Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ учащихся «Прикладные вопросы математики»

Математический анализ

Решение дифференциальных уравнений и их применение в различных областях науки

Бушуев Евгений Евгеньевич,
Беринцев Максим Михайлович
МОУ «Лицей №1» г. Перми, 11 кл.
Сидорова Елена Борисовна,
преподаватель математики
МОУ «Лицей №1» г. Перми

Введение

В нашей работе мы рассматриваем дифференциальные уравнения и их применение в различных областях науки.

Дифференциальные уравнения помогают решать различные задачи не только в математике, но и в физике, биологии, экономике и других науках и сферах деятельности человека. Модель дифференциальных уравнений является примером математической модели, применяемой при решении задач. В школьной программе дифференциальные уравнения изучаются не во всех классах, поэтому нам показалось интересным самостоятельно изучить дифференциальные уравнения и научиться решать хотя бы элементарные задачи с помощью них В этом мы видим цель нашей работы. Для её реализации необходимо решить следующие задачи:

1)рассмотреть некоторые теоретические сведения о дифференциальных уравнениях: определение, решение, виды и тд.

2)научиться составлять саму модель дифференциального уравнения применительно к конкретной задаче

3)научиться решать несложные дифференциальные уравнения.

Для этого в практической части работы мы рассматриваем ряд задач различного содержания (экономического, химического и т.д), чтобы проиллюстрировать на них общий принцип составления модели дифференциального уравнения.

Дифференциальное уравнение

Дифференциа́льное уравне́ние — уравнение, связывающее значение некоторой неизвестной функции в некоторой точке и значение её производных различных порядков в той же точке. Дифференциальное уравнение содержит в своей записи неизвестную функцию, ее производные и независимые переменные; однако не любое уравнение, содержащее производные неизвестной функции, является дифференциальным уравнением. Стоит также отметить, что дифференциальное уравнение может вообще не содержать неизвестную функцию, некоторые её производные и свободные переменные, но обязано содержать хотя бы одну из производных.

Решением (интегралом) дифференциального уравнения порядка n называется функция y(x), имеющая на некотором интервале (a, b) производные y'(x),y''(x),...,yn(x) до порядка n включительно и удовлетворяющая этому уравнению. Процесс решения дифференциального уравнения называется интегрированием. Вопрос об интегрировании дифференциального уравнения считается решенным, если нахождение неизвестной функции удается привести к квадратуре, независимо от того, выражается ли полученный интеграл в конечном виде или нет.

Все дифференциальные уравнения можно разделить на обыкновенные (ОДУ), в которые входят только функции (и их производные) от одного аргумента, и уравнения с частными производными (УРЧП), в которых входящие функции зависят от многих переменных. Существуют также стохастические дифференциальные уравнения (СДУ), включающие случайные процессы.

Первоначально дифференциальные уравнения возникли из задач механики, в которых участвовали координаты тел, их скорости и ускорения, рассматриваемые как функции времени. Многие физические законы, которым подчиняются те или иные явления, записываются в виде математического уравнения, выражающего определенную зависимость между какими-то величинами. Часто речь идет о соотношении между величинами, изменяющимися с течением времени, например экономичность двигателя, измеряемая расстоянием, которое автомашина может проехать на одном литре горючего, зависит от скорости движения автомашины. Соответствующее уравнение содержит одну или несколько функций и их производных и называется дифференциальным уравнением. (Темп изменения расстояния со временем определяется скоростью; следовательно, скорость – производная от расстояния; аналогично, ускорение – производная от скорости, так как ускорение задает темп изменения скорости со временем.) Большое значение, которое имеют дифференциальные уравнения для математики и особенно для ее приложений, объясняются тем, что к решению таких уравнений сводится исследование многих физических и технических задач. Дифференциальные уравнения играют существенную роль и в других науках, таких, как биология, экономика и электротехника; в действительности, они возникают везде, где есть необходимость количественного (числового) описания явлений.

Примеры.

Следующие примеры позволяют лучше понять, как различные задачи формулируются на языке дифференциальных уравнений.

1)Закон распада некоторых радиоактивных веществ состоит в том, что скорость распада пропорциональна наличному количеству этого вещества. Если x – количество вещества в некоторый момент времени t, то этот закон можно записать так:

где dx/dt – скорость распада, а k – некоторая положительная постоянная, характеризующая данное вещество. (Знак «минус» в правой части указывает на то, что x убывает со временем; знак «плюс», подразумеваемый всегда, когда знак явно не указан, означал бы, что x возрастает со временем.)

2) Емкость первоначально содержит 10 кг соли, растворенной в 100 м^3 воды. Если чистая вода вливается в емкость со скоростью 1 м^3 в минуту и равномерно перемешивается с раствором, а образовавшийся раствор вытекает из емкости с такой же скоростью, то сколько соли окажется в емкости в любой последующий момент времени? Если x – количество соли (в кг) в емкости в момент времени t, то в любой момент времени t в 1 м^3 раствора в емкости содержится x/100 кг соли; поэтому количество соли убывает со скоростью x/100 кг/мин, или

3)Пусть на тело массы m, подвешенное к концу пружины, действует возвращающая сила, пропорциональная величине растяжения пружины. Пусть x – величина отклонения тела от положения равновесия. Тогда по второму закону Ньютона, который утверждает, что ускорение (вторая производная от x по времени, обозначаемая d^2x/dt^2) пропорционально силе:

Правая часть стоит со знаком минус потому, что возвращающая сила уменьшает растяжение пружины.

4) Закон охлаждения тел утверждает, что количество тепла в теле убывает пропорционально разности температур тела и окружающей среды. Если чашка кофе, разогретого до температуры 90° C находится в помещении, температура в котором равна 20° C, то

где T – температура кофе в момент времени t.

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) — это уравнения вида

$$F\left(t, x, x', x'', ..., x^{(n)}\right) = 0$$ или

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, ..., \frac{d^nx}{dt^n}\right) = 0$$

где — неизвестная функция (возможно, вектор-функция; в таком случае часто говорят о системе дифференциальных уравнений), зависящая от переменной времени , штрих означает дифференцирование по . Число называется порядком дифференциального уравнения.

Дифференциальные уравнения в частных производных

Дифференциальные уравнения в частных производных (УРЧП) — это уравнения, содержащие неизвестные функции от нескольких переменных и их частные производные. Общий вид таких уравнений можно представить в виде:

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_m, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial x_m^n}\right) = 0$$
,

где $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — независимые переменные, а $z = z(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — функция этих переменных.

Примеры

y'' + 9y = 0 — однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Решением является семейство функций y = C1cos(3x) + C2sin(3x), где C1 и C2 — произвольные константы.

Второй закон Ньютона можно записать в форме дифференциального уравнения $m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x,t)$, где m — масса тела, x — его координата, F(x,t) — сила, действующее на тело с координатой x в момент времени t. Его решением является траектория движения тела под действием указанной силы.

Колебание струны задается уравнением $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, где u = u(x,t) — отклонение струны в точке с координатой x в момент времени t, параметр a задает свойства струны. Это так называемое волновое уравнение.

Обыкновенное дифференциальное уравнение – это некоторое утверждение о производной неизвестной функции одной переменной. Дифференциальное уравнение в частных производных содержит функцию двух или более переменных и производные от этой функции по крайней мере по двум различным переменным.

В физике примерами таких уравнений являются уравнение Лапласа

где, согласно одной из возможных интерпретаций, u – температура в плоской области, точки которой задаются координатами x и y; уравнение теплопроводности

где t – время, x – расстояние от одного из концов однородного стержня, по которому распространяется тепловой поток; и волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

где t – снова время, x и y – координаты точки колеблющейся струны.

Решая дифференциальные уравнения в частных производных, обычно не стремятся найти общее решение, поскольку оно скорее всего окажется слишком общим, чтобы быть полезным. Если решение обыкновенного дифференциального уравнения определяется заданием условий в одной или нескольких точках; то решение дифференциального уравнения в частных производных обычно определяется заданием условий на одной или нескольких кривых. Например, решение уравнения Лапласа может быть найдено в точке (x, y) внутри круга, если значения u заданы в каждой точке ограничивающей окружности. Поскольку проблемы с более чем одной переменной в физике являются скорее правилом, чем исключением, легко представить, сколь обширен предмет теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Уравнения с разделяющимися переменными.

Уравнения вида $dy/dx = f(x)/g(y)$ можно решить, записав его в дифференциалах $g(y)dy = f(x)dx$ и проинтегрировав обе части. В худшем случае решение представимо в виде интегралов от известных функций. Например, в случае уравнения $dy/dx = x/y$ имеем $f(x) = x$, $g(y) = y$. Записав его в виде $ydy = xdx$ и проинтегрировав, получим $y2 = x2 + c$. К уравнениям с разделяющимися переменными относятся уравнения из примеров (1), (2), (4) (их можно решить описанным выше способом).

Уравнения в полных дифференциалах.

Если дифференциальное уравнение имеет вид $dy/dx = M(x,y)/N(x,y)$, где M и N – две заданные функции, то его можно представить как $M(x,y)dx – N(x,y)dy = 0$. Если левая часть является дифференциалом некоторой функции $F(x,y)$, то дифференциальное уравнение можно записать в виде $dF(x,y) = 0$, что эквивалентно уравнению $F(x,y) = \text{const}$. Таким образом, кривые-решения уравнения – это «линии постоянных уровней» функции, или геометрические места точек, удовлетворяющих уравнениям $F(x,y) = c$. Уравнение $ydy = xdx$ (рис. 1) – с разделяющимися переменными, и оно же – в полных дифференциалах: чтобы убедиться в последнем, запишем его в виде $ydy – xdx = 0$, т.е. $d(y2 – x2) = 0$. Функция $F(x,y)$ в этом случае равна $(1/2)(y2 – x2)$; некоторые из ее линий постоянного уровня представлены на рис. 1.

Линейные уравнения.

Линейные уравнения – это уравнения «первой степени» – неизвестная функция и ее производные входят в такие уравнения только в первой степени. Таким образом, линейное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид $dy/dx + p(x) = q(x)$, где $p(x)$ и $q(x)$ – функции, зависящие только от x. Его решение всегда можно записать с помощью интегралов от известных функций. Многие другие типы дифференциальных уравнений первого порядка решаются с помощью специальных приемов.

Уравнения старших порядков.

Многие дифференциальные уравнения, с которыми сталкиваются физики, это уравнения второго порядка (т.е. уравнения, содержащие вторые производные) Таково, например, уравнение простого гармонического движения из примера (3), md 2x/dt 2 = –kx. Вообще говоря, можно ожидать, что уравнение второго порядка имеет частные решения, удовлетворяющие двум условиям; например, можно потребовать, чтобы кривая-решение проходила через данную точку в данном направлении. В случаях, когда дифференциальное уравнение содержит некоторый параметр (число, величина которого зависит от обстоятельств), решения требуемого типа существуют только при определенных значениях этого параметра. Например, рассмотрим уравнение md 2x/dt 2 = –kx и потребуем, чтобы y(0) = y(1) = 0. Функция y є 0 заведомо является решением, но если – целое кратное числа p, т.е. k = m2n2p2, где n – целое число, а в действительности только в этом случае, существуют другие решения, а именно: y = sin npx. Значения параметра, при которых уравнение имеет особые решения, называются характеристическими или собственными значениями; они играют важную роль во многих задачах.

Уравнение простого гармонического движения служит примером важного класса уравнений, а именно: линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Более общий пример (также второго порядка) – уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=f(x),$$

где a и b – заданные постоянные, f(x) – заданная функция. Такие уравнения можно решать различными способами, например, с помощью интегрального преобразования Лапласа. То же можно сказать и о линейных уравнениях более высоких порядков с постоянными коэффициентами. Не малую роль играют также и линейные уравнения с переменными коэффициентами.

Линейные дифференциальные уравнения

дифференциальные уравнения вида

$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x)$, (1)

где $y = y(x)$ — искомая функция, $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}, \ldots, y'$ — её производные, а $p_1(x)$, $p_2(x), \ldots, p_n(x)$ (коэффициенты) и $f(x)$ (свободный член) — заданные функции (см. Дифференциальные уравнения). В уравнение (1) искомая функция у и её производные входят в 1-й степени, т. е. линейно, поэтому оно называется линейным. Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (1) называется однородным, в противном случае — неоднородным. Общее решение $y_0 = y_0(x)$ однородного Л. д. у. при условии непрерывности его коэффициентов $p_k(x)$ выражается формулой:

$$y_0 = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x),$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные и $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ — линейно независимые (см. Линейная зависимость)частные решения, образующие т. н. фундаментальную систему решений. Критерием линейной независимости решений служит неравенство нулю (хотя бы в одной точке) определителя Вроньского (Вронскиана):

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & & y_n'(x) \\ & & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

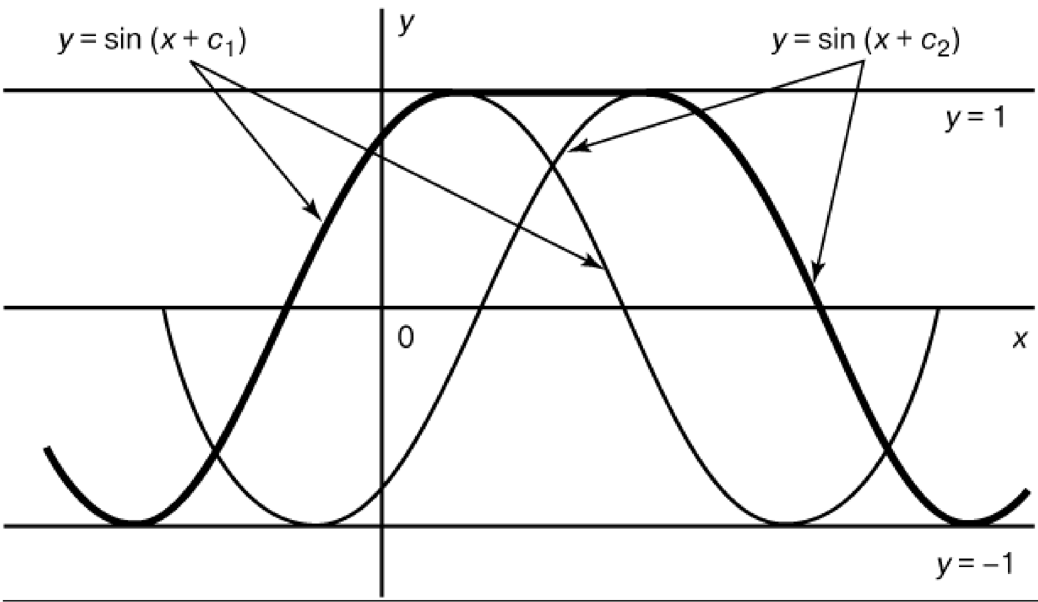
Нелинейные дифференциальные уравнения.

Уравнения, содержащие неизвестные функции и их производные в степени выше первой или каким-либо более сложным образом, называются нелинейными. В последние годы они привлекают все большее внимание. Дело в том, что физические уравнения обычно линейны лишь в первом приближении; дальнейшее и более точное исследование, как правило, требует использования нелинейных уравнений. Кроме того, многие задачи нелинейны по своей сути. Так как решения нелинейных уравнений зачастую очень сложны и их трудно представить простыми формулами, значительная часть современной теории посвящена качественному анализу их поведения, т.е. разработке методов, позволяющих, не решая уравнения, сказать нечто существенное о характере решений в целом: например, что все они ограниченны, или имеют периодический характер, или определенным образом зависят от коэффициентов.

Приближенные решения дифференциальных уравнений могут быть найдены в численном виде, но для этого требуется много времени. С появлением быстродействующих компьютеров это время сильно сократилось, что открыло новые возможности численного решения многих, ранее не поддававшихся такому решению, задач.

<u>Теоремы существования.</u>

Теоремой существования называется теорема, утверждающая, что при определенных условиях данное дифференциальное уравнение имеет решение. Встречаются дифференциальные уравнения, не имеющие решений или имеющие их больше, чем ожидается. Назначение теоремы существования – убедить нас в том, что у данного уравнения действительно есть решение, а чаще всего заверить, что оно имеет ровно одно решение требуемого типа. Например, уже встречавшееся нам уравнение dy/dx = –2y имеет ровно одно решение, проходящее через каждую точку плоскости (x,y), а так как одно такое решение мы уже нашли, то тем самым полностью решили это уравнение. С другой стороны, уравнение (dy/dx)2 = 1 – y2 имеет много решений. Среди них прямые y = 1, y = –1 и кривые y = sin(x + c). Решение может состоять из нескольких отрезков этих прямых и кривых, переходящих друг в друга в точках касания (рис. 2).



Пример №1: Найти общее решение дифференциального уравнения: Найти особое решение, если оно существует.

$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx$$

Пример №2: Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' = \cos x.$$

$$y' = \int \cos x dx = \sin x + C_1$$

$$y(x) = \int (\sin x + C_1) dx = \int \sin x dx + \int C_1 dx = -\cos x + C_1 x + C_2$$

Таким образом, $y(x) = -\cos x + C_1 x + C_2$.

Пример №3: Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$\int y \cos y dy = -2 \int x dx$$

Интеграл, стоящий в левой части, берется по частям

$$\int y\cos y dy = \begin{Bmatrix} u = y; & dv = \cos y dy; \\ du = dy; & v = \sin y \end{Bmatrix} = y\sin y - \int \sin y dy = y\sin y + \cos y$$

это есть общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

Пример №4: Решить уравнение

$$\frac{dy}{y^2+1} = dx; \qquad \int \frac{dy}{y^2+1} = \int dx;$$

$$arctgy = \frac{x^2}{2} + C; \qquad y = tg\left(\frac{x^2}{2} + C\right);$$

Выводы.

Характеризуя математику как метод проникновения в тайны природы, можно сказать, что основным путем применения этого метода является формирование и изучение математических моделей реального мира. Здесь, может быть, уместно вспомнить слова А. Пуанкаре: "Математика - это искусство давать разным вещам одно наименование". Эти слова являются выражением того, что математика изучает одним методом, с помощью математической модели, различные явления действительного мира.

Изучая какие-либо физические явления, исследователь прежде всего создает его математическую идеализацию или, другими словами, математическую модель, то есть, пренебрегая второстепенными характеристиками явления, он записывает основные законы, управляющие этим явлением, в математической форме. Очень часто эти законы можно выразить в виде дифференциальных уравнений. Для составления математической модели в виде дифференциальных уравнений нужно, как правило, знать только локальные связи и не нужна информация обо всем физическом явлении в целом. Математическая модель дает возможность изучать явление в целом, предсказать его развитие, делать количественные оценки изменений, происходящих в нем с течением времени. Теория дифференциальных уравнений в настоящее время представляет собой исключительно богатый содержанием, быстро развивающийся раздел математики, тесно связанный с другими областями математики и с ее приложениями.

На протяжении всей работы мы, безусловно, ознакомились с теорией о дифференциальных уравнениях (ДУ), разъяснили для себя, что это такое дифференциальные уравнения, как они решаются и в каких областях науки они применяются. Очень многое показалось нам сложным и не совсем понятным в силу нашего пока еще не очень совершенного математического аппарата, но, надеемся, что в дальнейшем наше первичное знакомство с данной темой явится основой для более серьезных исследований в этой области. И мы

Считаем, что поставленные в работе задачи мы выполнили

Список литературы:

1) Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1982

2) Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1984

3)Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. М., 1986

4) http://sesia5.ru/vmat/gl3/2.htm

5) http://256bit.ru/mat/blok/

6) http://ru.wikipedia.org/wiki/Дифференциальное_уравнение