Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ учащихся

«Прикладные вопросы математики»

Алгебра

Методы извлечения квадратного корня

Бурсук В.О.,

МАОУ «Лицей № 10» г. Пермь, 9 кл.

Арестова А.В.,

учитель математики

МАОУ «Лицей № 10» г. Пермь

Содержание

Введение

В ходе решения некоторых математических задач приходится оперировать с квадратными корнями. Поэтому важно знать правила действий с квадратными корнями и научиться преобразовывать выражения, их содержащие. Мне показалась достаточно интересной тема «Методы извлечения квадратного корня».

Данная тема актуальна, так как задания с квадратными корнями есть в каждом классе общеобразовательных школ, лицеев, колледжей. Многие геометрические задачи, задачи по физике, химии и биологии решаются с помощью уравнений, содержащих квадратные корни. Уравнения решали двадцать пять веков назад. Они создаются и сегодня – как для использования в учебном процессе, так и для конкурсных экзаменов в вузы, для олимпиад самого высокого уровня.

Для извлечения квадратного корня существуют таблицы квадратов для двухзначных чисел, можно разложить число на простые множители и извлечь квадратный корень из произведения. Таблицы квадратов бывает недостаточно, извлечение корня разложением на множители - трудоёмкая задача, которая тоже не всегда приводит к желаемому результату. Я постаралась найти способы, которые бы позволили извлечь квадратный корень в любом случае.

Цель: изучить методы извлечения квадратного корня.

Задачи исследования:

1. Познакомиться с историей квадратного корня
2. Исследовать способы извлечения квадратного корня
3. Постараться применить их на практике

1. История квадратного корня

Квадратный корень из числа а, — это такое число, квадрат которого равен a , то есть решение уравнения относительно переменной x . $\sqrt{a} = x$; $x^2 = a$.

Квадратным корнем называют также функцию √x вещественной переменной x, которая каждому x≥0 ставит в соответствие арифметическое значение корня (рис. 1) [4]

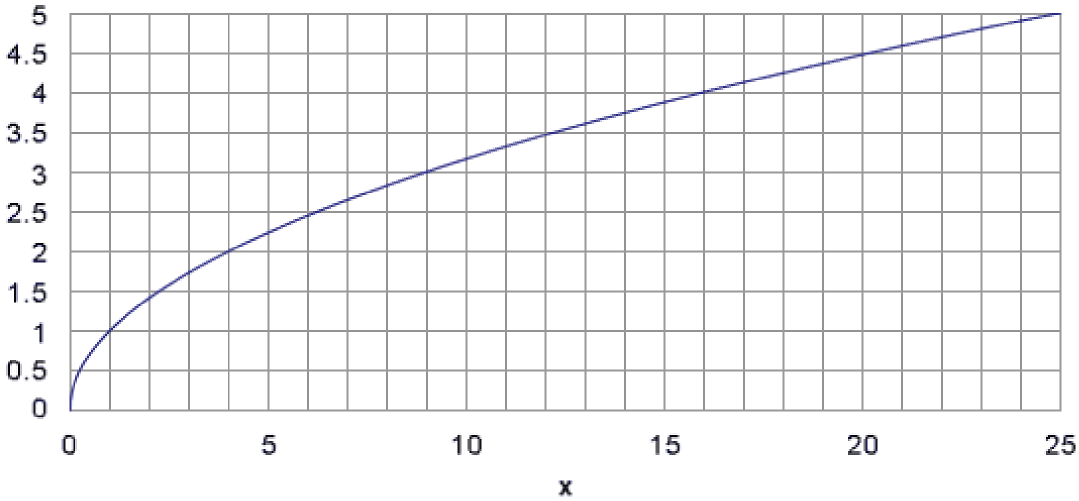

Рис. 1. График функции √x

Знак корня происходит из строчной латинской буквы r (начальной в лат. radix — корень), сросшейся с надстрочной чертой: ранее, надчёркивание выражения использовалось вместо нынешнего заключения его в скобки. Так что $\sqrt{a+b}$ есть всего лишь видоизменённый способ записи выражения r$\overline{a+b}$.

Впервые такое обозначение использовал немецкий математик Томас Рудольф в 1525 году.

Во время работы над данным исследованием мною была обнаружена интересная информация. Оказывается, существует неофициальный праздник, посвященный квадратному корню.

День квадратного корня - праздник, отмечаемый девять раз в столетие: в день, когда и число, и порядковый номер месяца являются квадратными корнями из двух последних цифр года (например, 2 февраля 2004 года: 02-02-04).

Впервые этот праздник отмечался 9 сентября 1981 года (09-09-81). Основателем праздника является школьный учитель Рон Гордон из города Редвуд Сити, Калифорния, США. По состоянию на 2010 год Гордон продолжает публиковать заметки о придуманном им празднике, активно контактируя по этому поводу со СМИ. Его дочь с помощью Facebook собрала группу поклонников этого праздника, где каждый может поделиться своим способом отметить эту необычную дату.

Главным блюдом на этом «праздничном столе» обычно являются вареные кубики из овощей и выпечка в форме математического знака квадратного корня

По объективным математическим причинам этот праздник может отмечаться строго девять раз в столетие (семь раз в первой половине века и дважды — во второй), всегда в одни и те же дни:

1 января хх01 года

2 февраля хх04 года

3 марта хх09 года

4 апреля хх16 года

5 мая хх25 года

6 июня хх36 года

7 июля хх49 года

8 августа хх64 года

9 сентября хх81 года

При этом интересно заметить, что промежуток (в годах) между праздниками составляет непрерывную последовательность нечётных чисел: 3, 5, 7 и т. д.

2. Методы извлечения квадратного корня

В ходе данного исследования мною было обнаружено несколько методов извлечения квадратного корня [2]:

1. Арифметический
2. Грубая оценка
3. Столбиком
4. Вавилонский способ
5. Метод Герона
6. Метод Ньютона
7. Десятично

Приведем примеры некоторых из них.

Арифметический способ

Для квадратов чисел верны следующие равенства:

$1 = 1^2$

$1 + 3 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 3^2$

и так далее.

То есть, узнать целую часть квадратного корня числа можно, вычитая из него все нечётные числа по порядку, пока остаток не станет меньше следующего вычитаемого числа или равен нулю, и посчитав количество выполненных действий. Например, так:

$9 - 1 = 8$

$8 - 3 = 5$

$5 - 5 = 0$

Выполнено 3 действия, квадратный корень числа 9 равен 3.

На мой взгляд, недостатком такого способа является то, что если извлекаемый корень не является целым числом, то можно узнать только его целую часть, но не точнее. В то же время такой способ вполне доступен детям, решающим простейшие математические задачи, требующие извлечения квадратного корня.

Вавилонский метод

Еще 4000 лет назад вавилонские ученые составляли наряду с таблицами умножения и таблицами обратных величин (при помощи которых деление чисел сводилось к умножению) таблицы квадратов чисел и квадратных корней из чисел. При этом они умели находить приблизительное значение квадратного корня из любого целого числа. Вавилонский способ приближенного вычисления квадратных корней можно иллюстрировать на следующем примере, изложенном в одной из найденых при раскопках клинописных табличек.

Вычислим $\sqrt{2}$, то есть найдем с помощью метода приближенных вычислений положительный корень уравнения $x^2 = 2$. Это уравнение равносильно следующему: $x = \frac{2}{x}$ (1)

Предположим, что мы имеем некоторое приближенное значение x_0 числа равное 1.

Согласно (1), $x_0 = 1$ надо сравнить с числом $\frac{2}{x_0}$, то есть с $\frac{2}{1}$; если x_0 и $\frac{2}{x_0}$совпадают, то x_0 - точное значение числа $\sqrt{2}$ равное 1. Так как 1 не равно $\frac{2}{1}$, то одно из чисел меньше, а другое больше, чем $\sqrt{2}$, то есть $\sqrt{2}$ лежит между 1 и $\frac{2}{1}$;. Можно предположить, что среднее арифметическое этих чисел $x_1 = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{2}{x_0})$ является лучшим приближением числа $\sqrt{2}$, чем исходное приближение x_0, то есть

$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{2}{x_0}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2} = 1{,}5.$ Это приближение x_1 можно улучшить таким же способом, то есть взять среднее арифметическое чисел x_1 и $\frac{2}{x_1}$ и так далее.

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3/2}\right) = \frac{17}{12} = 1{,}416666667$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{2}{x_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{2}{17/12}\right) = \frac{577}{400} = 1{,}4142115686$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{2}{x_3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{577}{408} + \frac{2}{577/408}\right) = \frac{665857}{470832} = 1{,}414213562$$

$$x_5 = \frac{1}{2}\left(x_4 + \frac{2}{x_4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{665857}{470832} + \frac{2}{5665857/470832}\right) = 1{,}414213562$$

Как видим, уже пятое приближение не отличается (при вычислениях с девятью знаками после запятой) от четвертого. Естественно принять, что приблизительно равно 1,414213562.

Какова точность вавилонского способа? Для ответа на этот вопрос проведем вычисления:

$x_n - \sqrt{2} = 1/2(x_{n-1} + 2/ x_{n-1}) - \sqrt{2} = 1/(2x_{n-1})*(x_{n-1} - 2)^2$ (2)

Равенство (2) дает возможность выразить ошибку приближения x_n (то есть число $/x_n-\sqrt{2}/$) через ошибку предыдущего приближения x_{n-1}:

$x_1- \sqrt{2} = 1/(2x_o)*(x_o - 2)^2$=0,500 или 50%.

$x_2- \sqrt{2} = 1/(2x_1)*(x_1 - 2)^2$=0,833 или 8,3%.

$x_3- \sqrt{2} = 1/(2x_2)*(x_2 - 2)^2$=0,012 или 1,2%

Формула, с помощью которой вычислялись последовательные приближения числа по вавилонскому способу, может быть записана следующим образом:

$x_n = f(x_{n-1})$. (3)

В данном случае в качестве функции f(x) берется функция f(x) = 1/2(x + 2/x). (4)

Легко видеть также, что уравнение (1), которое приближенно решалось этим способом, переписывается с помощью функции (4) в виде f(x) = x. (5)

Такой способ приближенного вычисления квадратных корней называется методом итераций.

Итерация (с латинского iteratio - повторение) - результат повторного применения какой-либо математической операции. [1]

Геометрический

К извлечению квадратных корней сводятся многие геометрические задачи. Например, в курсе геометрии доказывают теорему Пифагора: квадрат длины гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов длин катетов этого треугольника. Индийцы две тысячи лет тому назад доказывали ее с помощью следующего чертежа (Рис. 2).

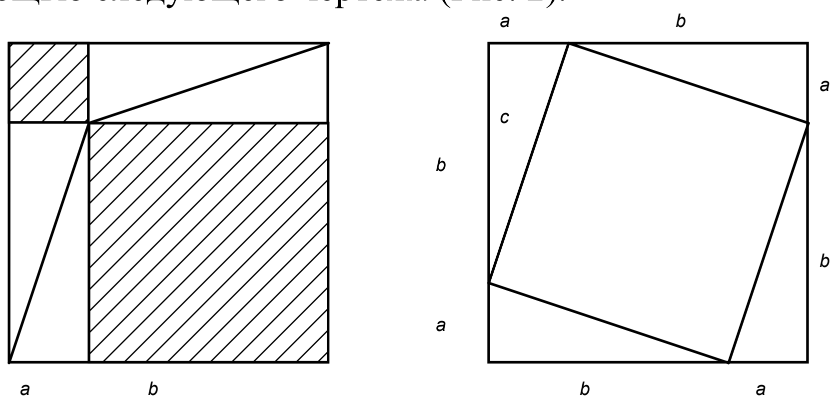

Рис. 2. Геометрическое доказательство теоремы Пифагора

Видим, что площади заштрихованных фигур в обоих квадратах равны, но в одном случае площадь равна $a^2 + b^2$, а в другом c^2. Значит, $a^2 + b^2 = c^2$. [5]

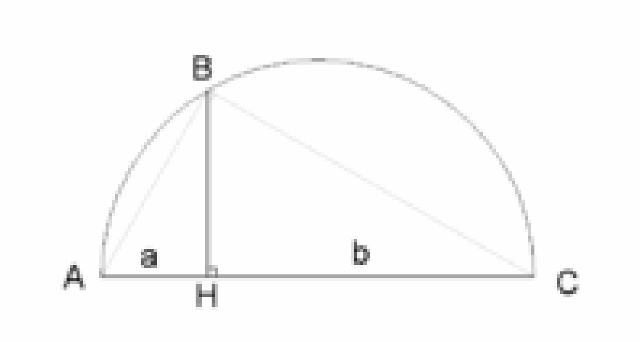

Рис. 3. Извлечение квадратного корня методом геометрических построений

$|BH| = \sqrt{|AH| \cdot |HC|}$

В частности, если $|AH| = 1$, а $|HC| = x$, то $|BH| = \sqrt{x}$

Грубая оценка

Известно, что математика точная наука. Но при решении математических задач далеко не всегда бывает нужно знать абсолютно точный ответ, достаточно найти его приближенное значении с приемлемой точностью.

Многие алгоритмы вычисления квадратных корней из положительного действительного числа S требуют некоторого начального значения. Если начальное значение слишком далеко от настоящего значения корня, вычисления замедляются. Поэтому полезно иметь грубую оценку, которая может быть очень неточна, но легко вычисляется. Если $S \geq 1$, пусть D будет числом цифр S слева от десятичной запятой. Если $S < 1$, пусть D будет числом нулей, идущих подряд, справа от десятичной запятой, взятое со знаком минус. Тогда грубая оценка выглядит так:

Если D нечетно, D = 2n + 1, тогда используем $\sqrt{S} \approx 2 \cdot 10^n$.

Если D четно, D = 2n + 2, тогда используем $\sqrt{S} \approx 6 \cdot 10^n$.

Два и шесть используются потому, что $\sqrt{\sqrt{1 \cdot 10}} = \sqrt[4]{10} \approx 2$ и $\sqrt{\sqrt{10 \cdot 100}} = \sqrt[4]{1000} \approx 6$

Мы решили узнать какова погрешность результата при вычислении таким способом. Рассмотрим число 49. Проведя вычисления таким способом, мы получаем ответ равный шести.

Также я извлекала корни таким методом из разных чисел – трехзначных, четырехзначных. Поэтому я могу сделать вывод, что тем больше число, тем больше результат отличается от истинного значения корня.

Столбиком

Этот способ позволяет найти приближённое значение корня из любого действительного числа с любой наперёд заданной точностью. Такой способ может быть освоен даже школьником. К недостаткам способа можно отнести увеличивающуюся сложность вычисления с увеличением количества найденных цифр.

Для ручного извлечения корня применяется запись, похожая на деление столбиком. Выписывается число, корень которого ищем. Справа от него будем постепенно получать цифры искомого корня. Пусть извлекается корень из целого числа N. Для начала мысленно или метками разобьем число N на группы по две цифры слева и справа от десятичной точки. При необходимости, группы дополняются нулями - целая часть дополняется слева, десятичная справа. Так 31234.567 можно представить, как 03 12 34 . 56 70. В отличие от деления снос производится такими группами по 2 цифры.

1. Запишем число N на листке.

2. Найдем a, квадрат которого меньше группы старших разрядов числа N (старшая группа - самая левая не равная нулю), а квадрат a + 1 больше группы старших разрядов числа. Записать найденное a справа от N (это очередная цифра искомого корня). (На первом шаге примера $a^2 = 2^2 = 2 * 2 = 4 < 6$, а $(a + 1)^2 = 3^2 = 3 * 3 = 9 > 6$).

3. Записать квадрат a под старшей группой разрядов. Провести вычитание из старшей группы разрядов N выписанного квадрата числа a и записать результат вычитания под ними.

4. Слева от этого результата вычитания провести вертикальную черту и слева от черты записать число равное уже найденным цифрам результата (мы их выписываем справа от N) умноженное на 20. Назовём это число b. (На первом шаге примера это число просто есть b = 2 * 20 = 40, на втором b = 26 * 20 = 520).

5. Произвести снос следующей группы цифр, т.е. дописать следующие две цифры числа N справа от результата вычитания. Число образованное "склеенными" результатом вычитания и дописанными двумя цифрами назовем c. (На первом шаге примера это число просто есть c = 296, на втором c = 2096). Если сносится первая группа после десятичной точки числа N, то нужно поставить точку справа от уже найденных цифр искомого корня.

6. Теперь нужно найти такое a, что (b + a) * a меньше или равно c, но (b + (a + 1)) * (a + 1) больше, чем c. Записать найденное a справа от N, как очередную цифру искомого корня. Вполне возможно, что a окажется равным нулю. Это ничего не меняет - записываем 0 справа от уже найденных цифр

корня. (На первом шаге примера это число 6, т.к. (40 + 6) * 6 = 46 * 6 = 276 < 296, но (40 + 7) * 7 = 47 * 7 = 329 > 296) Если число найденных цифр уже удовлетворяет искомой точности прекращаем процесс вычисления.

7. Записать число (b + a)*a под c. Провести вычитание столбиком числа (b + a) * a из c и записать результат вычитания под ними. Перейти к шагу 4. [7]

Метод Герона

Следующий метод, который мы изложим, был известен ещё в Древней Греции и приписывается Герону Александрийскому. Герон жил в I веке н.э. и описал в своих книгах закон отражения света, формулу вычисления площади треугольника по трём сторонам, многочисленные механизмы. Интересно, что и в наше время метод Герона используется некоторых вычислительных машинах (может быть, и в вашем калькуляторе!). Обратимся к тексту самого Герона. Он объясняет свой метод на примере: пусть надо найти корень из 720.

Так как 720 не имеет рационального корня, то возьмем корень с очень малой погрешностью следующим образом. Так как ближайший к 720 квадрат есть 729, и оно имеет корнем 27, то раздели 720 на 27. Получается $26\frac{2}{3}$

$$26\frac{2}{3} + 27 = 53\frac{2}{3}$$

Разделим результат на 2, получим $26\frac{5}{6}$. Это и есть результат. Если возвести это число в квадрат, получим $720\frac{1}{36}$ Погрешность составляет 1/36 единицы. Но при желании погрешность может быть и меньшей. Для уменьшения величины погрешности процедуру следует проделать ещё и ещё раз с вновь полученой величиной. В нашем случае с числом $720\frac{1}{36}$ [6]

Второй метод Герона

Древние вавилоняне пользовались следующим способом нахождения приближенного значения квадратного корня их числа x. Число x они представляли в виде суммы $a^2 + b$, где a^2 ближайший к числу x точный квадрат натурального числа a и пользовались формулой $\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$ [3]

Извлечем с помощью формулы корень квадратный, например из числа 28

$$\sqrt{28} = \sqrt{5^2 + 3} \approx 5 + \frac{3}{2 \cdot 5} \approx 5{,}3$$

Возведем в квадрат полученный результат $(5{,}3)^2 = 28{,}09$

Погрешность составляет 0,09 единицы.

По моему мнению, именно методы Герона являются самыми простыми и доступными для учащихся школ. Кроме того, данные методы имеют самый маленький коэффициент погрешности.

Заключение

Работа над данным исследованием показала, что изучение квадратных корней – не прихоть математиков, а объективная необходимость: в реальной жизни случаются ситуации, математические модели которых содержат операцию извлечения квадратного корня. Но не всегда под рукой мы имеем калькулятор. Помимо того, бывают ситуации, когда использование калькулятора недопустимо, например, ЕГЭ. Вот тогда-то и придут на помощь изученные мною методы. Методы, которые позволяют быстро, эффективно справиться с предложенными заданиями.

В предисловии к своему первому изданию “В царстве смекалки” (1908 год) Е. И. Игнатьев пишет: “... умственную самодеятельность, сообразительность и “смекалку” нельзя ни “вдолбить”, ни “вложить” ни в чью голову. Результаты надёжны лишь тогда, когда введение в область математических знаний совершается в лёгкой и приятной форме, на предметах и примерах обыденной и повседневной обстановки, подобранных с надлежащим остроумием и занимательностью”. Я не могу не согласиться с известным русским математиком, так как в математике следует помнить не формулы, а процесс мышления.

Список литературы

1. http://mathematik.boom.ru/
2. http://www.worldlingo.com/ma/enwiki/ru/
3. http://festival.1september.ru/
4. Алгебра: Учеб. пособие для 8 кл. / Е.П. Кузнецова и др; под ред. Л.Б. Шнепермана. – 2 изд. – Мн.: Нар. асвета, 2005.
5. Алгебра: Учеб. для 8-х кл. общеобразоват. шк. с углубл. изучением математики / К.О. Ананченко и др. – Мн.: Нар. асвета, 1994.
6. Петраков И.С. «Математические кружки в 8–10 классах»: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1987 г.
7. Энциклопедия для детей. Т. 11. Математика/ Глав. ред. М. Аксенова. М.: Аванта+плюс. 2004 г.