Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ учащихся
«Прикладные вопросы математики»

Математическое моделирование

Численное решение уравнения теплопроводности

Безгодов Петр Александрович
МОУ «Лицей №1» г. Перми, 11 кл.
Волегов Павел Сергеевич
к.ф.-м.н., доц. каф. ММСП
ПНИПУ

Пермь

2011

Оглавление

Введение 3
Основные понятия и определения 4
Концептуальная постановка задачи 4
Основной закон теплопроводности Фурье 5
Уравнение теплопроводности 8
Типичные краевые условия для уравнения теплопроводности 10
Результаты 11
Заключение 12
Литература 12

Введение

В повседневной жизни мы часто сталкиваемся с процессом теплопроводности. С наступлением нового времени года, человек одевается по-разному, если наступает зима, то человек одевается теплее, чтобы ему было тепло, или, переходя на язык физики, чтобы уменьшить процесс теплопроводности между человеком и окружающей средой. В чем же заключается явление теплопроводности?

Процесс теплопроводности заключается в том, что кинетическая энергия атомов и молекул, которая определяет температуру тела, передаётся другому телу при их взаимодействии или передаётся из более нагретых областей тела к менее нагретым областям.

Рис.1

Иногда теплопроводностью называется также количественная оценка способности конкретного вещества проводить тепло.

Целью исследовательской работы является разработка математической модели процесса теплопроводности с учетом различных граничных и начальных условий.

Задачи:

1. Сформулировать концептуальную постановку задачи моделирования.
2. Записать основной закон Фурье.
3. Вывести уравнение теплопроводности.
4. Решить задачу численным методом.

1. Основные понятия и определения

Существуют три основных вида теплообмена: теплопроводность, конвекция и тепловое излучение .

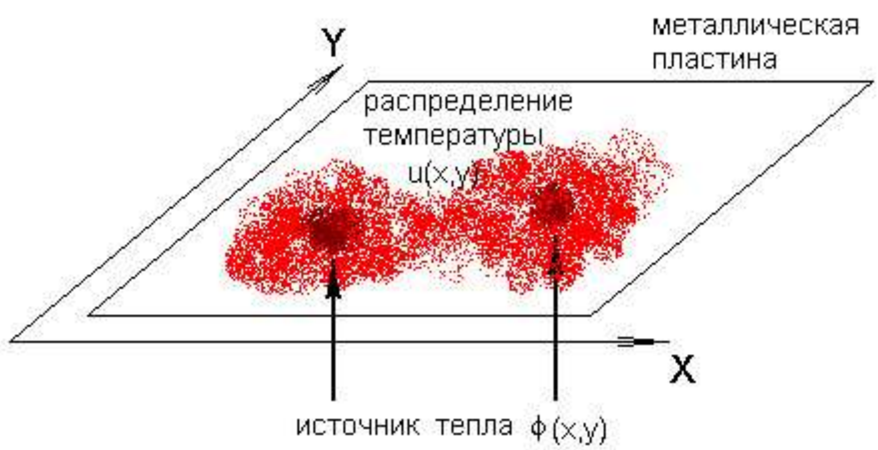
Теплопроводность – это молекулярный перенос теплоты между непосредственно соприкасающимися телами или частицами одного тела с различной температурой, при котором происходит обмен энергией движения структурных частиц (молекул, атомов, свободных электронов).

Конвекция осуществляется путем перемещения в пространстве не-равномерно нагретых объемов среды. При этом перенос теплоты неразрывно связан с переносом самой среды.

Тепловое излучение характеризуется переносом энергии от одного тела к другому электромагнитными волнами.

Часто все способы переноса теплоты осуществляются совместно. Например, конвекция всегда сопровождается теплопроводностью, так как при этом неизбежно соприкосновение частиц, имеющих различные температуры.

2. Концептуальная постановка задачи



Объектом исследования является плоская, металлическая, квадратная пластина.

Гипотезы

1) Перенос теплоты происходит в пластине, у которой длину и ширину можно считать бесконечно большой по сравнению с толщиной.

2) При выводе дифференциального уравнения теплопроводности принимаются следующие допущения:

. внутренние источники теплоты отсутствуют;

. среда, в которой распространяется тепло, однородна и изотропна;

. используется закон сохранения энергии, который для данного случая формулируется так: разность между количеством теплоты, вошедшей вследствие теплопроводности в плоскую пластину за время dt и вышедшей из неё за тоже время, расходуется на изменение внутренней энергии рассматриваемого элементарного объема.

3) При нагреве не происходит деформации пластины.

2. Основной закон теплопроводности Фурье

Необходимым условием распространение тепла является наличие температурного градиента – меры неоднородности распределения температуры. Опыт показывает, что передача тепла теплопроводностью происходит по нормали к изотермической поверхности от мест с большей температурой к местам с меньшей температурой.

Плотность теплового потока – количество тепла, проходящее в единицу времени через единицу площади изотермической поверхности (вектор)

$$\mathbf{q} = \mathbf{l_n} \frac{dQ}{dt} \frac{1}{S}, \qquad (1)$$

где $\frac{dQ}{dt}$ – скорость теплового потока или количество тепла, проходящее в единицу времени, S – площадь изотермической поверхности, $\mathbf{l_n}$ – единичный вектор, направленный по нормали к изотермической поверхности в сторону уменьшения температуры. Поток тепла и температурный градиент направлены в противоположные стороны. Таким образом можно сформулировать **закон Фурье [2]:**

Плотность теплового потока пропорционально градиенту температуры и направлена в противоположную сторону:

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T,$$

где λ *– коэффициент теплопроводности.*

Физический смысл этого коэффициента рассмотрим на одномерном примере стационарной теплопроводности. В этом случае

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} \equiv 0 \right).$$

Пусть температурный градиент является постоянным, тогда

$$\frac{dT}{dx} = const = \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1},$$

следовательно и скорость теплового потока тоже постоянна согласно соотношению

$$\frac{dQ}{dt} = const = \frac{Q}{t},$$

тогда плотность теплового потока равна

$$\frac{Q}{S\,t} = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1}, \quad T_1 > T_2, \; x_2 > x_1,$$

и коэффициент теплопроводности равен

$$\lambda = \frac{Q}{S\,t} \frac{x_2 - x_1}{T_2 - T_1}.$$

Таким образом, <u>*коэффициент теплопроводности*</u> *– это количество тепла, протекающего в единицу времени через единицу площади изотермической поверхности при перепаде температуры в 1ºК на единицу длины.* Размерность коэффициента $[\lambda] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2\,\text{с}} \frac{\text{м}}{°\text{К}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}\,°\text{К}}$.

Коэффициент теплопроводности может принимать различные значения для различных веществ; так, для газа хлористого углерода λ = 0,0086 $\frac{\text{Вт}}{\text{м}\,°\text{К}}$

(при температуре 100°C), а для серебра $\lambda = 416\ \frac{\text{Вт}}{\text{м °К}}$ (при температуре 0°C).

Следует отметить, что коэффициент теплопроводности меняется с изменением температуры вещества, в частности, для металлов с увеличением температуры коэффициент теплопроводности линейно уменьшается.

Уравнение теплопроводности

Для вывода уравнения теплопроводности применим закон сохранения энергии. При этом будем считать, что внутренняя энергия вещества изменяется только вследствие теплопроводности, то есть не будем учитывать изменения внутренней энергии за счет химических реакций, за счет работы сил давления и т.д.

Рассмотрим баланс тепловых потоков в элементарном объеме $dV = dx \cdot dy \cdot dz$. Пусть тепловой поток направлен вдоль координаты x, тогда, согласно закону сохранения энергии *разность втекающего и вытекающего потоков равна количеству тепла, аккумулированному в элементарном объеме*

$$q_x dydz - q_{x+dx} dydz = c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz ,$$

считая, что $q_{x+dx} \approx q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx$, получим, $-\frac{\partial q_x}{\partial x} xdxdydz = c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz$.

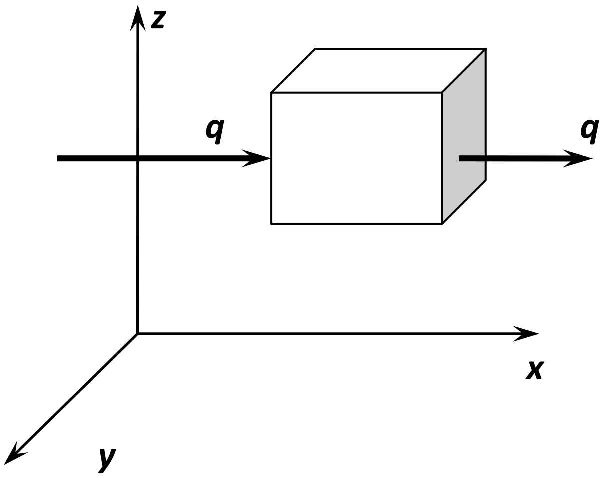


Рис.3 Схема баланса тепловых потоков в элементарном объеме.

Подставляя выражение для потока тепла из закона Фурье. $q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$ получаем

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} .$$

Если тепловой поток имеет три компоненты (вдоль координат x, y, z), тогда количество тепла, аккумулированного в элементарном объеме равна сумме разностей потоков вдоль каждого из трех направлений

$$\left(q_x dydz - q_{x+dx} dydz\right) + \left(q_y dxdz - q_{y+dy} dxdz\right) + \left(q_z dxdy - q_{z+dz} dxdy\right) = c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz,$$

принимая для потоков вдоль координат y, z соотношения $q_{y+dy} \approx q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy,\ \ q_{z+dz} \approx q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz$ и учитывая закон Фурье, окончательно получаем дифференциальное уравнение теплопроводности в среде

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

(1.9)

При выводе было сделано предположение, что термические коэффициенты являются константами.

Если в объеме среды присутствуют источники тепла (например, идут химические реакции с поглощением или выделением тепла), тогда в уравнении появляется дополнительное слагаемое w, характеризующее удельную мощность теплового источник (количество тепла, выделяющееся в единицу времени в единице объема $[w] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$). Уравнение теплопроводности, таким образом, примет вид

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + w,$$

Типичные краевые условия для уравнения теплопроводности

Для того чтобы однозначно определить температурное поле, необходимо задать краевые условия (начальные и граничные). В общем случае для рассматриваемой трехмерной области Ω с границей $\partial\Omega$ *начальные условия* имеют вид

$$T(0,x,y,z)=T_0(x,y,z),\quad x,y,z\in\Omega,$$

они задают начальное распределение температуры в рассматриваемом объеме.

Граничные условия, задаваемые на границе $\partial\Omega$, описывают тепловое взаимодействие рассматриваемого тела с окружающей средой. Итак, *граничные условия* могут быть

I-го рода

$$T(t,x,y,z)=T_1(t,x,y,z),\quad x,y,z\in\partial\Omega, \qquad ($$

где $T_1(t,x,y,z)$ –заданная функция.

Эти условия задаются, если на поверхности рассматриваемого тела искусственно поддерживается некоторая температура (постоянная в частном случае)

II-го рода

$$\lambda\mathbf{n}\cdot\nabla T(t,x,y,z)=-q_n(t,x,y,z),\quad x,y,z\in\partial\Omega_q,$$

где $q_n(t,x,y,z)$ – заданная плотность теплового потока на поверхности тела, направленного по нормали к поверхности (при нагреве q_n>0).

Эти условия могут быть заданы, например, при нагреве в высокотемпературных печах, где передача тепла происходит излучением, когда температура тела значительно меньше температуры излучающей поверхности.

III-го рода

$$\lambda\mathbf{n}\cdot\nabla T(t,x,y,z)=-\alpha\left(T(t,x,y,z)-T_{\text{ср}}\right),\quad x,y,z\in\partial\Omega_\alpha,$$

Эти условия описывают конвективный теплообмен между поверхностью тела и окружающей средой при постоянном потоке тепла.

Здесь α – коэффициент теплообмена с окружающей средой, $[\alpha] = \text{Вт}/(\text{м}^2\ {}^\circ\text{К})$, он *равен количеству тепла, отдаваемого единицей площади поверхности тела в единицу времени при разности температур между поверхностью и средой в* 1°.

Теплообмен тела, механизм которого описывается соотношением, называется теплообменом по закону Ньютона.

Граничные условия III-го рода могут быть использованы при рассмотрении нагревания или охлаждения тел лучеиспусканием. Согласно закону Стефана – Больцмана лучистый поток тепла между двумя поверхностями равен

$$q(t,x,y,z) = \sigma^*[T^4(t,x,y,z) - T_a^4], \quad x,y,z \in \partial\Omega_\sigma$$

где σ^* – коэффициент лучеиспускания, $T_а$ – абсолютная температура поверхности лучевоспринимающего тела.

№Результаты

При задании 1 граничных условий (когда задана начальная температура на границах пластины) происходит следующие распределение температур (рис.4)

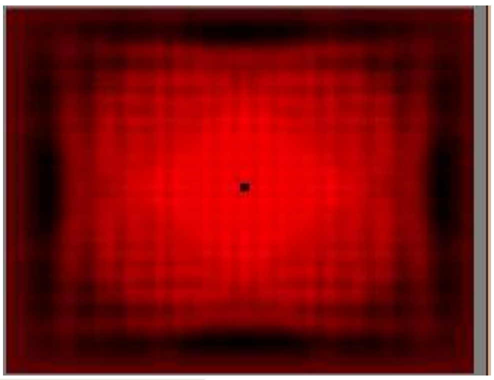


Рис.4

При задании 2 граничных условий(когда задан тепловой поток на границах пластины) получается такое распределение температур(рис.5)

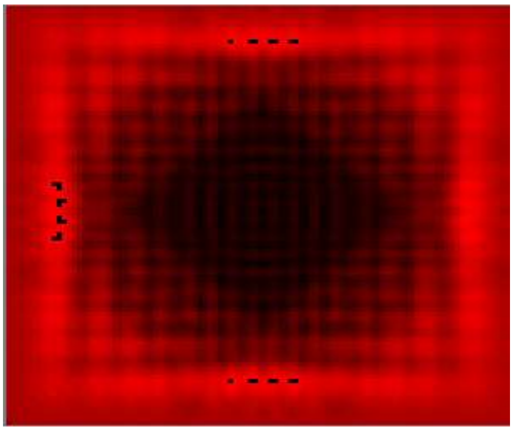


Рис.5

При задании 3 граничных условий(когда задан коэффициент обмена с окружабщей средой и начальная температура на границах пластины) получается следующие распределение теплоты

Заключение

В результате исследования была создана математическая модель процесса теплопроводности с учетом различных граничных и начальных условий.

Литература

1. Н. Д. Няшина: Моделирование процессов и объектов в металлургии.