

Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ учащихся
«Прикладные вопросы математики»

Прикладные вопросы математики

Исследование явлений поверхностного натяжения

Басс Михаил,

МОУ «Лицей №1» г. Перми, 11 кл.

Имакаев Виктор Раульевич,

д.ф.н., профессор

Цель работы: исследование малых колебаний плоского тела на поверхности ПАВ, исследование поверхности ПАВ.

Задача: получение теоретической формулы периода колебания плоского тела на поверхности ПАВ, сравнение значений периода колебаний, полученных экспериментальным путем, а так же с помощью теоретической формулы, нахождение толщины пленки ПАВ, нахождение радиуса кривизны пленки ПАВ.

Этапы:

- I. Теория.
- II. Эксперимент.
 - 1) Получение периода колебаний экспериментальным путем.
 - A) Описание эксперимента.
 - Б) Эксперимент.
 - 2) Получение теоретической формулы для периода колебаний.
 - A) Получение формулы для поверхностного натяжения σ .
 - Б) Получение формулы для периода колебаний.
 - 3) Сравнение полученных результатов.
 - 4) Вывод.

I. Теория.

Поверхностно-активные вещества (ПАВ) — вещества, способные накапливаться (сгущаться) на поверхности соприкосновения двух тел, называемой поверхностью раздела фаз, или межфазной поверхностью.

Основной количественной характеристикой ПАВ является поверхностная активность — способность вещества снижать поверхностное натяжение на границе раздела фаз.

Область применения:

- Моющие средства. Основное применение ПАВ — в качестве активного компонента моющих и чистящих средств мыла
- Косметика. Основное использование ПАВ в косметике — шампуни, Также ПАВ используются в небольших количествах в зубной пасте, лосьонах, тониках и других продуктах.
- Текстильная промышленность. ПАВ используются в основном для снятия статического электричества на волокнах синтетической ткани.
- Кожевенная промышленность. Защита кожаных изделий от лёгких повреждений и слипания.
- Лакокрасочная промышленность. ПАВ используются для снижения поверхностного натяжения, что обеспечивает лёгкое проникновение красочного материала в маленькие углубления на обрабатываемой поверхности и их заполнение с вытеснением при этом оттуда другого вещества (например, воды).
- Бумажная промышленность. ПАВ используются для разделения чернил и варёной целлюлозы при переработке использованной бумаги. Молекулы ПАВ адсорбируются на пигменте чернил. Пигмент становится гидрофобным. Далее воздух пропускается через раствор пигмента и целлюлозы. Пузырьки воздуха адсорбируются на гидрофобной части ПАВ и частички пигмента чернил всплывают на поверхность.

- **Металлургия.** Эмульсии ПАВ используются для смазки прокатных станов. Снижают трение. Выдерживают высокие температуры, при которых сгорает масло.
- **Защита растений.** ПАВ широко используются в агрономии и сельском хозяйстве для образования эмульсий. Используются для повышения эффективности транспортировки питательных компонентов к растениям через мембранные стенки.
- **Пищевая промышленность.** ПАВ применяется в мороженом, шоколаде, взбитых сливках и соусах для салатов и других блюд.
- **Нефтедобыча.** ПАВ применяются в качестве присадок, улучшающих качество нефтепродуктов.
- **Медицина.** Катионные и анионные ПАВ применяют в хирургии в качестве антисептиков.

Таким образом, ПАВ применяется во многих сферах жизни, поэтому я уверен, что исследование различных свойств ПАВ пригодится мне в будущей деятельности.

II. Эксперимент

1) Экспериментальное получение периода колебаний.

А) Описание эксперимента.

Приборы и принадлежности:

- ПАВ (поверхностно-активное вещество)
- Сосуд для ПАВ
- Рамка из проволоки
- Линейка
- Плоское пластмассовое тело
- Фотоаппарат
- Компьютер



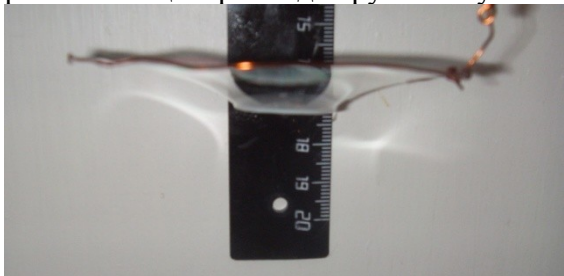
Для изготовления ПАВ было взято:

- 100 мл воды
- 45 мл жидкости для посуды AMWAY
- 50 мл глицерина

Глицерин добавляется для повышения прочности мыльной пленки.

Для изготовления рамки я использовал медную проволоку площадью поперечного сечения $S = 0.25 \text{ мм}^2$ и длиной 40 см. Около 25 см было согнуто в окружность с радиусом $R = 3.6 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ и закреплено проволокой методом скручивания, остальные 15 см для удобства были скручены в ручку для держания и крепления рамки. Так же из пластмассы был вырезан кружок радиусом $r = 1.1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, толщиной $d = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ и весом $m = 2.485 \cdot 10^{-4} \text{ кг}$. Измерение массы проводилось с помощью микронных весов. Измерение радиусов и толщины проводилось с помощью линейки с ценой деления 1 мм.

Для появления мыльной пленки на рамке, рамка окуналась в сосуд с ПАВ. Сосуд был выбран с широким горлышком, ибо в таком случае мыльная пленка не цепляется за края сосуда. Важно заметить, что рамку необходимо окунать в ПАВ предварительно сняв пену с его поверхности, иначе пленка будет крайне непрочная. Для того чтобы пластмассовый кружок держался на пленке, кружок необходимо предварительно смочить, в противном случае при соприкосновении с кружком пленка может порваться. Далее я запускал кружок в пленку, медленно сдвигая его с края рамки в ее центр. Когда кружок опускается в центр рамки, пленка деформируется и провисает.



Для измерения провиса линейка крепилась к вертикальной поверхности (с помощью скотча) и к ней подносилась рамка с провисшим на пленке кружком. Во избежание ошибки параллакса координаты рамки и провисшего кружка фиксировались с разных точек обзора.

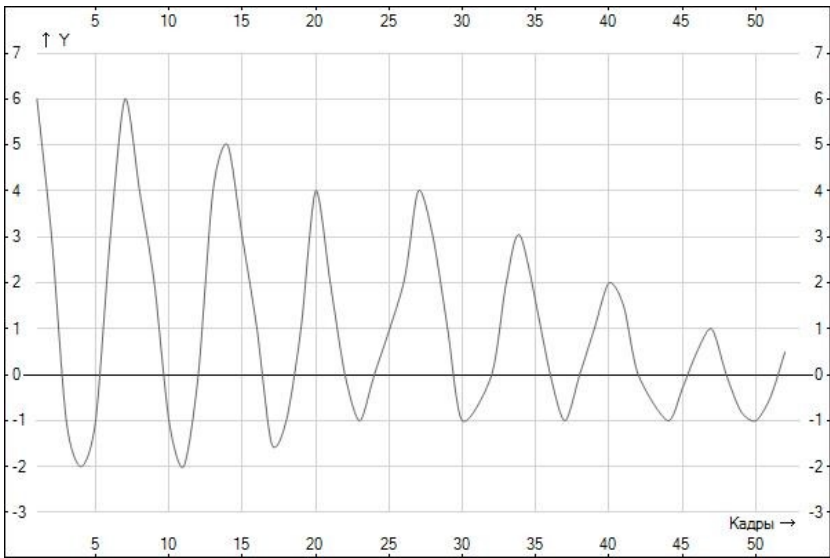
Для измерения периода колебаний линейка была закреплена на шкафу скотчем. Фотоаппарат Samsung Digital 5i, который был помещен на книгу, лежащую на стуле, находился напротив провисшего кружка. Таким образом, возможность ошибки параллакса была максимально уменьшена. Далее легонько сотрясая рамку, я получал колебания кружка на пленке ПАВ. Колебания записывались на видео при помощи фотоаппарата. Данное видео просматривалось на компьютере покадрово с помощью программы Media Player Classic. Из характеристик фотоаппарата известно, что видео имеет 30 кадров в секунду.

Б) Эксперимент.

При покадровом просмотре видео я записывал, за сколько кадров кружок совершает каждое колебание. Поделив количество кадров в одном колебании на 30, я получал период колебания в секундах. Фиксируя координаты кружка в каждом кадре, я получил зависимость $y(t)$ – график, из которого видно, как перемещался кружок во время колебаний.

На этом графике виден максимальный провис пленки во время колебаний. Посчитав количество кадров между двумя точками максимума, можно получить значение одного периода колебаний кружка.

Для более точного результата, было снято 5 видеороликов. Ниже представлен график зависимости $y(t)$ кружка с одного из них:



В каждом из 5 видеороликов был посчитан период для каждого колебания (T_i), средний период колебаний ($T_{ср} = \sum T_i / i$), погрешность ($\epsilon_i = T_i - T_{ср}$) и средняя погрешность ($\epsilon_{ср} = \sum \epsilon_i / i$). После анализа 5 видеороликов была получена таблица :

i	1	2	3	4	5
$T_{ср}$	0.188	0.19	0.1939	0.204	0.2
$\epsilon_{ср}$	0.014	0.023	0.02	0.021	0.013

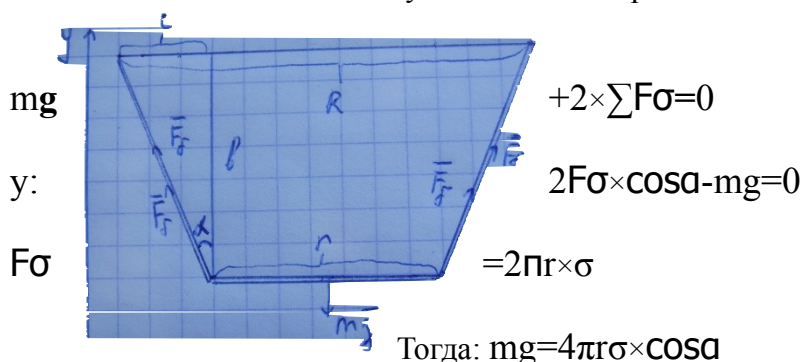
Таким образом, $T_{ср} = 0.1951$ при этом погрешность измерений $\epsilon_{ср} = 0.0182$.

2) Получение теоретической формулы для периода колебаний.

А) Получение формулы для поверхностного натяжения σ

Напишем 2 закон Ньютона для кружка, находящегося в состоянии равновесия.

Так как пленка взаимодействует с обеими сторонами плоского кружка, то:



$$\sigma = \frac{mg}{4\pi r \times \cos \alpha}$$

$\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}}$, где $c = (R - r)$, b – провисание пленки.

При этом значение b уже известно (было измерено в ходе эксперимента).

Получаем итоговую формулу для σ :

$$\sigma = \frac{mg \times \sqrt{b^2 + c^2}}{4\pi r \times b} \quad (1)$$

Б) Получение формулы для периода колебаний.

$$m a = mg - 2F\sigma$$

Направим ось y вниз, тогда:

$$y: m y = mg - 2F\sigma \times \cos \alpha'$$

Так как $mg = 4\pi r \sigma \times \cos \alpha$ (из 2 з.Н. для кружка), то

$$m y = 4\pi r \sigma \times \cos \alpha - 2F\sigma \times \cos \alpha'$$

$$m y = 4\pi r \sigma \times (\cos \alpha - \cos \alpha')$$

$$m\ddot{y} = -8\pi r \sigma \times \sin \alpha + a'^2 \times \sin \alpha - a'^2$$

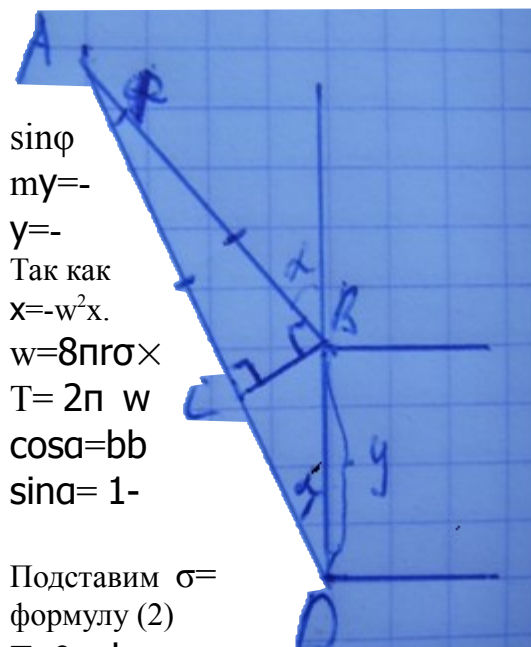
Так как $\alpha \approx \alpha' \Rightarrow$

$$M\ddot{y} = -8\pi r \sigma \times \sin \alpha \times \sin \alpha - a'^2$$

Пусть $\varphi = \alpha - \alpha'^2$, тогда

$$M\ddot{y} = -8\pi r \sigma \times \sin \alpha \times \sin \varphi$$

Найдем $\sin \varphi$:



$$\sin \varphi$$

$$m\ddot{y} = -$$

$$y = -$$

Так как

$$x = -w^2 x.$$

$$w = 8\pi r \sigma \times$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{w}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

Подставим $\sigma =$
формулу (2)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{w}}$$

Подставим $c = (R-r) \Rightarrow$

Итоговая формула для периода колебаний

Так как $\varphi \ll \alpha$, то углы ACB и ABC стремятся к 90° .

Тогда треугольник BCD – прямоугольный и

$$y \times \sin \alpha = \sin \varphi \times \sqrt{b^2 + c^2} \Rightarrow$$

$$= y \times \sin \alpha \times \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

$$8\pi r \sigma \times \sin \alpha \times \sin \alpha \times \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} \times y$$

$$b^2 + c^2 \times m \times 8\pi r \sigma \times \sin^2 \alpha \times y$$

колебания гармонические, можно использовать формулу

$$\sin^2 \alpha = \frac{c^2}{b^2 + c^2} \times m$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{8\pi r \sigma \times \frac{c^2}{b^2 + c^2} \times \frac{c^2}{b^2 + c^2}}} \quad (2)$$

$$2 + c^2$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{c^2}{b^2 + c^2} = \frac{b^2}{b^2 + c^2}$$

$$m g \times \frac{b^4}{4\pi r \sigma \times \sqrt{(b^2 + c^2)}} \quad (1) \text{ и } \sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

$$(b^2 + c^2) g c^2$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{(b^2 + (R-r)^2) g (R-r)^2}} \quad (3)$$

При подстановке значений R, r, b необходимо учитывать, что измерения производились с определенной погрешностью.

$$\text{При } R = 3.6 \times 10^{-2} \text{ м}$$

$$\epsilon_R = 5 \times 10^{-4} \times 3.6 \times 10^{-2} = 0.014.$$

$$\text{При } r = 1.1 \times 10^{-2} \text{ м}$$

$$\epsilon_r = 5 \times 10^{-4} \times 1.1 \times 10^{-2} = 0.045.$$

$$\text{При } b = 0.8 \times 10^{-2} \text{ м}$$

$$\epsilon_b = 5 \times 10^{-4} \times 0.8 \times 10^{-2} = 0.0625.$$

$$\text{При измерении массы кружка } \epsilon_m = 5 \times 10^{-5} \times 2.485 \times 10^{-4} = 0.0002.$$

Подставив данные значения R, r, b в формулу (3), получаем $T = 0.1821$ сек.

3) Сравнение

Теоретически период колебаний $T = 0.1821$ сек.

В ходе эксперимента значение периода колебаний $T = 0.1951$ сек.

Теоретически период колебания близок по значению с практическим.

4) Вывод

Задачи, поставленные в начале практики, выполнены. Несмотря на то, что математическая модель провиса пленки была сильно упрощена (до конической формы), порядок значений обоих периодов совпал.