Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ учащихся «Прикладные вопросы математики»

Математическое моделирование

Моделирование изменения зарплаты и занятости

Целищева Юлия Юрьевна,
МОУ «Лицей №1» г. Перми, 11 кл.
Шабрыкина Наталья Сергеевна,
к. ф.-м. н., доцент ПНИПУ

Введение

Работодателю (владельцу предприятия, завода и т. п.) всегда важно знать, например, размер минимальной заработной платы, чтобы люди не сбежали с предприятия к конкуренту и какому максимальному количеству человек он сможет обеспечить ее в таком размере, или что он потеряет в случае возникновения финансовых проблем на предприятии и т. п. В данной работе была построена математическая модель процессов изменения зарплаты и занятости на рынке труда, рассмотрены зависимости между заработной платой и соответствующему ей количеству рабочих, а также закономерности их изменения.

Концептуальная постановка задачи

Целью данной работы является построение математической модели процессов изменения зарплаты и численности рабочих.

Рынок труда, на котором взаимодействуют работодатели и наемные рабочие, характеризуется зарплатой и числом занятых. Пусть на рынке существует некоторое равновесное состояние, когда за некоторую зарплату согласно работать фиксированное количество человек. Если по каким-то причинам равновесие нарушено (например, на предприятии возникли финансовые проблемы и работодатель не может обеспечить эту зарплату всем работникам), то работодатель изменит зарплату пропорционально отклонению численности занятых от равновесного значения. А число работников увеличивается или уменьшается пропорционально отклонению первоначально предлагаемой зарплаты.

При построении модели не учитываются такие факторы, как естественная смертность рабочих, кризисы.

Математическая постановка задачи

Поскольку известно, что численность рабочих пропорциональна отклонению предлагаемой зарплаты от равновесного значения, а зарплата изменяется пропорционально отклонению количества занятых от равновесного значения, то можно составит следующую систему дифференциальных уравнений, описывающих представленную динамику:

$$\begin{cases} \dfrac{dp(t)}{dt} = k_1(N_0 - N(t)) \\ \dfrac{dN(t)}{dt} = k_2(p(t) - p_0) \end{cases} \tag{1}$$

где t - время; $p(t)$ - зарплата; $N(t)$ - численность рабочих; p_0 - зарплата на рынке, находящемся в равновесном состоянии; N_0 - число рабочих на рынке, находящемся в равновесном состоянии. Как уже было отмечено, зарплата изменяется пропорционально отклонению численности занятых от равновесного значения, потому введен коэффициент пропорциональности k_1. Также введен коэффициент k_2, устанавливающий связь между числом работников на предприятии и отклонением от первоначально предлагаемой зарплаты.

Начальные условия, необходимые для решения системы уравнений (1):

$$p(0) = p_1;\ N(0) = N_1 \tag{2}$$

Методы решения

С помощью математического пакета Maple было найдено аналитическое решение системы уравнений (1) с использованием начальных условий (2):

$$p(t) = \frac{\sin(\sqrt{k_2}\sqrt{k_1}t)\sqrt{k_1}(N_0 - N_1)}{\sqrt{k_2}} + \cos(\sqrt{k_2}\sqrt{k_1}t)(-p_0 + p_1) + p_0 \qquad (3)$$

$$N(t) = \frac{-\cos(\sqrt{k_2}\sqrt{k_1}t)\sqrt{k_1}(N_0 - N_1) + \sin(\sqrt{k_2}\sqrt{k_1}t)\sqrt{k_2}(-p_0 + p_1) + N_0\sqrt{k_1}}{\sqrt{k_2}} \qquad (4)$$

Исходный код программы, использованной для вычислений, приведен в приложении 1.

Результаты решения

С помощью математического пакета Maple также были построены графики зависимости зарплаты от времени (3) и численности населения от времени (4) и график зависимости зарплаты от численности рабочих за определенный период времени.

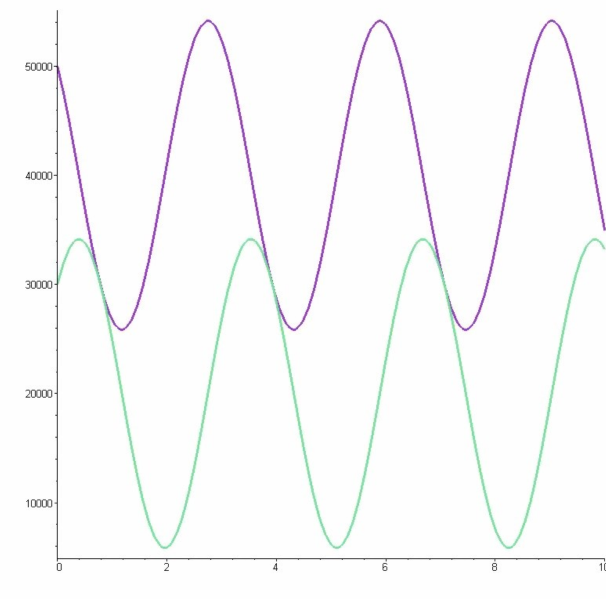


Рис. 1. Зеленым цветом показана зависимость численности рабочих от времени; фиолетовым – зависимость зарплаты от времени.

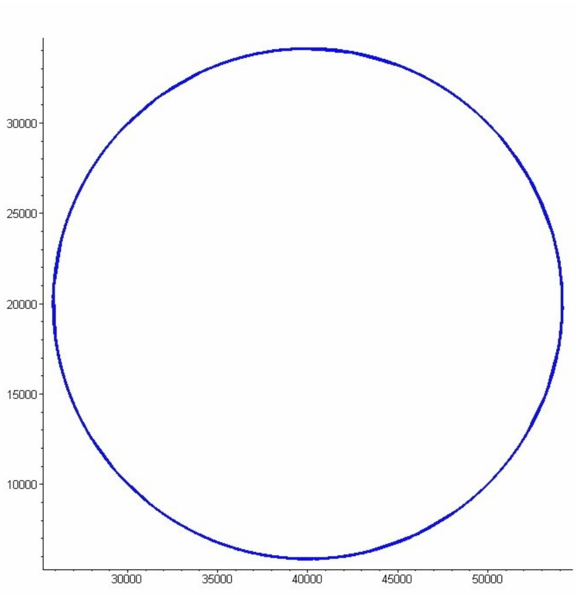


Рис. 2 Зависимость численности рабочих от зарплаты.

Графики представленные на рис. 1 и рис. 2 были построены при начальных условиях зарплата 50 000 рублей и численность рабочих 30 000 человек, при условиях равновесия 40 000 рублей и 20 000 человек, оба коэффициента равны 2. По обоим графикам можно заметить, что зарплата 50 000 рублей стремится к равновесному состоянию 40 000 рублей, так как равновесная зарплата ниже начальной, линия графика опускается вниз: зарплата уменьшается. До тех пор, пока она не достигла равновесного состояния, количество рабочих увеличивается, когда же зарплата опускается ниже начальной, рабочие увольняются. В тот момент, когда количество трудящихся становится ниже равновесного значения, ниже 20 0000 человек, зарплата начинает увеличиваться, чтобы вернуть рабочих. И возвращаться они начинают лишь тогда, когда зарплата достигает равновесного значения. Но потом зарплата вновь уменьшается, потому что рабочих стало больше, чем количество при котором рынок труда находится в равновесном состоянии (20 000 человек). Затем цикл повторяется.

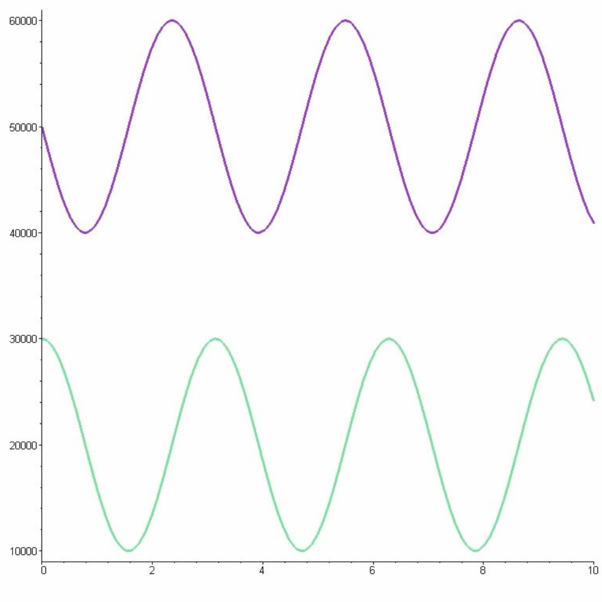


Рис. 3. Зеленым цветом показана зависимость численности рабочих от времени; фиолетовым – зависимость зарплаты от времени.

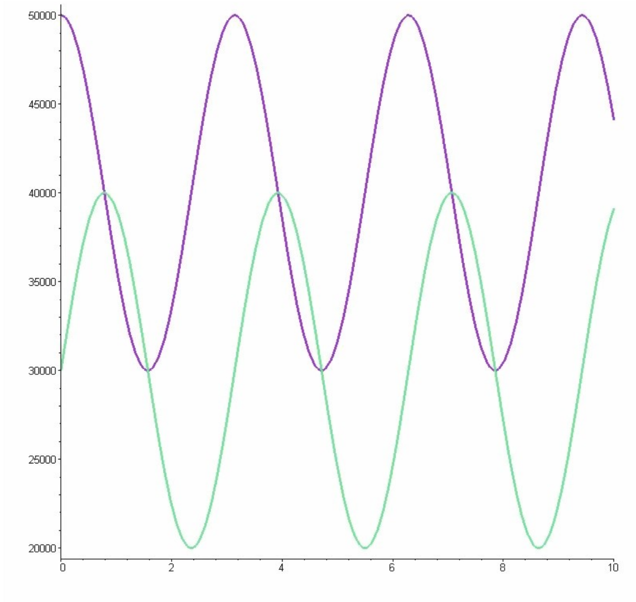
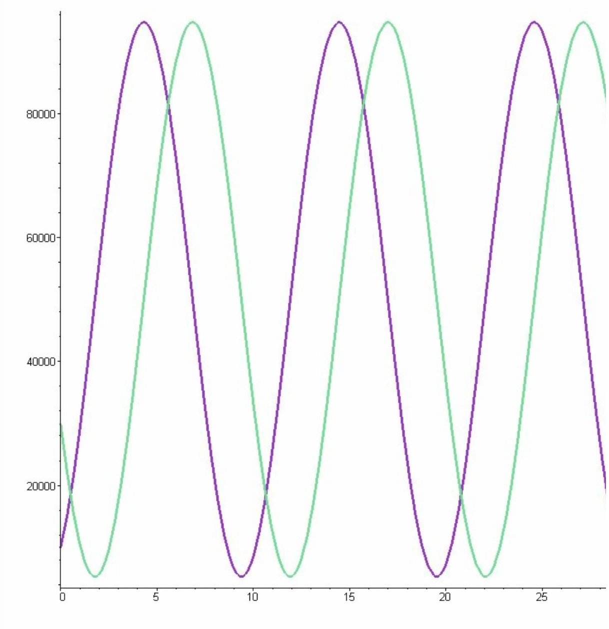


Рис. 4. Зеленым цветом показана зависимость численности рабочих от времени; фиолетовым – зависимость зарплаты от времени.

Если начальная и равновесная зарплаты сделать одинаковыми - по 50 000 руб., а все остальное оставить без изменения (рис. 3.), то существенно ничего не изменится по сравнению с предыдущим вариантом, только, раз зарплата не меняется сама по себе, она уменьшается или увеличивается в зависимости от численности рабочих по уже описанным закономерностям. Аналогичная ситуация в случае с равными начальным и равновесным числом рабочих (рис. 4.), только здесь из-за зарплаты меняется численность рабочих.

В результате исследований было выяснено, что при любых значениях зарплат и при любой численности рабочих, а также при $k_1 \geq 1$ и $k_2 \geq 1$ графики ведут себя стабильно. Значит положение на рынке труда тоже стабильно.



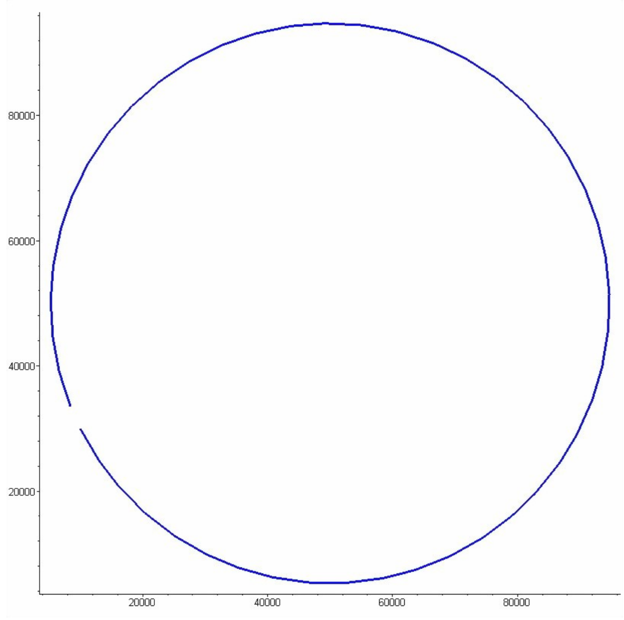
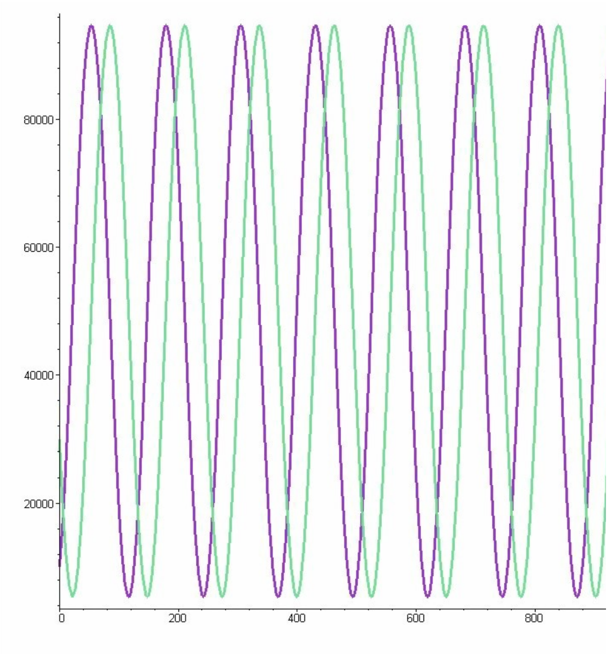


Рис. 5.

Рис. 6.

Но при $k_1 = k_2 = 0.62$ на графике зависимости численности рабочих от зарплаты (рис. 6.) … .



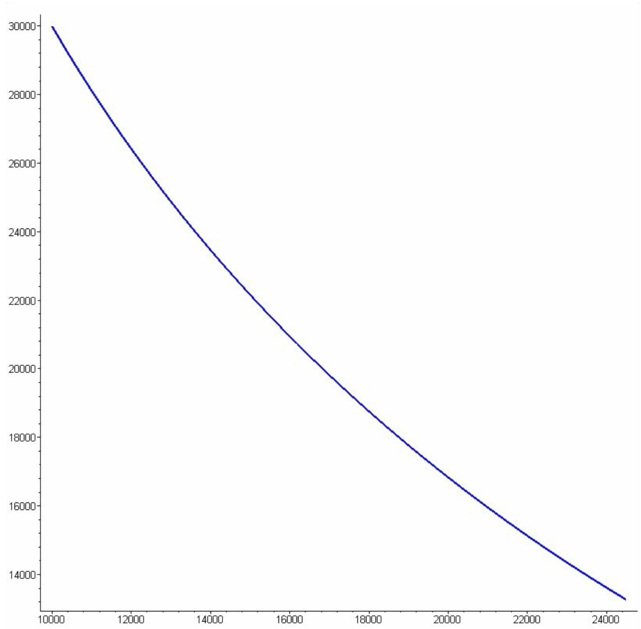


Рис. 7.

Рис. 8.

При $k_1 = k_2 = 0.05$ зависимость количества занятых от заработной платы вообще становится обратной (рис. 8.), хотя изменений на графиках зависимости обоих параметров от времени ничего не изменилось (рис. 7.).

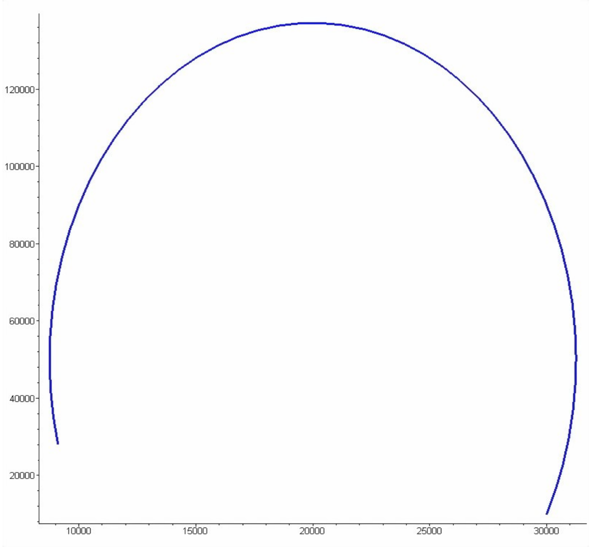


Рис. 9.

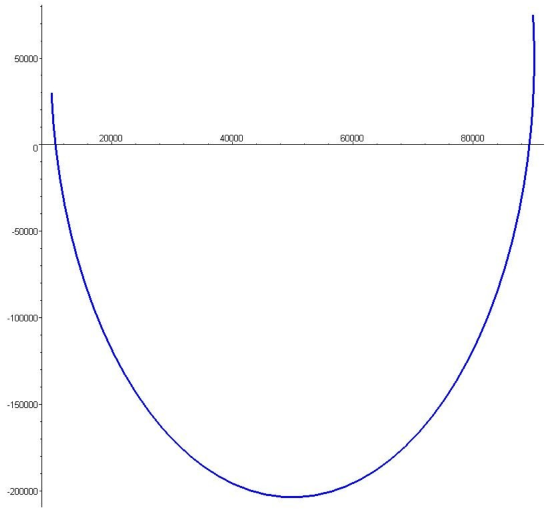


Рис. 10.

В том случае, если $k_1 < k_2$, то график хоть и не является непрерывным, но до разрыва подчиняется уже описанной закономерности (рис. 9.). В зависимости от значений параметров сам график и его разрыв перемещаются (рис. 10.).

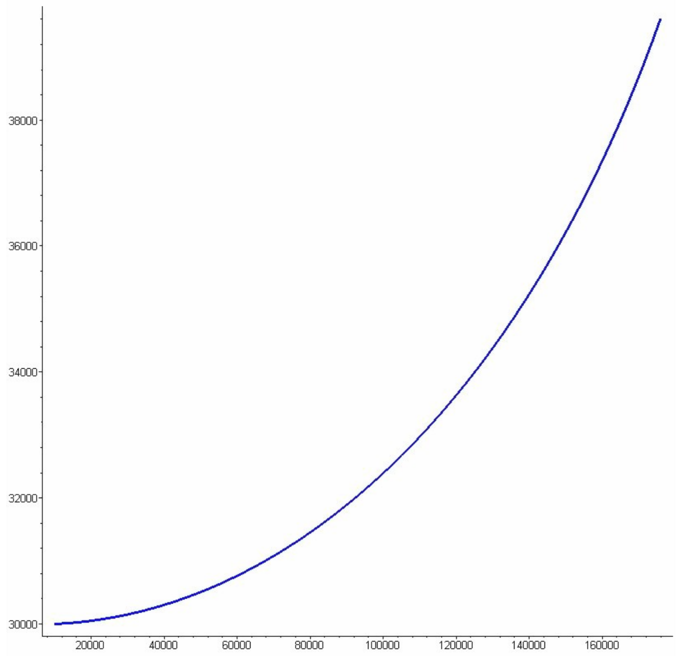


Рис. 11.

А если коэффициент, устанавливающий связь между числом работников на предприятии и отклонением от первоначально предлагаемой зарплаты будет меньше коэффициента пропорциональности, уравнивающего зарплату и отклонение численности занятых от равновесного значения $(k_1 = 1, k_2 = 0.01)$, то зависимость изменяется значительно в пользу трудящихся (рис. 11.). Но при том же k_1 и $k_2 \geq 0.02$ график начинает «закручивается» после того, как численность рабочих станет больше равновесной. Логично, что зарплата начинает уменьшаться (рис. 12.).

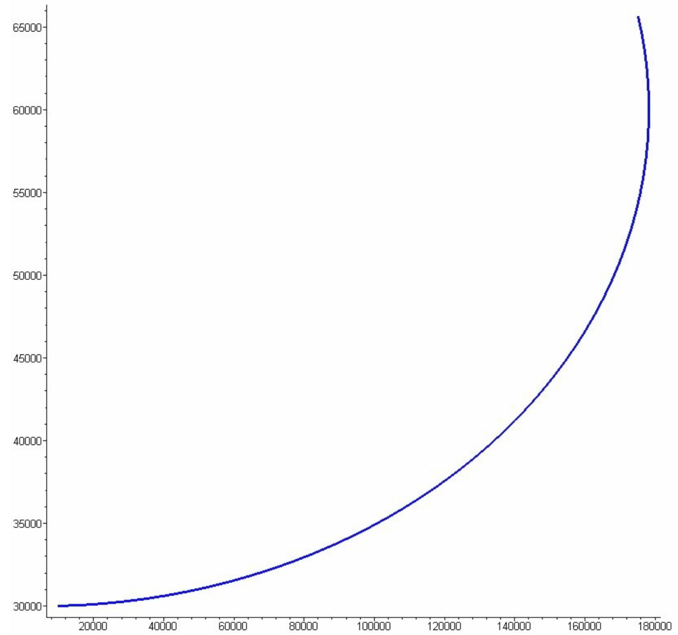


Рис. 12.

Маплет

В матпакете Maple была создана программа для работы с матрицами 3x3 (рис. 13.).

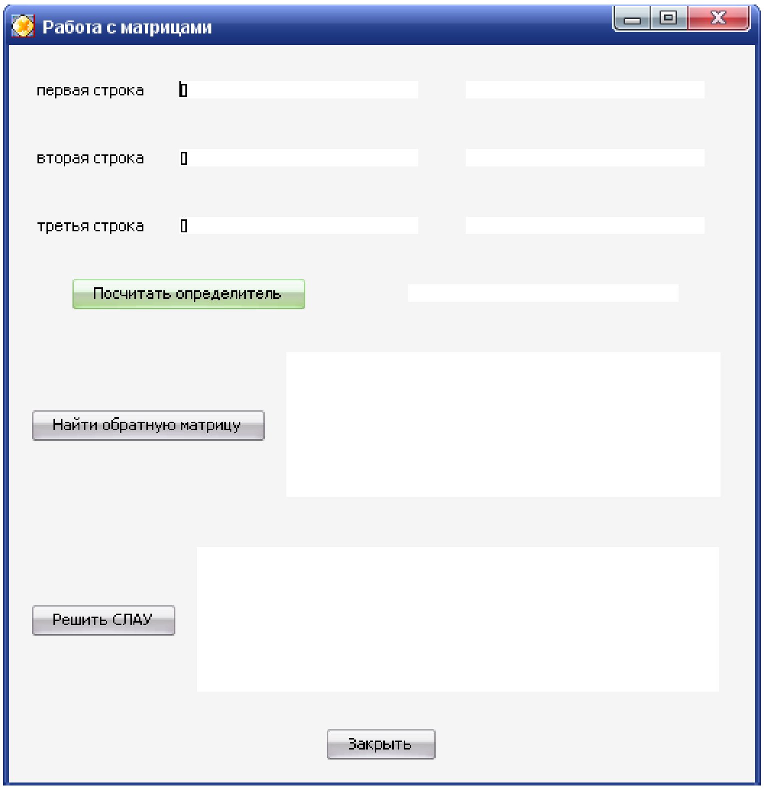


Рис. 13. Рабочее окно программы.

Данная программа считает определитель матрицы, находит обратную матрицу и корни системы линейных уравнений. Ввод данных осуществляется в поля под названием «первая строка», «вторая строка», «третья строка» и в те поля, что находятся справа от строк. В каждую строку в квадратных скобках (они уже поставлены) записываются символы соответствующей строки матрицы через запятую. Если необходимо посчитать определитель матрицы, следует нажать на соответствующую кнопку в окне программы, и справа появится ответ. Аналогично можно найти и обратную матрицу. Для того, чтобы решить систему уравнений, нужно сначала ввести правые части каждого из линейных уравнений в поля справа соответственно, а затем уже нажать кнопку «решить СЛАУ». В окне напротив кнопки появится ответ. Выйти из программы можно нажав кнопку «закрыть». Исходный код представлен в приложении 2.

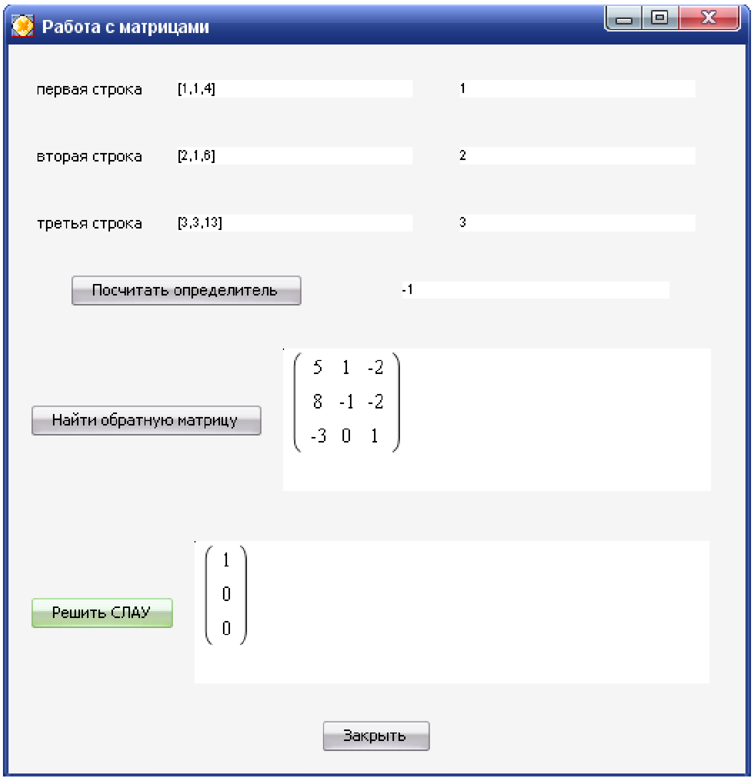


Рис. 14. Окно работающей программы.

Заключение

В работе была исследована взаимная зависимость зарплаты и численности рабочих на предприятии. Были составлены дифференциальные уравнения описывающие скорость изменения обеих величин в зависимости от начальных условий, а также от таких параметров, как зарплата и количество рабочих, при которых рынок труда находится в равновесном состоянии, и коэффициентов пропорциональности, устанавливающих связь между данными величинами. По функциям, полученным из решения системы дифференциальных уравнений, были построены графики зависимости зарплаты и численности рабочих от времени, и графики зависимости численности рабочих от зарплаты.

В процессе анализа графиков было выяснено, что стабильность положения на рынке зависит только от значения коэффициентов пропорциональности. Если оба больше нуля, то зарплата и численность рабочих изменяются в зависимости от своих значений в начальном и равновесном состояниях. Но если хотя бы один коэффициент находится на интервале от 0 до 1, то положение на рынке становится нестабильным. Поэтому если отклонение численности рабочих или зарплаты от равновесного значения в некоторое количество раз больше, чем зарплата или количество рабочих соответственно, то положение на рынке труда со временем выходит из-под контроля. Для предприятия это плохо кончится: либо уйдут все рабочие, либо предприятие разорится. Лучше всего если отклонения в зарплате и в численности рабочих будут меньше или равны самим значениям численности рабочих и зарплаты.

Список литературы

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М., 1963.
2. http://www.dnu.narod.ru/dnu.files/areasMLS.htm

Приложения

Приложение 1. Исходный код программы, использованной для решения системы дифференциальных уравнений (1).

```
> F1:=diff(p(t),t)=k1*(N0-N(t));
> F2:=diff(N(t),t)=k2*(p(t)-p0);
> P:=dsolve({F1,F2,N(0)=N1,p(0)=p1},{N(t),p(t)});
> P1:=subs(P,N(t));

> P2:=subs(P,p(t));
> E1:=eval(P1,{k1=2,k2=2,p0=50000,p1=40000,N0=30000,N1=30000});
> E2:=eval(P2,{k1=2,k2=2,p0=50000,p1=40000,N0=30000,N1=30000});
> plot([E1,E2],t=0..10,thickness=3,color=[aquamarine,
"DarkOrchid"],title="Рабочие - зеленый, зарплата -
фиолетовый");
> plot([E2,E1,t=0..10] ,thickness=3,color=blue);
```

Приложение 2. Исходный код программы для работы с матрицами.

```
> with(LinearAlgebra):
> f1:=proc(C);
Determinant(C)
end proc;
> f2:=proc(C);
MatrixInverse(C);
end proc;
> f3:=proc(C,F);
C.F;
end proc;
> with(Maplets[Elements]):
> perem:=Maplet(Window('title'="Работа с матрицами",
[ ["первая строка", TextBox[C]("[]"), TextBox[C1]() ],
[ "вторая строка", TextBox[T]("[]"), TextBox[T1]() ],
[ "третья строка", TextBox[L]("[]"), TextBox[L1]() ],
[ Button("Посчитать определитель",
Evaluate('N'='f1(convert([C,T,L],Matrix))')), TextBox[N]() ],
[ Button("Найти обратную матрицу",
Evaluate('K'='f2(convert([C,T,L],Matrix))')), MathMLViewer[K]
() ],
[ Button("Решить СЛАУ",
Evaluate('J'='f2(convert([C,T,L],Matrix)).convert([[C1],[T1],
[L1]],Matrix)')), MathMLViewer[J]() ],
[ Button("Закрыть", Shutdown())] ])):
> Maplets[Display](perem);
```