспоминая формулу Эйлера, приходим к выражению

$$\rho_k^2 + \rho_k \frac{8\tau\eta}{h^2} sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) - 1 = 0 .$$

Корни этого квадратного уравнения

$$\rho_k = -\frac{4\tau\eta}{h^2} sin^2\left(\frac{kh}{2}\right) \pm \sqrt{\frac{16\tau^2\eta^2}{h^4} sin^4\left(\frac{kh}{2}\right) + 1}$$

вещественные, различные. Поскольку произведение корней

$$\left|(\rho_k)_1 (\rho_k)_2\right| = 1 ,$$

можно сделать вывод о том, что один из них превышает единицу. По согласно формулировке теореме 4.5 это означает *неустойчивость* разностной схемы (5.16).

Многомерные уравнения

Обратимся к дифференциальному уравнению параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(t,x,y), \quad (t,x,y) \in G \tag{5.19}$$

на прямоугольнике

$$G = [0 \le t \le T] \times [0 \le x \le L] \times [0 \le y \le H]$$

с краевыми условиями

$$\begin{cases} u(0,x,y) = U_0(x,y) ; \\ u(t,0,y) = U_1(t,y), \quad u(t,L,y) = U_2(t,y) ; \\ u(t,x,0) = U_3(t,x), \quad u(t,x,H) = U_4(t,x) . \end{cases} \tag{5.20}$$

Для области G построим разностную сетку

$$\Omega = \left\{(t_i, x_j, y_k) \middle| \; t_i = i \cdot \tau, \, i = \overline{0,m}; \; x_j = j \cdot h_x, \, j = \overline{0,n}; \; y_k = k \cdot h_y, \, k = \overline{0,s}\right\},$$

причем шаги интегрирования будем считать постоянными по каждой переменной, $m = T/\tau$, $n = L/h_x$, $s = H/h_y$.

Введем обозначения:

$$
\begin{cases}
\Lambda_x u_{ij} = \dfrac{\eta}{h_x^2}\left(u_{i-1j} - 2u_{ij} + u_{i+1j}\right), \\
\Lambda_y u_{ij} = \dfrac{\eta}{h_y^2}\left(u_{ij-1} - 2u_{ij} + u_{ij+1}\right)
\end{cases}
\tag{5.21}
$$

разностных операторов вторых производных по соответствующим направлениям.

Запишем разностный аналог с "весами" для дифференциального уравнения (5.19):

$$
\frac{1}{\tau}\left(\hat{u}_{ij} - u_{ij}\right) = \sigma\left(\Lambda_x \hat{u}_{ij} + \Lambda_y \hat{u}_{ij}\right) + (1-\sigma)\left(\Lambda_x u_{ij} + \Lambda_y u_{ij}\right). \tag{5.22}
$$

В развернутой форме каждое разностное уравнение (5.22)

$$
\frac{1}{\tau}\left(\hat{u}_{ij} - u_{ij}\right) = \sigma\eta\left(\frac{\hat{u}_{i-1j} - 2\hat{u}_{ij} + \hat{u}_{i+1j}}{h_x^2} + \frac{\hat{u}_{ij-1} - 2\hat{u}_{ij} + \hat{u}_{ij+1}}{h_y^2}\right) +
$$

$$
+(1-\sigma)\eta\left(\frac{u_{i-1j} - 2u_{ij} + u_{i+1j}}{h_x^2} + \frac{u_{ij-1} - 2u_{ij} + u_{ij+1}}{h_y^2}\right)
$$

содержит пять неизвестных величин. Это означает, что для определения *всех* искомых величин в узлах сеточной области Ω при очередном шаге по времени необходимо решить систему $(m+1)\times(n+1)$ линейных алгебраических уравнений с соответствующими граничными условиями.

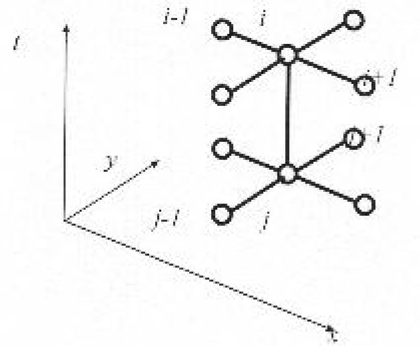


Рис. 5.6. Шаблон для аппроксимации пространственного дифференциального уравнения параболического типа

Понятно, что в соответствии с принятой терминологией схема (5.22) при $\sigma = 0$ является явной, при $\sigma = 1$ - неявной. Погрешность аппроксимации дифференциального уравнения (5.19) схемой (5.22) имеет порядок $O\left(\tau + h_x^2 + h_y^2\right)$ при произвольном значении коэффициента σ. В случае $\sigma = 1/2$ (схема Крэнка - Николсона) порядок аппроксимации по шагу τ повышается до $O\left(\tau^2 + h_x^2 + h_y^2\right)$.

Схема (5.22) устойчива при выполнении условия

$$\sigma \geq 1 - \frac{h_x^2 h_y^2}{2\eta\tau\left(h_x^2 + h_y^2\right)}.$$

Заключение

Таким образом, в настоящей работе была рассмотрена задача об изучении явления теплопроводности на примере металлической пластины. Получены уравнения, с помощью которых мы можем составить программу. Также рассмотрен численный сеточный метод решения таких уравнений. В результате получены искомые значения, и теперь программа позволяет нам увидеть, как распределяется тепло. В качестве дальнейшего развития работы можно предложить провести опыты.

Список используемой литературы.

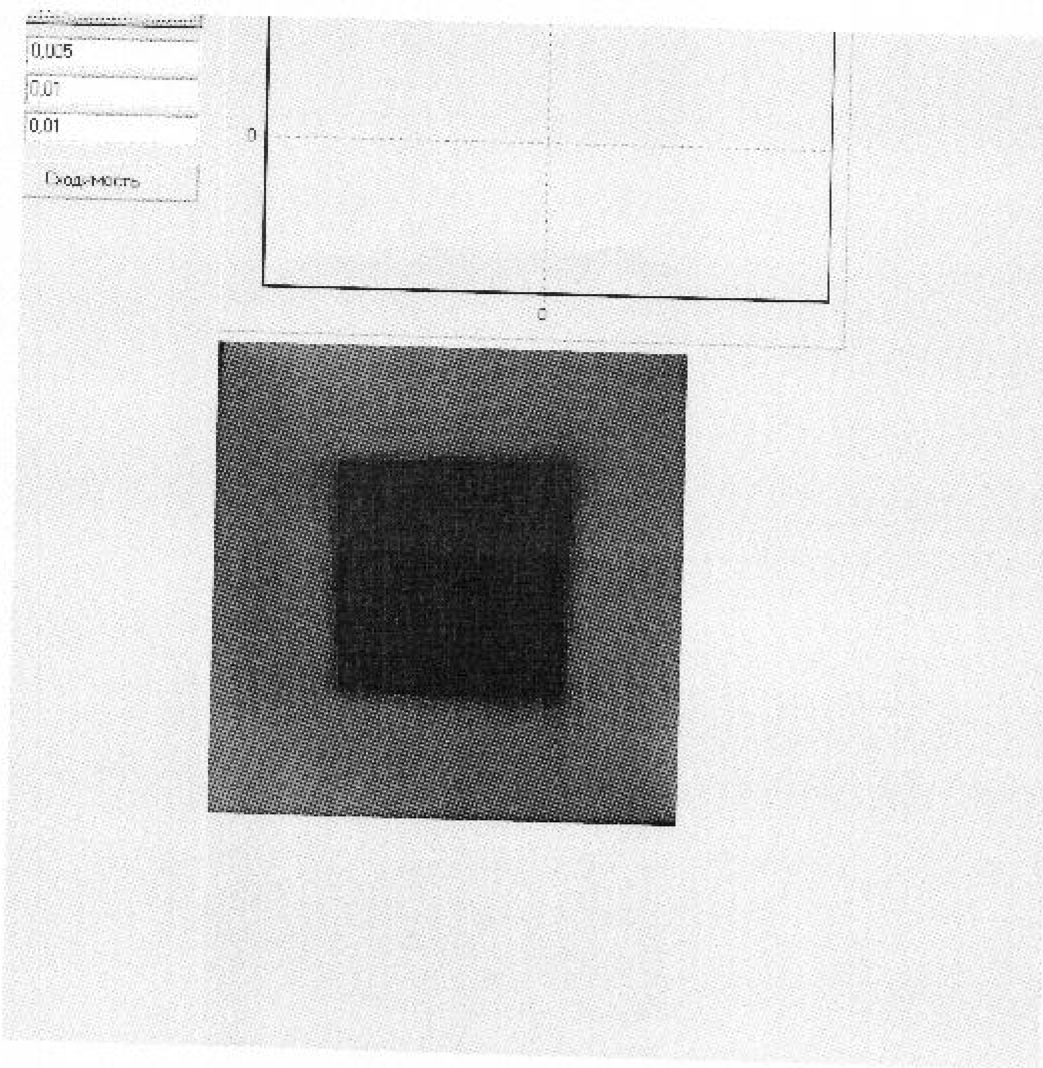
1.http://ru.wikipedia.org/

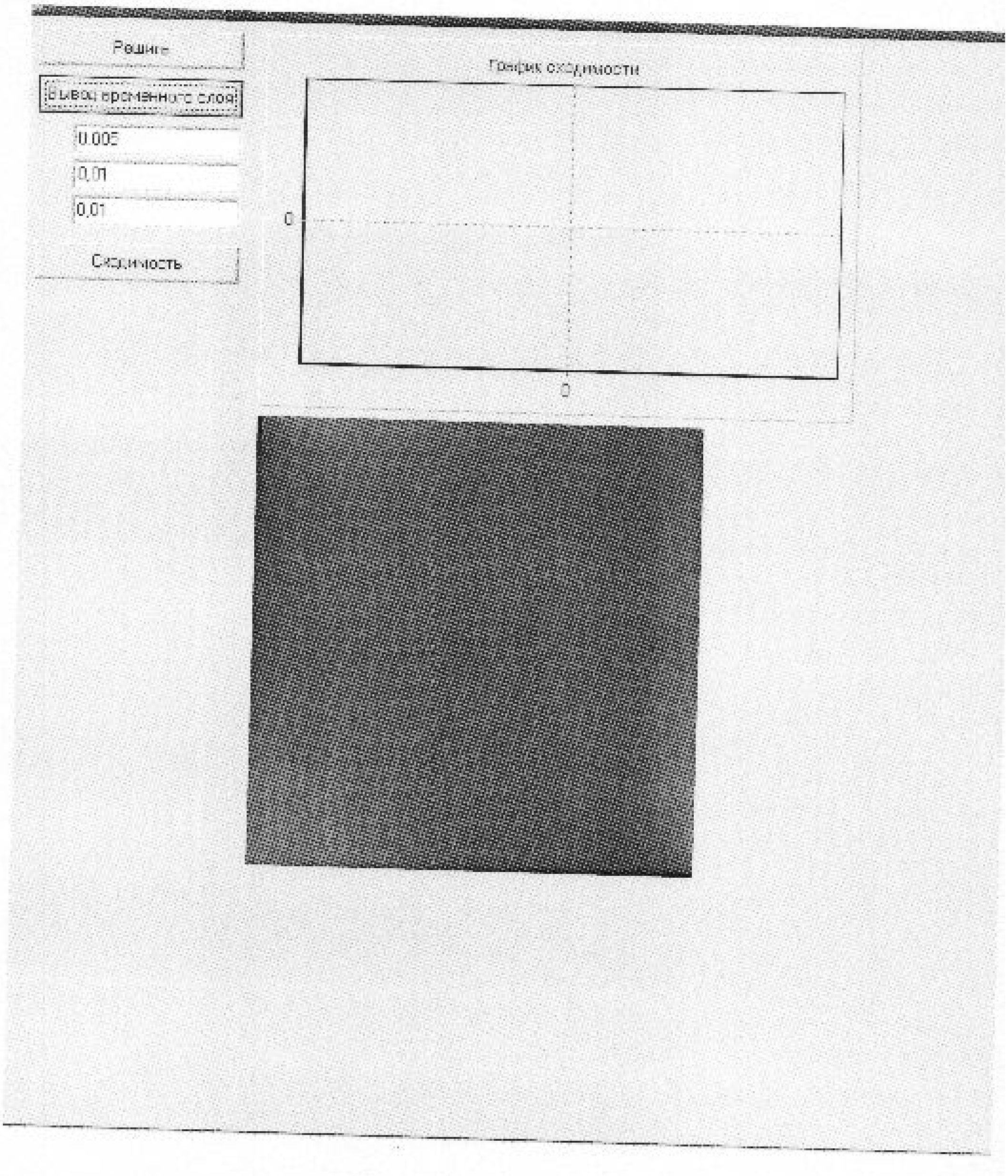
2. http://www.iifwp.ru/teploprovodnost.html

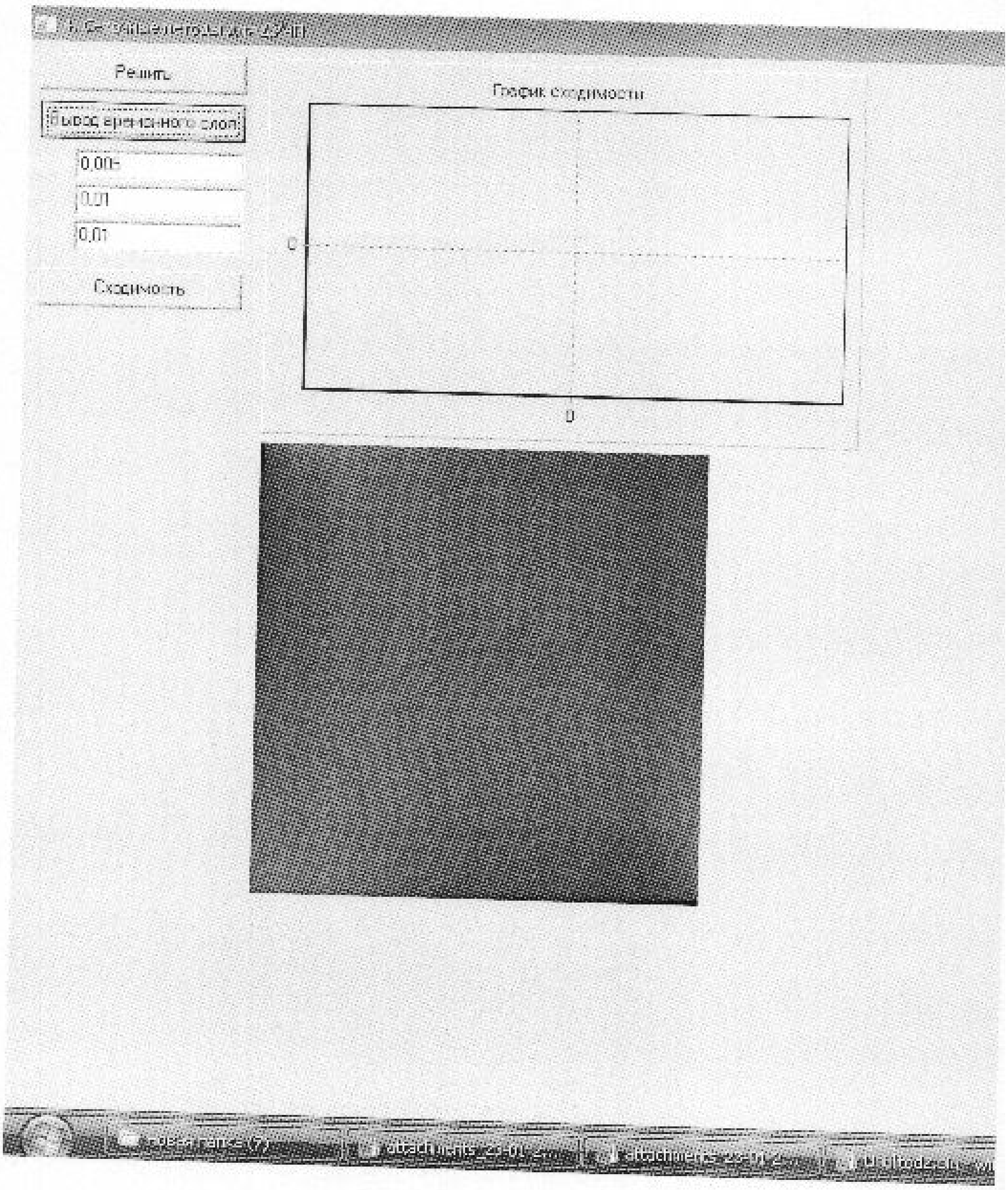
3. http://www.isuct.ru/testlib/node/19

4. http://www.raized.ru/standartizatsiya-v-stroitelstve/teploprovodnost-materialov.html

Приложения


0,005
0,01
0,01
Сход-мость
0
0


Решить
Вывод временного слоя
0.005
0,01
0,01
Сходимость
График сходимости
0
0


Решить
ывод временного слоя
0,005
0,01
0,01
Сходимость
График сходимости
0
0