

Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ учащихся  
«Прикладные вопросы математики»

Математическое моделирование

**Статический анализ конструкции балочного  
моста. Модифицированный метод**

Булаев Артем Валерьевич  
МОУ «Лицей №1» г. Перми, 11 кл.  
Волегов Павел Сергеевич  
к.ф.-м.н., доц. каф. ММСП  
ПНИПУ

Пермь  
2011

## Оглавление

Введение.....	стр. 3
Глава 1. Концептуальная постановка задачи моделирования.....	стр. 6
Глава 2. Математическая постановка задачи моделирования	
§1. Модифицированный метод подсчета однопролетного.	
моста.....	стр. 16
§2. Модифицированный метод подсчета двухпролетного	
моста.....	стр. 20
Список литературы.....	стр. 24

## Введение

Мост – одно из важнейших изобретения человека. Мосты существуют так же давно, как и сам человек. Их используют для различных целей: переправки людей, грузов через моря, пропасти, дороги и т.д. Мосты бывают различных видов. Самые распространенные из них – это балочные. Но какой мост будет самым надежным, удобным и дешевым?

Следует отметить, что именно с натуральных моделей мостов в середине XIX века моделирование стало развиваться как научная дисциплина, а сами модели – активно использоваться при проектировании новых конструкций. Оказывается, что использование балочных мостов требует принципиального изменения конструкции моста. В первую очередь это осознали строители. Как известно, во время пробок на мосту, жизнь людей зависит от прочности конструкции моста. Для балочных мостов положение равновесия определяется количеством балок. Поэтому чем выше требуемая прочность моста, тем большее количество балок необходимо использовать в конструкции. Все это утяжеляло мост и снижало его устойчивость с весом транспорта. Учитывая, что строительство одного моста занимало несколько лет, а его стоимость была весьма значительной, можно понять стремление строителей найти более быстрый и дешевый (по сравнению с традиционным методом проб и ошибок) способ поиска оптимальных параметров моста. Выход был найден в моделировании. Протягивая в бассейнах небольшие модели мостов и, измеряя силу сопротивления в балках, были найдены рациональные решения, как по форме, так и по мощности силовой установки.

В мире повсюду применяют мосты балочных типов (см. рис. 1).



Рис.1 Примеры балочных мостов [www.yandex.ru/image]

Актуальность работы заключается в необходимости исследовании моста на прочность для применения в строительстве наиболее надежных конструкций. Для этого нужно определить наиболее точный и действенный метод из существующих методов, доказать его применимость. Создадим для этого модель двухпролетного моста с одним уровнем.

Модель — это инструмент, ориентированный в первую очередь на исследование поведения и свойств конкретного объекта в целях управления этим объектом или предсказания его свойств [www.wikipedia.org].

Итак, разрабатываемая модель нужна для того, чтобы:

1. Понять, как устроен конкретный объект: какова его структура, внутренние связи и взаимодействия, свойства, законы существования, взаимодействие с другими объектами.
2. Научиться контролировать и управлять объектом и его поведением, определять наилучшие позиции, конструкции данного объекта при заданных целях или условиях.
3. Прогнозировать последствия реализации заданных условий и форм воздействия на объект других объектов.

**Целью** данной работы является разработка математической модели балочного моста, построенной на основе силового подхода, позволяющей определить наиболее надежную конструкцию моста.

Для этого нам необходимо:

1. Провести анализ моста в состоянии равновесия;
2. Вычислить силы реакции в шарнирах;
3. Определить характер сил действующих в балках (растяжение, сжатие);
4. Провести анализ и обобщение всего накопленного материала, разработка общего плана, создания математической модели.

## 1. Концептуальная постановка задачи моделирования

Статический анализ конструкции проведем при следующих допущениях:

- Объектом исследования является балочный мост (рис. 2).
- Балки крепятся с помощью шаровых шарниров.
- Все элементы конструкции будем считать абсолютно твердыми телами, т.е. пренебрегаем их деформациями при нагружении внешними усилиями.
- Пренебрегаем наличием люфта и трения в шарнирах.
- Скрепляется конструкция идеальными шарнирами, т.е. они представлены в виде материальных точек, в которых трение отсутствует
- На конструкцию не действуют внешние силы, кроме силы тяжести, приложенной к центру масс каждой балки.

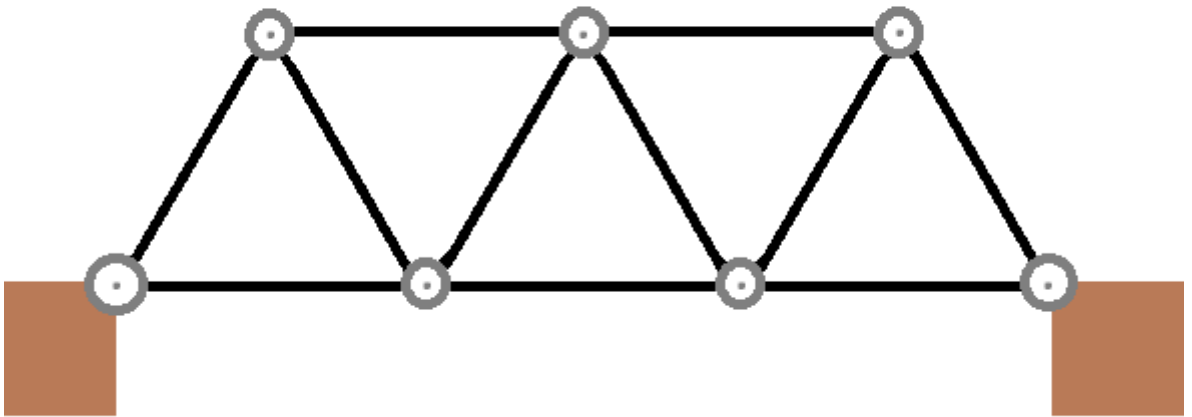


Рис. 2 Принципиальная схема конструкции

Мост состоит из балок, соединяющихся с помощью шаровых шарниров (рис. 2). К опорам мост крепится также с помощью двух шаровых шарниров. Балки в мосту составляют правильный треугольник, что способствует сохранению форм моста при изменении нагрузки на него и

воздействия силы земного притяжения. Известны геометрические размеры и характеристики элементов конструкции моста [www.docklad.ru]:

Обозначение стандарта: ГОСТ 19425-74

Статус стандарта: действующий

Название: Балки двутавровые и швеллеры стальные специальные.

Область и условия применения: Настоящий стандарт

распространяется на горячекатаные двутавровые балки для подвесных путей, армировки шахтных стволов и швеллеры для автомобильной промышленности

Взамен в части: ГОСТ 5157-53 в части балок двутавровых для подвесных путей

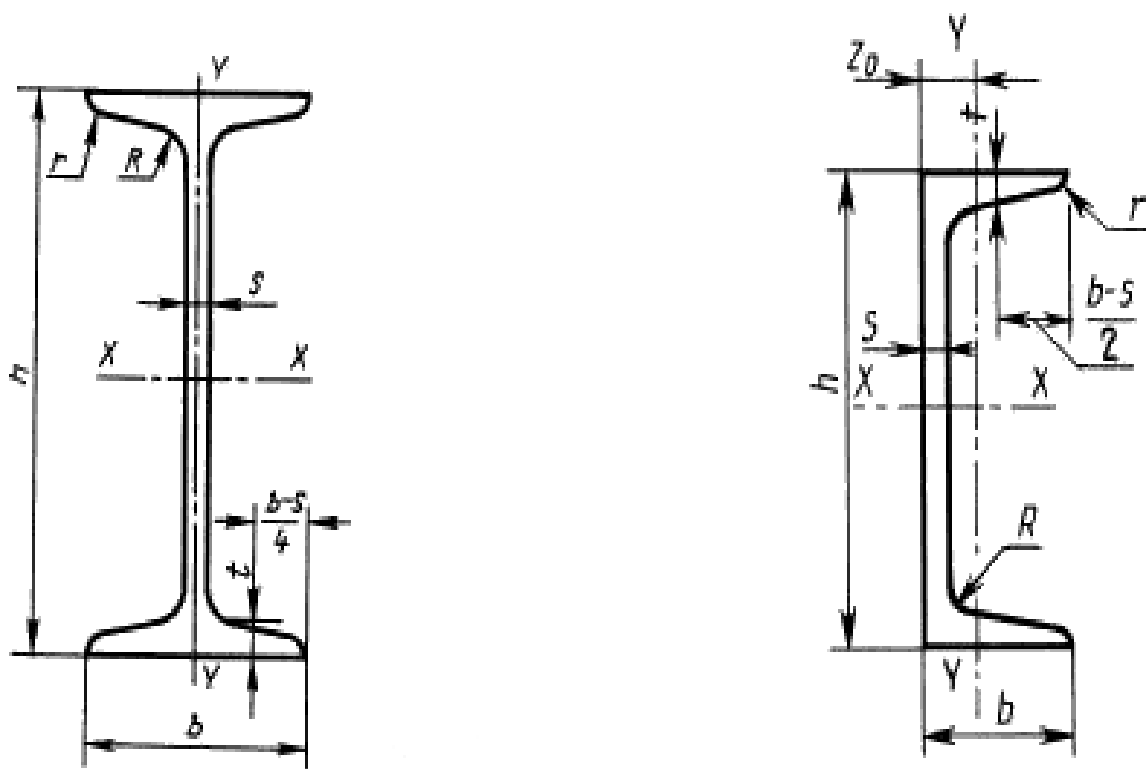


Рис. 3 Профиль двутавра (балки).

## Основные размеры и характеристики размеров балок ГОСТ 19425

<i>h</i>	<i>b</i>	<i>s</i>	<i>t</i>	<i>R</i>	<i>r</i>	Площадь поперечного сечения, см <sup>2</sup>	Масса 1 м, кг	Справочные величины для осей						<i>z</i> <sub>0</sub> , см	
								<i>x - x</i>				<i>y - y</i>			
								<i>I</i> <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	<i>W</i> <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	<i>i</i> <sub>x</sub> , см	<i>S</i> <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	<i>I</i> <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	<i>W</i> <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>		<i>i</i> <sub>y</sub> , см
мм															

### Балки двутавровые

140	80	5,5	9,1	7,5	3,8	21,5	16,9	712	102	5,75	58,4	61,8	16,2	1,74	-
200	100	7,0	11,4	9,0	4,5	35,6	27,9	2370	237	8,16	136	159	31,8	2,11	-
200	102	9,0	11,4	9,0	4,5	39,6	31,1	2500	250	7,95	146	170	33,3	2,07	-
220	110	7,5	12,3	9,5	4,8	42,1	33,1	3400	310	9,00	178	228	41,5	2,32	-
270	122	8,5	13,7	10,5	5,3	54,5	42,8	6550	485	11,0	279	346	56,7	2,52	-
270	124	10,5	13,7	10,5	5,3	59,9	47,0	6870	507	10,7	297	366	59,0	2,47	-
360	140	14,0	15,8	12,0	6,0	90,9	71,3	17360	964	13,8	574	618	88,3	2,61	-
180	90	7,0	12,0	9,0	3,5	32,9	25,8	1760	196	7,32	113	130	28,9	1,99	-
240	110	8,2	14,0	10,5	4,0	48,7	38,3	4640	387	9,75	223	276	50,2	2,38	-
300	130	9,0	15,0	12,0	6,0	64,0	50,2	9500	633	12,2	364	480	73,9	2,74	-
360	130	9,5	16,0	14,0	6,0	73,8	57,9	15340	852	14,4	493	518	79,7	2,65	-
450	150	10,5	18,0	16,0	7,0	98,8	77,6	31900	1420	18,0	821	892	119	3,00	-

### Швеллеры

180	68	7,0	10,5	10,5	5,3	25,7	20,2	1272	141	7,04	83,5	98,5	20,1	1,96	1,88
180	70	9,0	10,5	10,5	5,3	29,3	23,0	1370	152	6,84	91,6	111	21,3	1,95	1,84
200	73	7,0	11,0	11,0	5,5	28,8	22,6	1780	178	7,86	104,7	128	24,2	2,11	2,01
300	87	9,5	13,5	13,5	6,8	49,6	39,1	6500	433	11,4	259,7	289	44,0	2,41	2,13

*h* - высота;

*b* - ширина полки;

*s* - толщина стенки;

*t* - средняя толщина полки;

*R* - радиус внутреннего закругления;

*r* - радиус закругления полки;

*I* - момент инерции;

*W* - момент сопротивления;

*i* - радиус инерции;

*S* - статический момент полусечения;

*z*<sub>0</sub> - расстояние от оси *y - y* до наружной грани стенки.



## 2. Математическая постановка задачи моделирования

2.1 Применим другой метод определения направления сил. Модифицированный, суть его заключается в том что, мы будем рассматривать каждую балку отдельно, как каждая балка действует на каждую. Направим силы вдоль стержней. Сила реакции опоры всегда действует перпендикулярно земле.

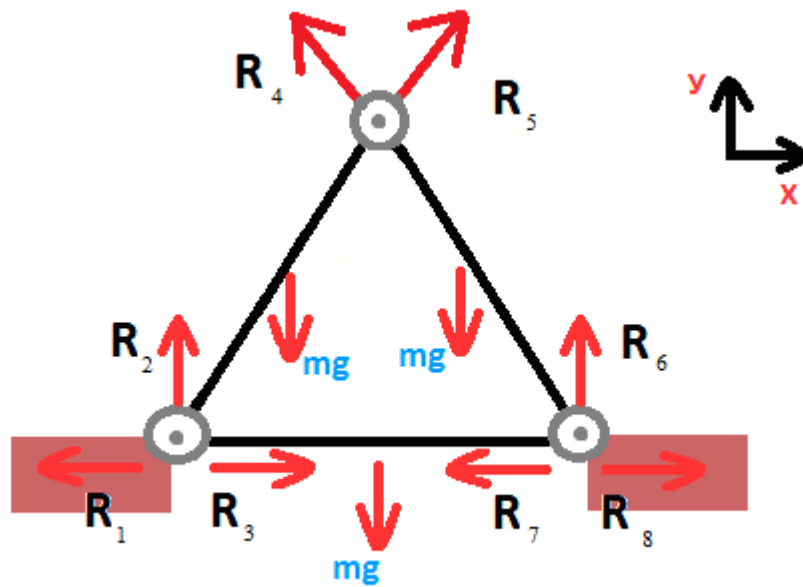


Рис. 5 Статический анализ конструкции

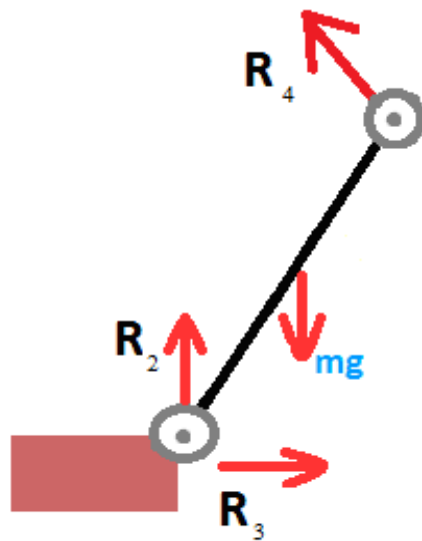


Рис. 6 Силы действ. на левую балку

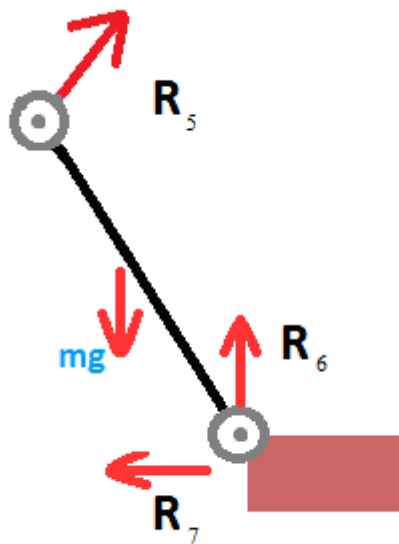
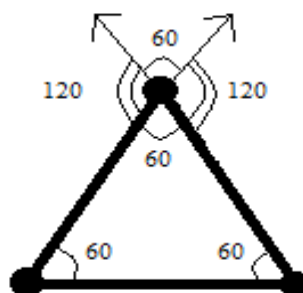


Рис. 7 Силы действ. на правую балку



Рис. 8 Силы действ. на основную балку

Для верного проецирования сил на оси отметим углы между векторами силами и самими осями по основным правилам.  $\alpha + \beta + \gamma = 180$  - сумма углов в треугольнике развертка круга составляет  $360^\circ$



## Рис. 9 Расположение углов

Если спроецировать все силы на оси X и Y и записать уравнения сил, то мы получаем следующие формулы

$$\begin{aligned} -R_4 * \cos 60 + R_3 &= 0 \\ \text{X: } R_1 &= R_8, \\ R_4 * \cos 120 - R_7 &= 0 \\ R_2 - mg + R_4 * \cos 30 &= 0 \\ \text{Y: } R_2 + R_6 - mg &= 0, \\ R_6 - mg + R_5 * \cos 30 &= 0 \end{aligned}$$

На основе уравнений проекций мы можем записать уравнения моментов всех сил.

1) Примем за ось вращения точку приложения сил  $R_1, R_2, R_3$  (левая балка)

$$\begin{aligned} \text{M: } mg * l / 4 &= R_4 * l * \sqrt{3} / 2, \\ R_4 &= mg / 2\sqrt{3} \\ R_3 &= mg / 4\sqrt{3} \\ R_2 &= mg - mg / 4 = 3mg / 4 \end{aligned}$$

2) Примем за ось вращения точку приложения сил  $mg$  (нижняя балка)

$$\begin{aligned} \text{M: } R_2 * l / 2 &= R_6 * l / 2, \\ R_4 &= R_6 = mg / 2 \end{aligned}$$

3) Примем за ось вращения точку приложения сил  $R_6, R_7, R_7$  (правая балка)

$$\begin{aligned} \text{M: } mg * l / 4 &= R_5 * l * \sqrt{3} / 2, \\ R_5 &= mg / 2\sqrt{3} \\ R_7 &= mg / 4\sqrt{3}, \\ R_6 &= 3mg / 4 \end{aligned}$$

По формуле:  $T = \sqrt{(R_{x_1} - R_{x_2})^2 + (R_{y_1} - R_{y_2})^2}$  находим реакции в балках

1)

$$T_1 = \sqrt{(R_2 - R_4 \cos 30)^2 + (R_3 - (-R_4 \cos 60))^2} \leftrightarrow$$

$$\sqrt{\left(\frac{3mg}{4} - \frac{mg}{2\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{mg}{4\sqrt{3}} + \frac{mg}{2\sqrt{3}} * \frac{1}{2}\right)^2} \leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{4mg^2}{16}\right) + \left(\frac{mg^2}{12}\right)} = \sqrt{\frac{mg^2}{3}} = 0,6mg$$

2)

$$T_2 = \sqrt{(R_6 - R_5 \cos 30)^2 + (R_7 - (-R_5 \cos 60))^2} \leftrightarrow$$

$$\sqrt{\left(\frac{3mg}{4} - \frac{mg}{2\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{mg}{4\sqrt{3}} + \frac{mg}{2\sqrt{3}} * \frac{1}{2}\right)^2} \leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{4mg^2}{16}\right) + \left(\frac{mg^2}{12}\right)} = \sqrt{\frac{mg^2}{3}} = 0,6mg$$

3)

$$T_3 = \sqrt{(R_1 - (-R_8))^2} \leftrightarrow$$

$$\sqrt{(R_1 + R_8)^2} \leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{mg}{4} + \frac{mg}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{mg}{2}\right)^2} = 0,5mg$$

Балка	Сила реакции	Вид реакции
Правая наклонная (№1)	0,6*mg	Сжатие
Левая наклонная (№2)	0,6*mg	Сжатие
Основная (№3)	0,5*mg	Сжатие

**Итог: При расчете сил новым методом было установлено, что во всех балках моста действует сила сжатия, поэтому мост не разрушается. Конструкция моста в соответствии с ГОСТ'ом выдерживает нагрузки.**

2.2 Применим метод определения направления сил для двухпролетного моста. Направим силы вдоль стержней. Сила реакции опоры всегда действует перпендикулярно земле.

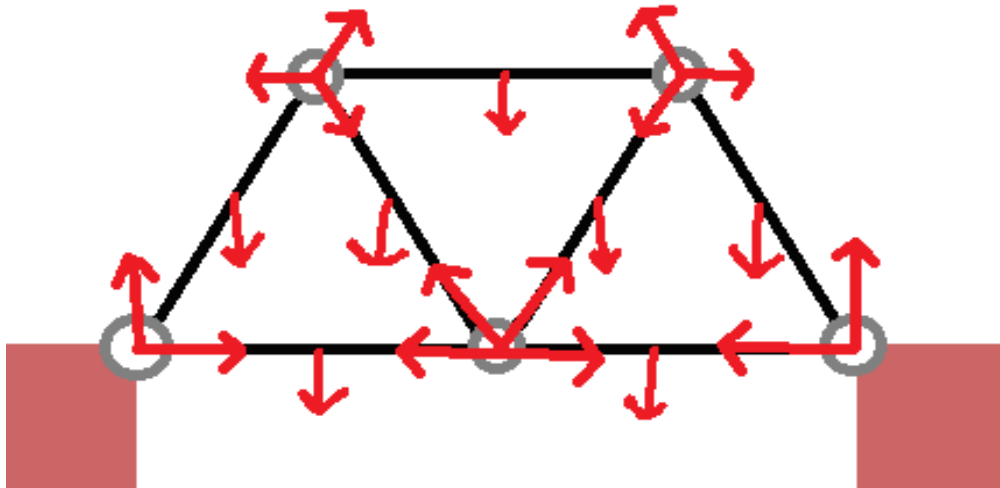


Рис. 10 Расположение сил

Спроецируем все силы по осям X и Y.

$$\begin{aligned}
 & (R_1 + R_2) \cos 60 - (R_4 + R_5) \cos 60 = 0 \\
 & R_6 - R_0 + R_2 \cos 60 = 0 \\
 & R_7 - R_0 - R_8 + (R_1 + R_{10}) \cos 60 = 0 \\
 \text{X} \quad & R_0 + R_7 - R_8 - (R_4 + R_{11}) \cos 60 = 0 \\
 & R_0 - R_{12} - R_5 \cos 30 = 0 \\
 & R_7 + R_{10} \cos 60 - (R_{11} + R_{13}) \cos 60 = 0 \\
 & R_{10} \cos 60 + R_{14} \cos 60 - R_{11} \cos 60 - R_8 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (R_1 + R_4) \cos 30 - (R_2 + R_5) \cos 30 - mg = 0 \\
 & R_9 - mg - R_2 \cos 30 = 0 \\
 & (R_1 + R_{10}) \cos 30 - mg = 0 \\
 \text{Y} \quad & (R_4 + R_{11}) \cos 30 - mg = 0 \\
 & R_9 - mg - R_5 \cos 30 = 0 \\
 & R_{19} - mg + (R_{11} = R_{10} - R_{13}) \cos 30 = 0 \\
 & R_{14} - mg + (R_{11} + R_{10} - R_{14}) \cos 30 = 0
 \end{aligned}$$

Составляя уравнения моментов для каждой балки, мы получаем следующее:

$$\begin{aligned}
& l * mg / 2 + l * \sqrt{3} / 2 (R_2 - R_1) = 0 \\
& (R_2 - R_0) * l * \sqrt{3} / 2 + l * mg / 4 = 0 \\
\text{M} \quad & l * mg / 4 + (R_0 - R_1) * l * \sqrt{3} / 2 = 0 \\
& mg * l / 4 + (R_0 - R_4) * l * \sqrt{3} / 2 = 0 \\
& mg * l / 4 + (R_5 - R_0) * l * \sqrt{3} / 2 = 0 \\
& (R_{10} + R_{11}) * \sqrt{l} / 2 = mg * l / 2
\end{aligned}$$

Выразив из уравнений моментов все силы, мы высчитываем силу реакции в

балках по формуле  $T = \sqrt{(R_{x_1} - R_{x_2})^2 + (R_{y_1} - R_{y_2})^2}$ :

1)

$$\begin{aligned}
T_1 &= \sqrt{((R_1 \cos 60 + R_2 \cos 60) - (-R_4 \cos 60 - R_5 \cos 60))^2 + ((R_1 \cos 30 - R_2 \cos 30) - (R_4 \cos 30 - R_5 \cos 30))^2} \\
&\leftrightarrow \sqrt{\left(\left(\frac{3mg}{2\sqrt{3}} * \frac{1}{2} + \frac{mg}{2\sqrt{3}} * \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3mg}{2\sqrt{3}} * \frac{1}{2} + \frac{mg}{2\sqrt{3}} * \frac{1}{2}\right)\right)^2 +} \\
&\quad \left(\left(\frac{3mg}{2\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3mg}{2\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{mg}{2\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{mg}{2\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2} \\
&\leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{2mg}{\sqrt{3}}\right)^2 + (mg)^2} \leftrightarrow \sqrt{\frac{4mg^2}{3} + mg^2} \leftrightarrow mg\sqrt{\frac{7}{3}} \leftrightarrow 1,73 * mg
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
T_2 &= \sqrt{(R_9 - (-R_2 \cos 30))^2 + (R_6 - (-R_0))^2} \leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{5mg}{4} + \frac{mg}{2\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3mg}{4\sqrt{3}} + \frac{mg}{\sqrt{3}}\right)^2} \\
&\leftrightarrow \sqrt{\frac{36mg^2}{16} + \frac{49mg^2}{36}} \leftrightarrow mg\sqrt{\frac{36}{16} + \frac{49}{36}} \leftrightarrow 1.9 * mg
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
T_2 &= \sqrt{((R_7 + R_{10} \cos 30 - R_1 \cos 30) - (R_0 + R_8))^2 + (R_{10} \cos 60 - R_1 \cos 60)^2} \\
&\leftrightarrow \sqrt{\left(\left(\frac{mg}{2\sqrt{3}} + \frac{mg}{2\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3mg}{2\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{mg}{\sqrt{3}} + \frac{mg}{2\sqrt{3}}\right)\right)^2 + \left(\frac{mg}{2\sqrt{3}} * \frac{1}{2} - \frac{3mg}{2\sqrt{3}}\right)^2} \\
&\leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{mg(1 + \sqrt{3})}{2\sqrt{3}} + \frac{3mg}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\frac{5mg}{4\sqrt{3}}\right)^2} \leftrightarrow \sqrt{\frac{32mg^2}{12} + \frac{25mg^2}{36}} \leftrightarrow mg\sqrt{\frac{32}{12} + \frac{25}{36}} \\
&\leftrightarrow 1.8 * mg
\end{aligned}$$

4)

$$T_3 = \sqrt{(R_{10} \cos 60 + R_7 - (-R_{11} \cos 60 - R_{13} \cos 60))^2 + (R_{19} + (R_{11} + R_{10}) \cos 30 - R_{13} \cos 30)^2}$$

$$\leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{mg}{2\sqrt{3}} * \frac{1}{2} + \frac{mg}{2\sqrt{3}} + \frac{mg}{2\sqrt{3}} * \frac{1}{2} + \frac{mg}{\sqrt{3}} * \frac{1}{2}\right)^2 + \left(mg + \left(\frac{mg}{\sqrt{3}}\right) \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{mg}{\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$\leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{7mg}{4\sqrt{3}}\right)^2 + (mg)^2} \leftrightarrow mg\sqrt{\frac{49}{36} + 1} \leftrightarrow 1.5mg$$

Балка	Сила реакции	Вид реакции
Крышка(№1)	1.73*mg	Сжатие
Правая балка(№2)	1.9*mg	Сжатие
Внутр. правая (№3)	1.8*mg	Растяжение
Основание правая(№4)	1.5*mg	Растяжение
Основание левая	1.5*mg	Сжатие
Внутр. левая	1.8*mg	Сжатие
Левая балка	1.9*mg	Сжатие

**Итог: При расчете сил новым методом было установлено, что во всех балках моста действуют силы сжатия и растяжения, поэтому мост не разрушается.**

**Конструкция моста в соответствии с ГОСТ'ом выдерживает нагрузки.**

## Список литературы

1. *Трусов П. В.* Введение в математическое моделирование. Учебное пособие – М.: "Логос". 2003.
2. *Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д.* Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. — М.: Финансы и статистика, 1983. 471с.