

Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ учащихся
«Прикладные вопросы математики»

Математическое моделирование

**Исследование имитационных моделей
и систем массового обслуживания. Многоканальные СМО**

Борисов Евгений Сергеевич
МОУ «Лицей №1» г. Перми, 11 кл.

Волегов Павел Сергеевич
к.ф.-м.н., доц. каф. ММСП

ПНИПУ

Пермь

2011

Содержание

Введение.....	3
Глава 1. Концептуальная постановка задачи.....	4
Глава 2. Имитационные модели.....	9
Глава 3. Структура имитационных моделей систем массового обслуживания	14
Глава 4. Результаты.....	16
Выводы.....	22

Введение

В современном мире существенно повысилась доступность компьютерной техники, которая стала применяться в самых различных научных и производственных областях. В связи с этим выросла аудитория потенциальных потребителей компьютерных программ и следовательно увеличилась целесообразность их создания.

Каждому из нас часто приходится сталкиваться с работой своеобразных систем, называемых системами массового обслуживания (СМО). Примерами таких систем могут служить: телефонные станции, ремонтные мастерские, билетные кассы, справочные бюро, банки, магазины, парикмахерские и т. п. Каждая из этих систем состоит из какого-то числа обслуживающих единиц (каналов обслуживания). Такими каналами могут быть: линии связи, рабочие точки, кассиры, продавцы, лифты, автомашины и др.

Всякая СМО предназначена для обслуживания некоторого потока заявок (или «требований»), поступающих в какие-то случайные моменты времени. Обслуживание заявки продолжается некоторое время, после чего канал освобождается и готов к приему следующей заявки. Случайный характер потока заявок и времен обслуживания приводит к тому, что в какие-то периоды времени на входе СМО скапливается излишне большое число заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО не обслуженными); в другие же периоды СМО будет работать с недогрузкой или вообще простаивать.

Последовательная линейная структура СМО характерна, например, для поточных (автоматических и неавтоматических) линий конвейерного типа. Различие во времени обработки деталей на таких линиях связано, в основном, с процессами «отказа» и «восстановления». Оптимизация процесса обслуживания способна существенно повысить эффективность работы предприятия. Широкое использование СМО в окружающем нас мире обеспечивает *актуальность* любого исследования таких систем.

Глава 1

Концептуальная постановка задачи

Целью данной работы является построение математической модели системы массового обслуживания, исследовать ее, и дать рекомендацию, сколько каналов нужно для обслуживания заявок в зависимости от характеристик потока заявок и типа СМО.

Системы массового обслуживания (СМО) – системы, на вход которых подается случайный поток однотипных *заявок* (событий), обработка которых выполняется одним или несколькими однотипными *каналами* (устройствами) [1].

Как правило, построить аналитическую модель подобной системы можно при соблюдении следующих условий:

- *Система должна быть относительно простой.* Например, участок цеха можно представить как относительно простую многоканальную СМО (с очередью или без нее); в то же время число и форма связей для цеха в целом (или для всего предприятия) могут быть достаточно сложными и трудно учитываемым в аналитической модели.
- *Потоки событий между элементами системы должны быть простейшими или близкими к ним* (каждое событие является независимым).

При невыполнении данных условий аналитическое моделирование используется лишь в некоторых частных случаях, когда после принятия дополнительных гипотез возможно разрешение возникающих сложностей. Если эти сложности при аналитическом моделировании являются непреодолимыми, то представляется целесообразным применение моделей, использующих имитационный подход.

Пример двухканальной смо с отказами (автозаправочная станция – АЗС):



Рис. 3. План моделируемой АЗС

На рис. 3 приведен план АЗС. Рассмотрим метод моделирования СМО на ее примере и план ее исследования. Водители, проезжая по дороге мимо АЗС по дороге, могут захотеть заправить свой автомобиль. Хотят обслужиться (заправить машину бензином) не все автомобилисты подряд; допустим, что из всего потока машин на заправку в среднем заезжает 5 машин в час.

На АЗС две одинаковые колонки. Владелец АЗС заасфальтировал для машин место, где они могут ожидать обслуживания. Если колонки заняты, то на этом месте могут ожидать обслуживания другие машины, но не более двух одновременно. Очередь будем считать общей. Как только одна из колонок освободится, то первая машина из очереди может занять ее место на колонке (при этом вторая машина продвигается на первое место в очереди). Если появляется третья машина, а все места (их два) в очереди заняты, то ей отказывают в обслуживании, так как стоять на дороге запрещено (см. дорожные знаки около АЗС). Такая машина уезжает прочь из системы навсегда и как потенциальный клиент является потерянной для владельца АЗС. Можно усложнить задачу, рассмотрев кассу (еще один канал обслуживания, куда надо попасть после обслуживания в одной из колонок) и очередь к ней и так далее. Но в простейшем варианте очевидно, что пути движения потоков заявок по СМО можно изобразить в виде эквивалентной схемы, а добавив зна-

чения и обозначения характеристик каждого элемента СМО, получаем окончательно схему, изображенную на рис.4.

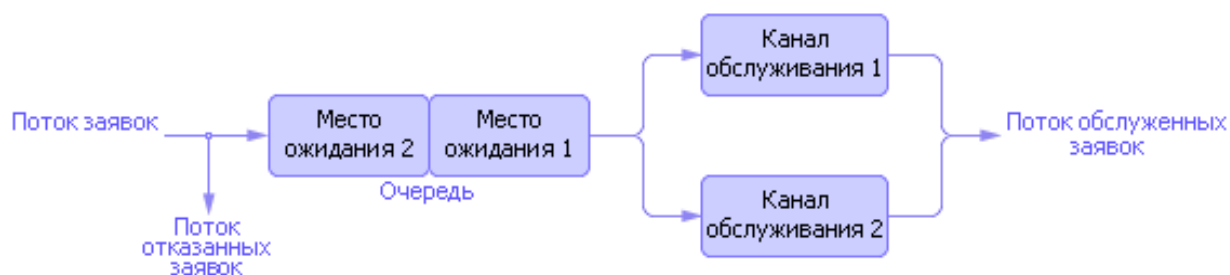


Рис. 4. Эквивалентная схема объекта моделирования

Пример использования аналитической модели СМО (одноканальная СМО с отказами) [ссылка]

В качестве примера рассмотрим имитатор одноканальной СМО с отказами (см. рис.1).

Пусть на вход системы поступает случайный поток заявок, интервал времени Δt между которыми

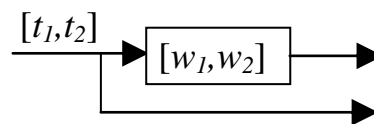


Рис.1. Схема СМО

является случайной величиной, распределенной по равномерному закону в интервале от t_1 до t_2 ($\Delta t = R(t_1, t_2)$). Время выполнения Δw заявки в канале также случайно и подчинено равномерному закону: $\Delta w = R(w_1, w_2)$. Требуется определить вероятность отказа в обслуживании и коэффициент загрузки канала.

Выполним декомпозицию данной системы. В качестве отдельных элементов можно выделить следующие:

1) *Источник заявок.* Характеризуется

- общим количеством N_{max} сгенерированных заявок за весь интервал наблюдений;
- количеством $N(t)$ заявок, сгенерированных к моменту времени t ;
- законом распределения интервалов времени Δt между появлением заявок;
- временем t_n появления текущей заявки.

В некоторых случаях при рассмотрении неоднородных потоков источник может генерировать заявки разного типа (сложности), характеризующие своим законом распределения.

2) *Канал*. Характеризуется:

- своим состоянием $S(t)$ (занят или свободен в момент времени t);
- числом N_w обслуженных заявок;
- суммарным временем T_w нахождения в занятом состоянии;
- производительностью Δw (закон распределения времен выполнения заявок определенного типа);
- временем W_n окончания обслуживания n -ой заявки.

Имитация работы системы происходит в системном времени t . Введенные параметры для элементов СМО позволяют ответить на поставленные вопросы о параметрах эффективности данной системы. Зная число N_w обслуженных заявок в момент времени t из их общего числа N , можно оценить вероятность отказа $P_{отк}(t)$ ее частотой $W_{отк}(t)$:

$$P_{отк}(t) \approx W_{отк}(t) = (N(t) - N_w(t))/N(t). \quad (7.1)$$

Коэффициент загрузки K_3 канала можно оценить, зная время работы T_w канала:

$$K_3(t) = T_w(t) / t. \quad (7.2)$$

Для разработки имитатора используем переменный шаг по времени. В результате работы имитатора происходит генерация N_{max} заявок с заданными статистическими параметрами, имитирующими случайный процесс поступления заявок в реальной системе. Очевидно, что при увеличении N_{max} (объема статистической выборки) увеличивается достоверность статистических оценок параметров эффективности системы. Алгоритм, реализующий имитатор, представлен на рис.3. Запись данного алгоритма на псевдокоде приведена в Алгоритме 1. На рис.2. показано изменение параметров эффективности в зависимости от системного времени при следующих исходных данных:

$$w_1 = t_1 = 1; \quad w_2 = t_2 = 3; \quad N_{max} = 200.$$

Можно отметить, что с увеличением времени наблюдения за системой (то есть с увеличением объема выборки N_{max} числа рассмотренных заявок) величины оценок параметров эффективности стремятся к некоторым предельным значениям. Данные оценки являются значениями параметров эффективности, которые соответствуют финальным вероятностям рассматриваемой системы при заданных исходных данных. Так, для рассматриваемого случая оценка $P_{отк}$ вероятности отказа стремится к значению 0,34, а оценка K_3 коэффициента загрузки - к значению 0,66.

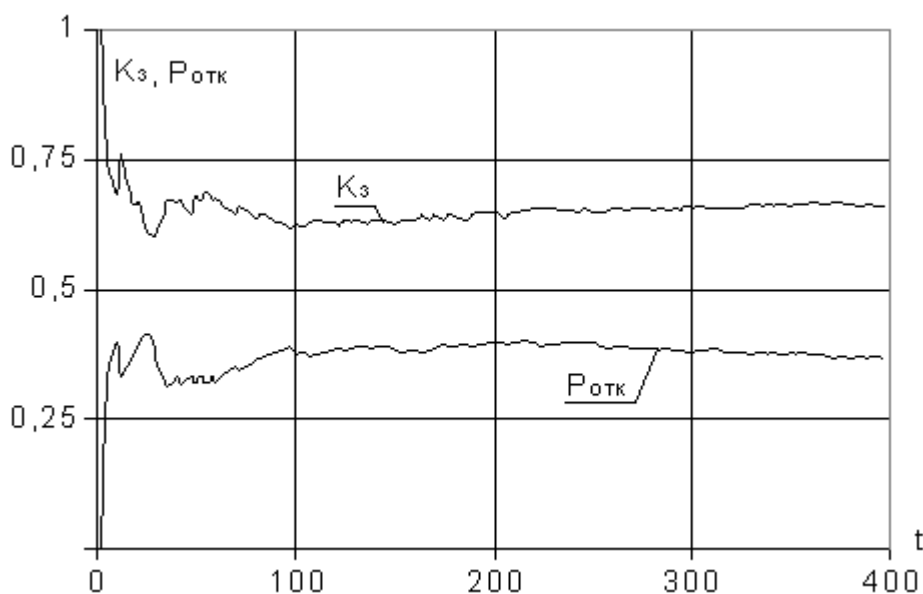


Рис. 2. Изменение параметров эффективности в зависимости от системного времени

На практике при построении имитаторов сложных систем, как правило, предусматривается возможность наблюдения за величиной оценок параметров эффективности в зависимости от системного времени или числа сгенерированных заявок. Вычислительный эксперимент с имитатором прекращается при выходе наблюдаемых оценок на некоторое стационарное значение. Автоматический останов вычислительного эксперимента можно ввести в алгоритм имитатора, если предусмотреть вычисление величины максимального изменения отслеживаемых параметров за некоторый промежуток системного времени, начиная от текущего момента. Если модуль величины максимального изменения стал меньше некоторого наперед заданного малого

положительного числа, то эксперимент с имитатором можно прекращать, а полученные значения отслеживаемых параметров считать решением задачи.

Мы используем имитационный подход, так как в некоторых случаях аналитический расчет не способен предоставить корректные результаты и интересующие показатели можно рассчитывать только с помощью имитационной модели.

Глава 2. Имитационные модели

Имитационная модель – математическая компьютерная модель, в которую введены определенные динамические элементы. [2]

Компьютерную модель можно поделить на две части: имитационная модель системы и расчетно-формульная модель. Для начала функционирования любой модели необходимо задать ряд входных параметров.

Пользователь задает количество рабочих станций, число заявок на, среднее время между поступлением и обслуживанием заявок во входном потоке (перечисленные параметры вводятся с помощью компонентов Edit). Затем, при помощи компонентов на форме задаются связи между станциями. Далее, для каждой станции, также при помощи компонентов Edit, задается среднее время обслуживания — w_3 , среднее время между поступлением заявок — t_3 .

После ввода весовых коэффициентов связей предусмотрена процедура проверки на корректность ввода. В случае некорректного задания коэффициентов, пользователю выдается сообщение об этом — “Введены не корректные данные ($K \text{ загрузки} + W \text{ отказа} > 1$)”, и показания графика, в котором были заданы некорректные значения, очистится. Корректность проверяется через сумму коэффициента загрузки и вероятности отказа: их сумма не должна превосходить единицу.

Данная программа дает возможность смоделировать как линейную, так и разветвленную структуру. Программа может использоваться для оп-

тимизации процесса обслуживания. Смоделировав структуру автоматической линии, гибкой производственной системы или структуру системы обслуживания какого-либо предприятия (или производственного участка), пользователь может с помощью данной программы исследовать эту структуру. Проведя анализ, можно выявить «слабые» места в системе или осознать необходимость введения в нее каких-либо дополнительных элементов. Далее можно, меняя различные параметры в программе, достигать оптимального соотношения простоев и очередей.

Алгоритм работы программы

Рассмотрим обобщенный алгоритм работы программы, представленный укрупненными блоками, затем более детально рассмотрим реализацию каждого из блоков и приведем описание используемых переменных и функций. Алгоритм представлен на рис.5.

Описание переменных, используемых в алгоритме

1) Источник заявок:

N_{max} - общим количество заявок за весь интервал наблюдений;

N - количество заявок, сгенерированных к моменту времени;

2) Канал:

t_1 } Интервал времени между поступлениями заявок
 t_2 }

w_1 } Интервал времени между обслуживанием заявок
 w_2 }

N_w - число обслуженных заявок;

T_w - суммарное время нахождения заявки в занятом состоянии;

W_n - время окончания обслуживания n -ой заявки;



Рис. 5. Блок-схема имитатора

Сценарий работы программы

Сразу после старта программы на экране появляется форма. Эта форма предназначена для ввода исходных данных, построения графиков и вывода полученных значений. Внизу на данной форме расположена надпись «Вво-

димые значения». Ниже помещаются общие параметры, которые пользователь должен ввести для исследования работы системы.

Задаются количество каналов, число заявок, максимальная длина очереди и характеристика канала в виде среднее времени нахождения заявки у канала и время его обслуживания.

1. При имитационном моделировании для каждого канала рассчитываются:

1.2 Коэффициент загрузки канала(K_3);

1.3 Общий коэффициент загрузки системы

1.4 Вероятность отказа канала($W_{отк}$);

1.5 Общая вероятность отказа системы;

Общие параметры представлены в виде окон для ввода значений, с пояснением, какой параметр пользователь будет вводить в данное окно.

Пользователь должен ввести значения во все активные окна, перемещая курсор с помощью мыши, щелкая ею в том окне, куда он собирается ввести следующий параметр.

После того, как пользователь задал значения всех коэффициентов, он должен нажать на кнопку **«Построить графики»**. После нажатия на кнопку **«Построить графики»** происходит моделирование, на экране строятся графики зависимости коэффициента загрузки и вероятность отказа от времени, график скопления очереди от времени, и в специальных колонках числовые результаты(коэффициенты загрузок и отказа каждого из каналов).

В зависимости от количества указанных каналов, станет активным аналогичное количество графиков(параметры вводятся для всех каналов одни и те же).

Пользователь выбирает максимальную длину очереди, и в зависимости от выбора, будет построен график скопления очереди от времени.

Также происходит проверка корректности введенных значений.

Так как сумма вероятностей выхода заявки со станции по всем каналам должна быть равна единице, то по каждой станции проводится проверка

выполнения этого условия и значение приводится к корректному (вероятность последней, задаваемой по строке связи, считается как единица минус сумма вероятностей всех предыдущих связей по этой строке).

Если сумма вероятностей всех связей, кроме последней больше единицы, то пользователю выдается сообщение «**Введены не корректные данные (K загрузки + W отказа > 1)**» и все окна этой строки очистятся, после чего пользователь должен заново задать эти значения и повторить проверку корректности.

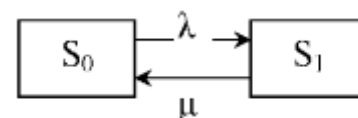


Рис.6.

Глава 3. Структура имитационных моделей систем массового обслуживания. Виды систем массового обслуживания

1. Одноканальная СМО с отказами

Здесь λ и μ – интенсивность потока заявок и выполнения заявок соответственно. Состояние системы S_0 обозначает, что канал свободен, а S_1 – что канал занят обслуживанием заявки. Размеченный граф состояний системы изображён на рисунке 6. Блок схема представлена на рис.7.

2. Одноканальная СМО с ограниченным числом очереди

В СМО с ограниченной очередью число мест m в очереди ограничено. Следовательно, заявка, поступившая в момент времени, когда все места в очереди заняты, отклоняется и покидает СМО. Блок схема представлена на рис.8.

3. Одноканальная СМО с неограниченной очередью

Примером такой СМО может служить очередь в булочной с одним кассиром. Блок схема представлена на рис.9.

4. N-канальная СМО с отказами

Пусть СМО содержит n каналов, интенсивность входящего потока заявок равна λ , а интенсивность обслуживания заявки каждым каналом равна μ . Размеченный граф состояний системы изображён на рисунке 10. Блок схема представлена на рис.11.

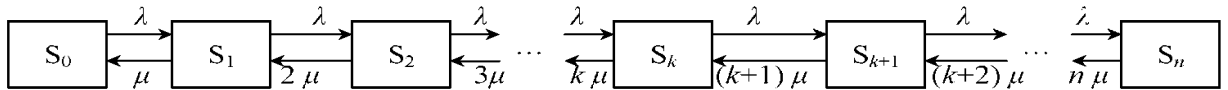


Рис.12.

5. N-канальная СМО с неограниченной очередью

Пусть на вход СМО, имеющей n каналов обслуживания, поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ . Интенсивность обслуживания заявки каждым каналом равна μ , а максимальное число мест в очереди равно m . Размеченный граф состояний системы изображён на рисунке 12. Блок схема представлена на рис.13.

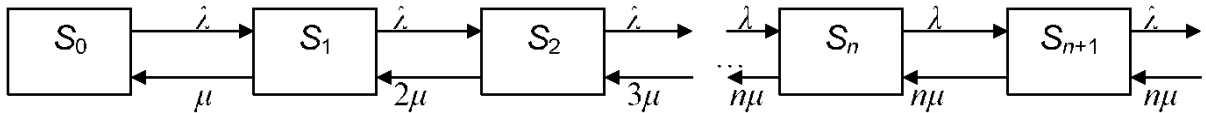


Рис.10.

Глава 4. Результаты

Рассмотрим СМО на примере задачи многоканальной СМО на примере магазина.

Магазин

Дан магазин, в котором требуется в зависимости от количества заявок и параметров их поступления, дать рекомендацию, сколько нужно каналов.

Дано:

1)600 заявок

2)Время между заявками от 60 секунд до 70 секунд

3)Время обслуживания от 60 секунд до 65 секунд

Решение:

а) Вначале возьмем одноканальную смо без отказов.

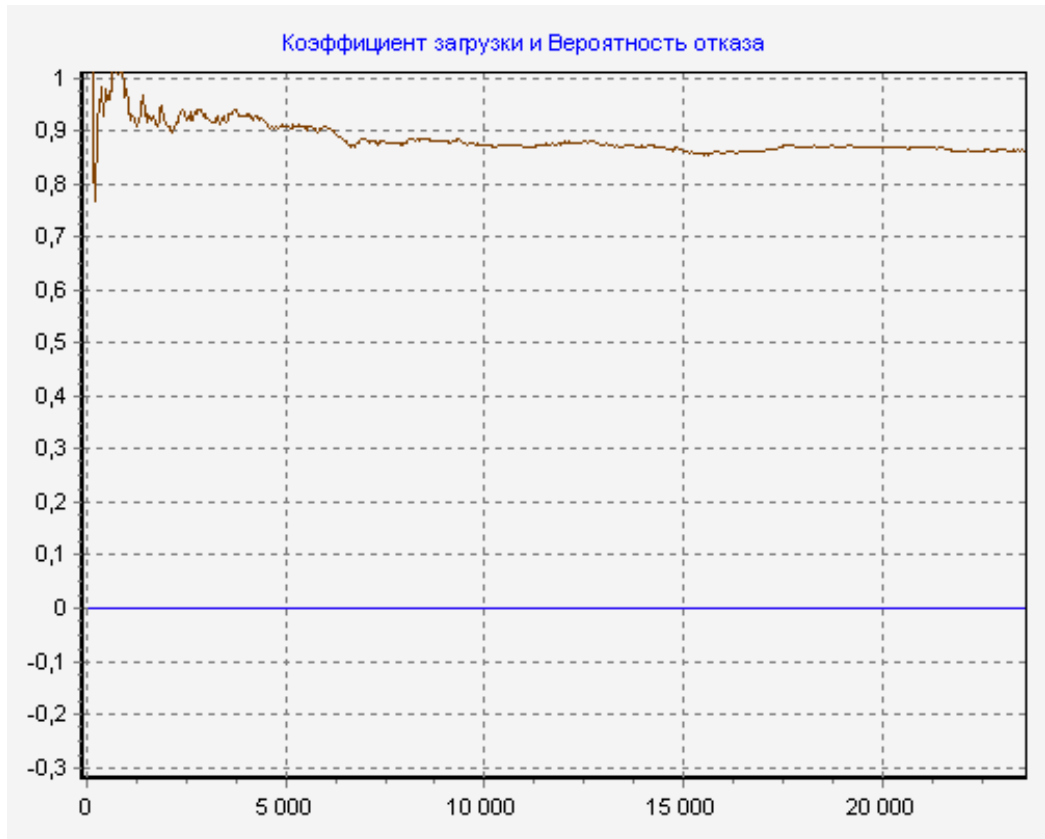
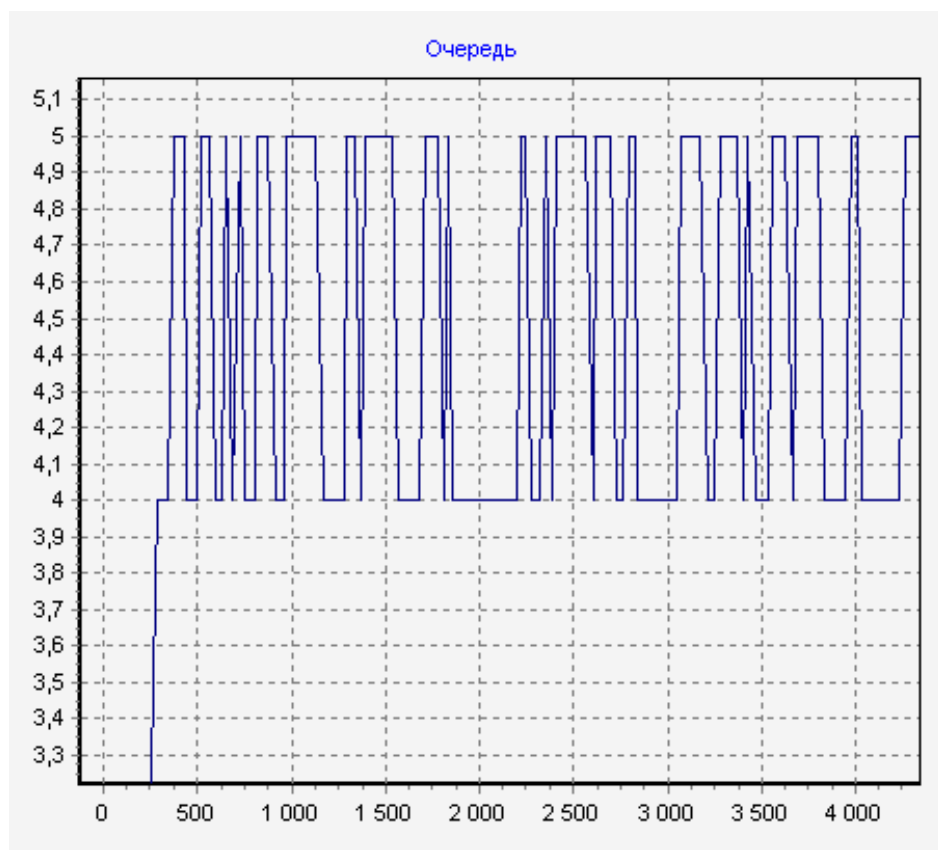


Рис. 17.



Wотк 1= Кз 1= Нобслуж 1=

Рис. 18.

Рис. 19.

б) Сейчас возьмем двухканальную смо без отказов.

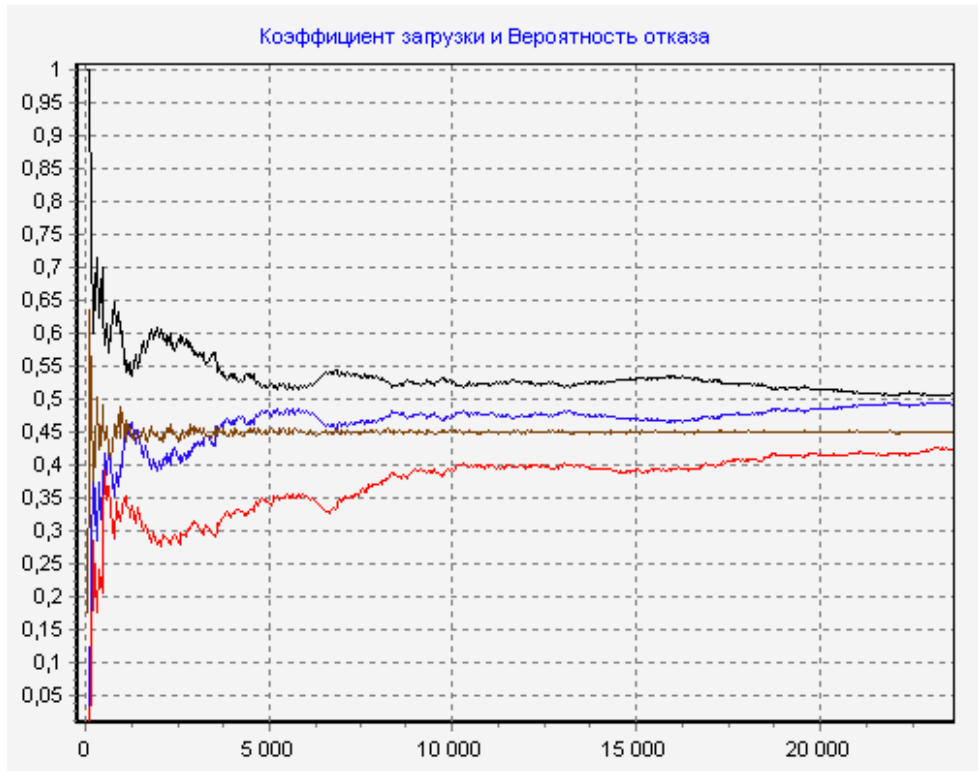


Рис. 20.



Рис

21.	Wотк 1= 0,49417637271	Кз 1= 0,45024697528579	Нобслуж 1= 303
	Wотк 2= 0,50582362728	Кз 2= 0,42692284672702	Нобслуж 2= 297

Рис. 22.

в) Сейчас возьмем трехканальную смо без отказов.

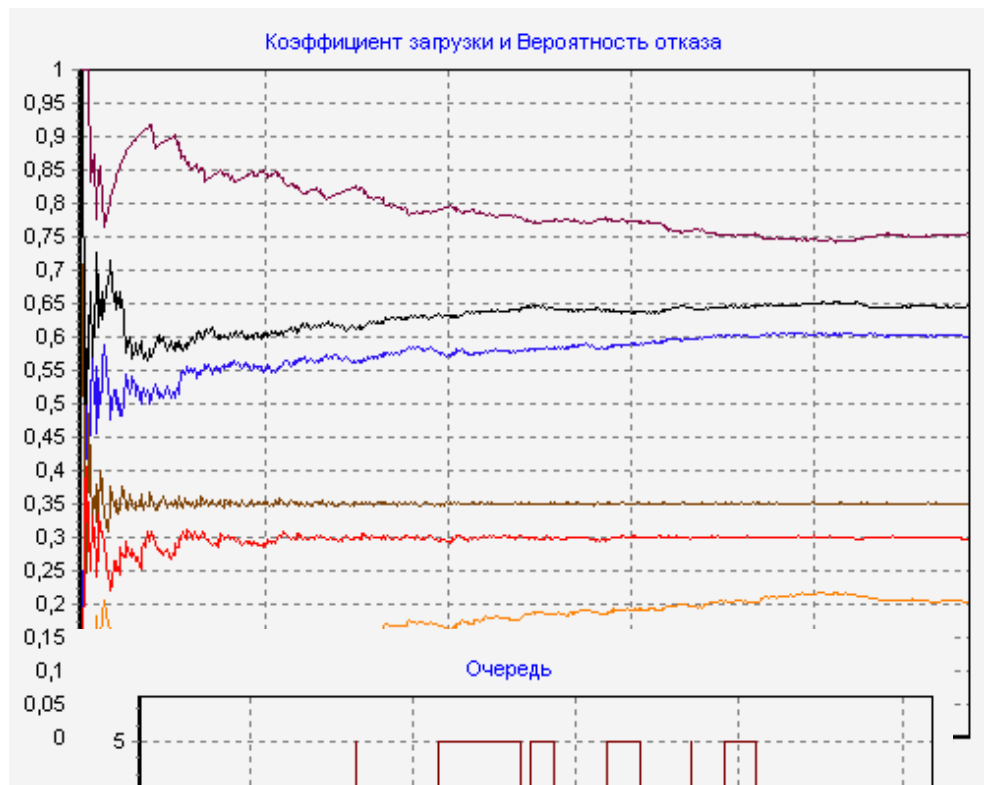


Рис. 23.

Wотк 1=	0,59900166389	Кз 1=	0,34972868691787	Нобслуж 1=	240
Wотк 2=	0,64559068219	Кз 2=	0,29746805713840	Нобслуж 2=	213
Wотк 3=	0,75540765391	Кз 3=	0,20248054847402	Нобслуж 3=	147

Рис. 24.

Рис. 25.

г) Сейчас возьмем четырехканальную смо без отказов.

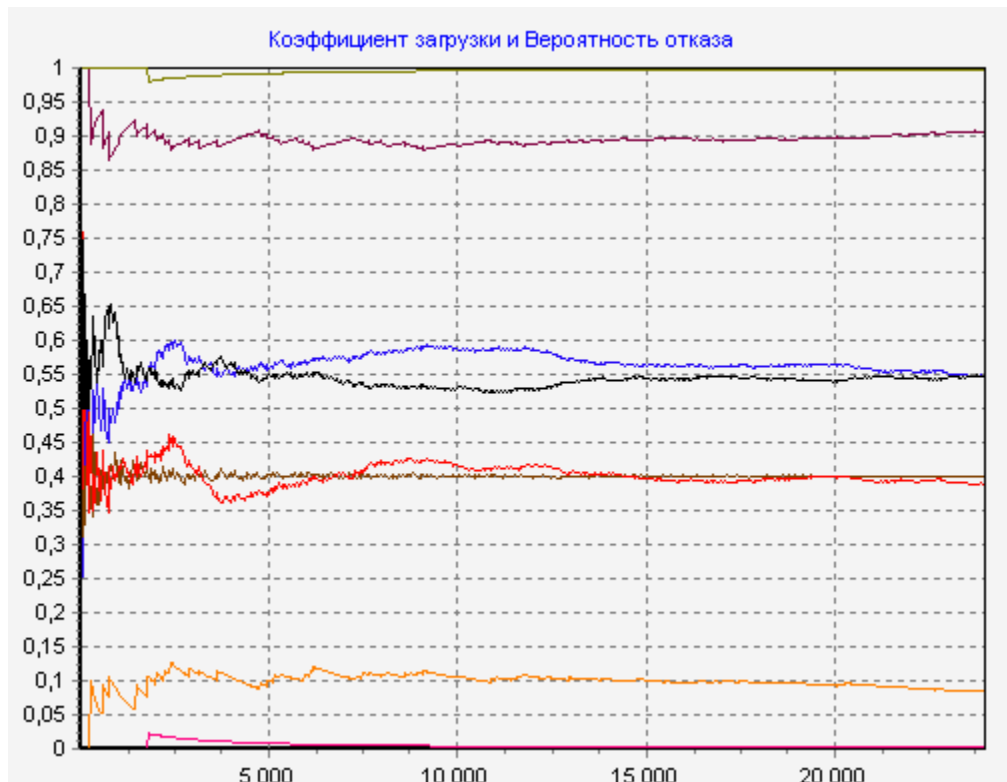


Рис. 26.

Wотк 1=	0,54742096505	Кз 1=	0,40071959906547	Нобслуж 1=	271
Wотк 2=	0,54908485856	Кз 2=	0,38815869415957	Нобслуж 2=	271
Wотк 3=	0,90515806988	Кз 3=	0,08574726536200	Нобслуж 3=	57
Wотк 4=	0,99833610648	Кз 4=	0,00171198995353	Нобслуж 4=	1

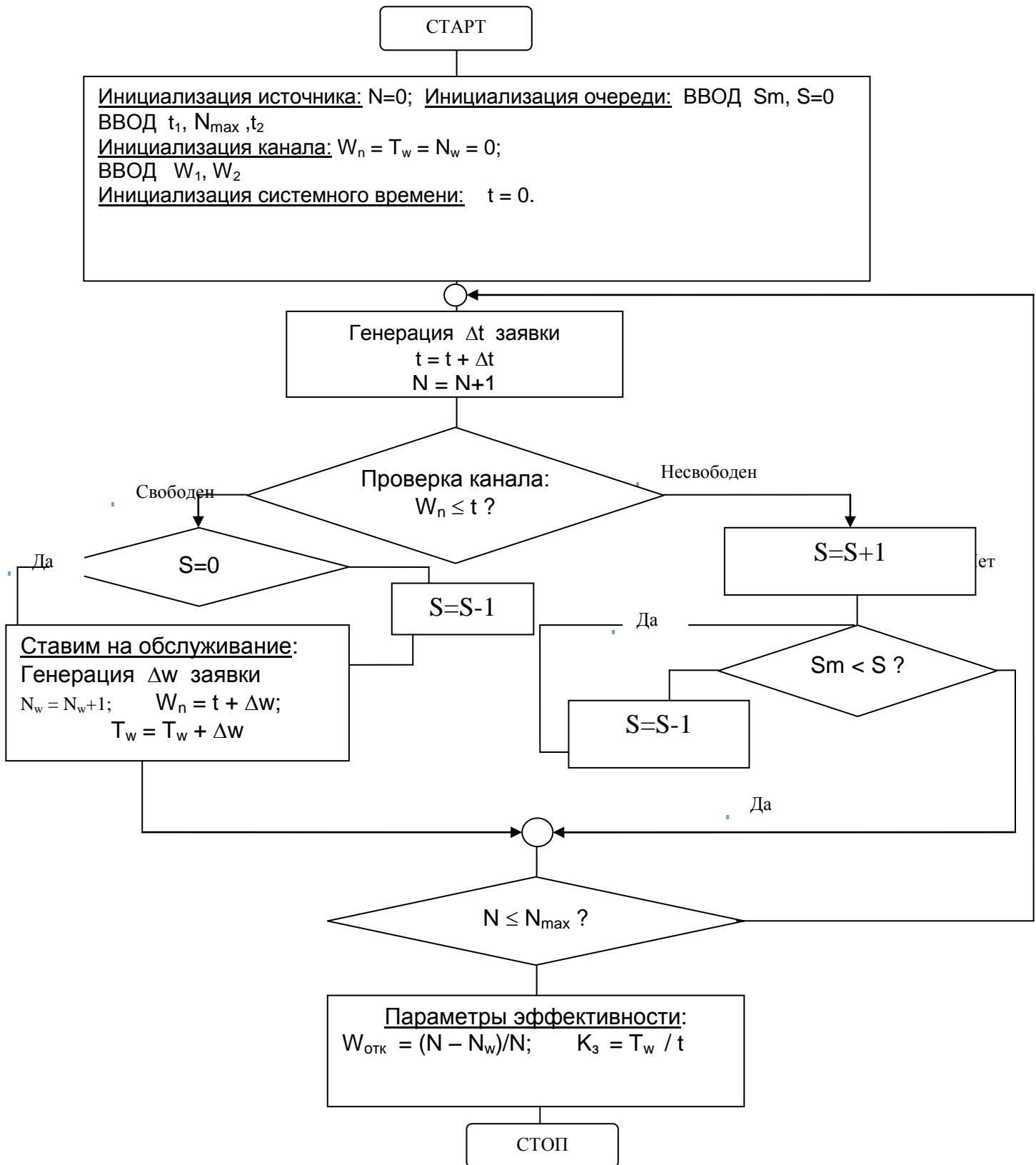
Рис. 27.

При первом и втором моделировании велик коэффициент загрузки, при четвертом можно увидеть, что четвертый канал простаивает. Значит для данной смо оптимально три канала.

Список литературы

- 1) Введение в математическое моделирование. Учебное пособие под редакцией проф. П.В.Трусова
- 2) Мангейм Дж.Б., Рич Р.К. Политология. Методы исследования.
- 3) Пронин Л. Н., Филиппов Н. А. Случайные величины. Элементы теории массового обслуживания — СПб, 1995

Приложение



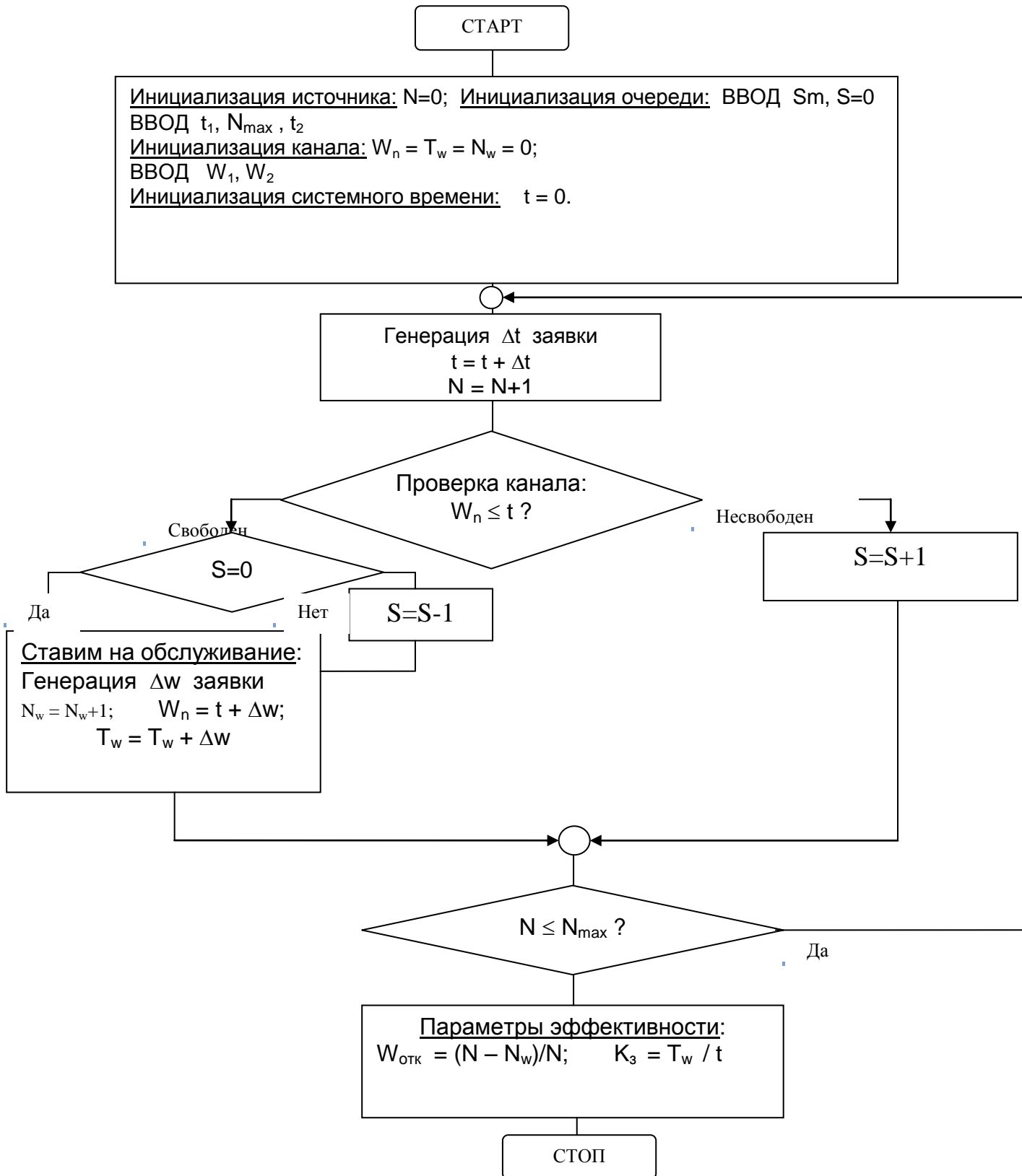


Рис.8.Блок схема одноканальной СМО с ограниченной очередью

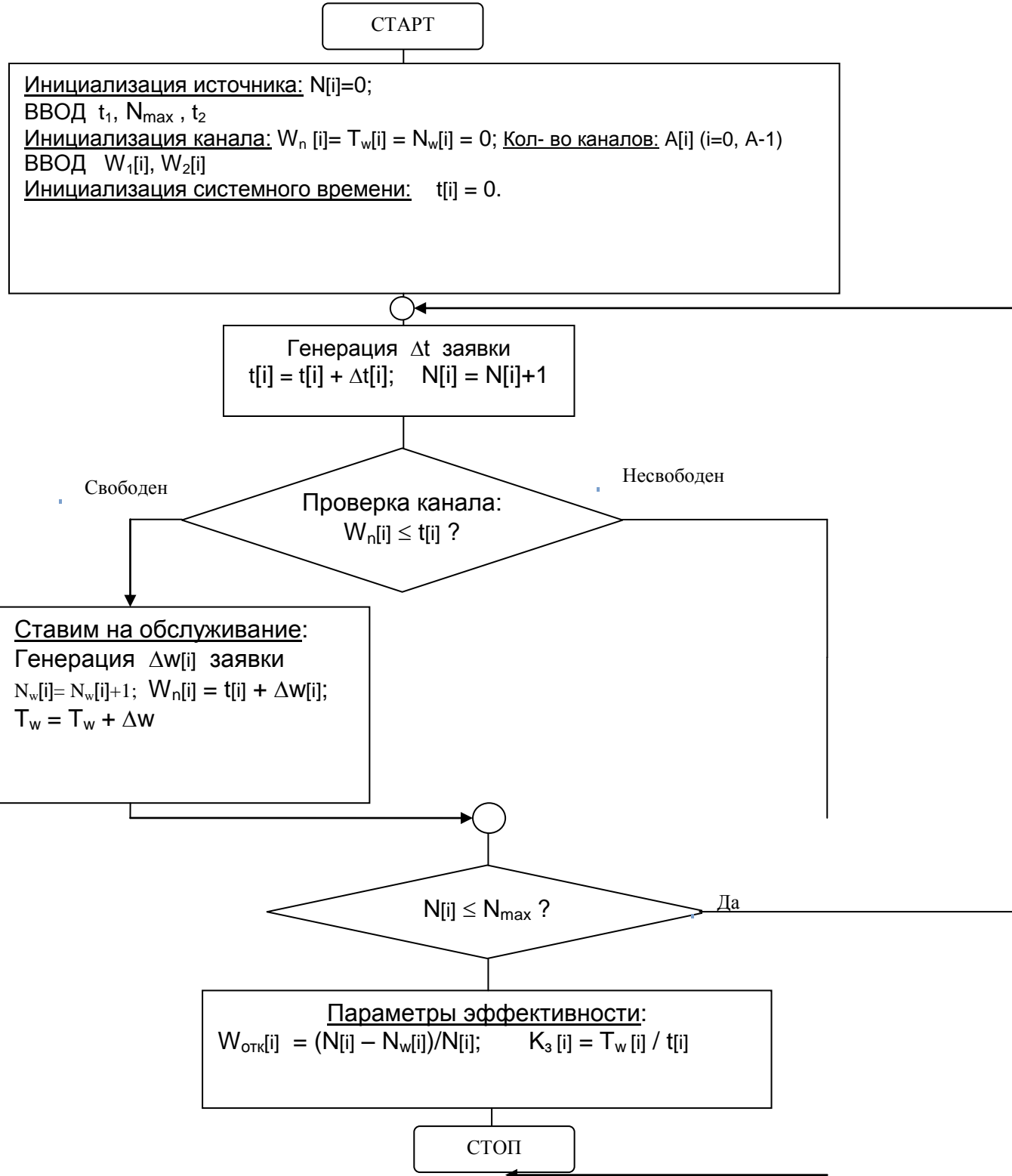


Рис.9.Блок схема одноканальной СМО с неограниченной очередью

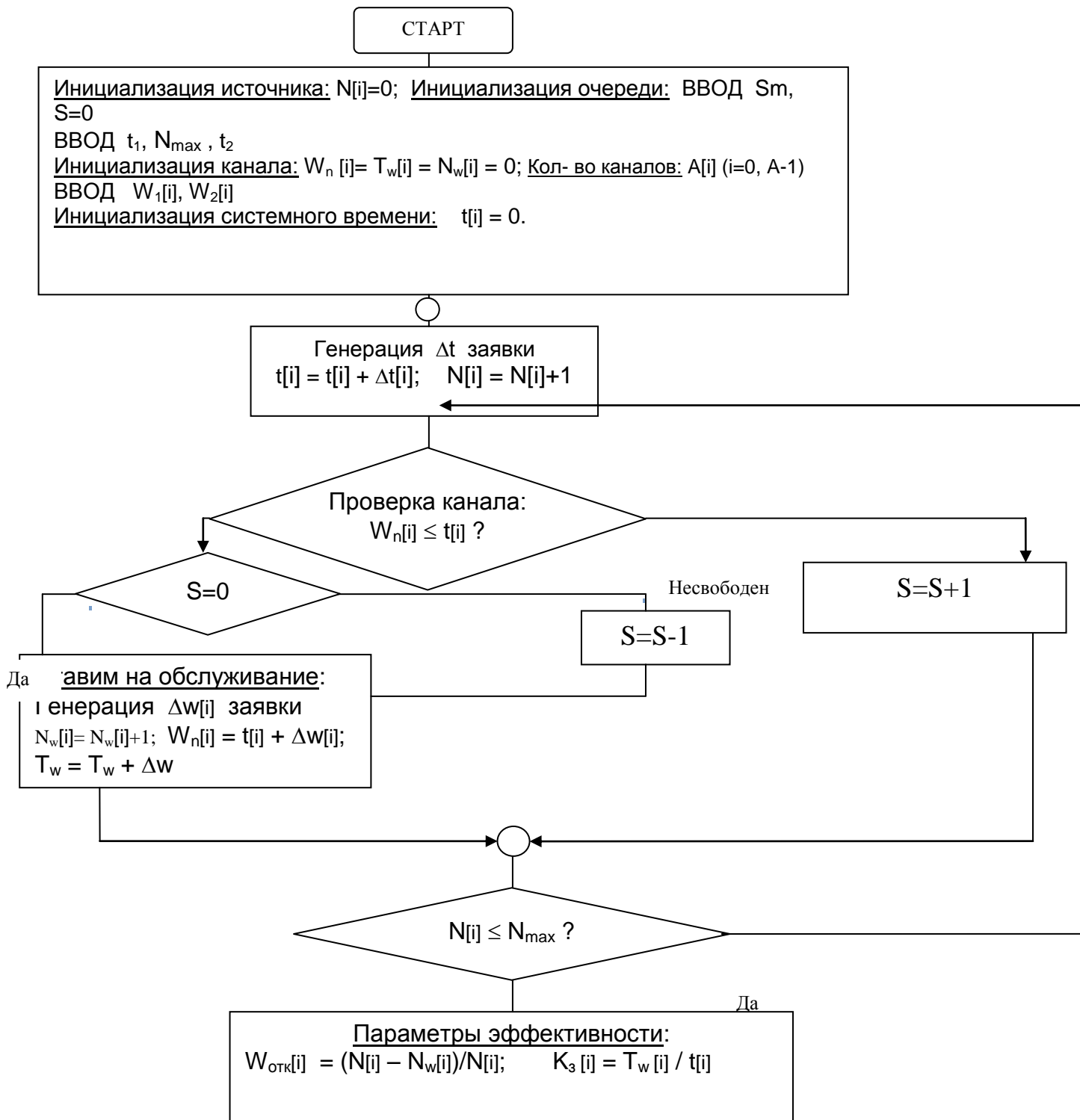


Рис.13.Блок схема n-канальной СМО с неограниченной очередью

СТОП

Рис.11.Блок схема n-канальной СМО с отказами