Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ учащихся

«Прикладные вопросы математики»

Математическое моделирование

Моделирование акустических волн в твёрдых средах

Дробинин Антон, Лобачев Владимир

МОУ «Лицей №1» г. Перми, 11 кл.

Волегов Павел Сергеевич

к.ф.-м.н., доц. каф. ММСП

ПНИПУ

Пермь, 2011

Введение

Акустические волны это один из видов механических колебаний, которые представляют собой изменение состояние среды, распространяющееся в пространстве с течением времени. Достаточно взять одну частицу среды и передвинуть её из положения равновесия, чтобы нарушить равновесие всех соседних частиц. При этом сумма сил, которые осуществляют взаимодействие между частицами, для каждой из частиц станет отличной от ноля, и соседние частицы придут в движение. Так как частицы покинули своё положение равновесия, соседние с ними частицы также начнут движение, в свою очередь, действуя на следующие и так далее. Таким образом, область сжатия начнёт двигаться в среде. За областью сжатия следует область растяжения, образуется ряд чередующихся областей сжатия и растяжения, распространяющихся в среде в виде волны. Каждая частица упругой среды в этом случае будет совершать колебательные движения. При распространении упругих волн частицы среды не переносятся, а лишь совершают колебательные движения относительно точек равновесия.

При распространении акустической волны можно наблюдать следующие явления:

- Резонанс – резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний при совпадении частоты изменения внешней силы, действующей на систему, с частотой свободных колебаний.
- Интерференция – сложение в пространстве двух (или нескольких) волн, при котором образуется постоянное во времени распределение амплитуды результирующих колебаний в различных точках пространства.
- Дифракция – отклонение от прямолинейного распространения волн, огибание волнами препятствий.
- Угол отражения равен углу падения (согласно принципу Гюйгенса).

Эти явления так же наблюдаются при наличии дефектов.

Актуальность и новизна

Новизна выполняемой нами работы состоит в следующем:

Нами будет изучен метод моделирования, который часто используется при решении огромного количества задач.

Создание модели включает в себя написание программы в среде Delphi на языке Object Pascal, что позволит лучше изучить данную среду программирования.

Объектом моделирования являются звуковые волны. Поэтому при выполнении работы так же будут изучены упругие волны.

Актуальность работы заключается в том, что мы попытаемся создать модель распространения волн не только в плоских телах, но и в телах обладающих реальными размерами. А так же попытаемся смоделировать поведение волн при наличии в среде различных дефектов. Найти литературу подробно иллюстрирующую как распространяются упругие волны весьма непросто. Кроме того модель позволит рассмотреть движение волны.

Цель

Целью работы является построение модели распространения звука, которая позволила бы наблюдать за движением волны и удовлетворяла бы следующим минимальным условиям:

1. Распространение волн в одномерных и двумерных средах
2. Адекватное распространение волны при наличии в среде различных дефектов
3. Чёткая видимость явлений, которые могут возникать в реальности

Задачи

1. Поиск и изучение литературы об упругих волнах и механических колебаниях
2. Решение задачи в общем виде
3. Написание программы для самого простого случая, одномерной цепочки одинаковых атомов без дефектов. Тестирование программы (главным образом проверка на адекватность)
4. Написание более сложной программы для двумерного тела. Тестирование
5. Дальнейшее усложнение

Концептуальная постановка

Согласно молекулярно-кинетической теории все тела состоят из атомов – маленьких частиц, которые находятся в постоянном, неуничтожимом движении, притягиваются на большом расстоянии и отталкиваются на близком. Атомы образуют решётку.

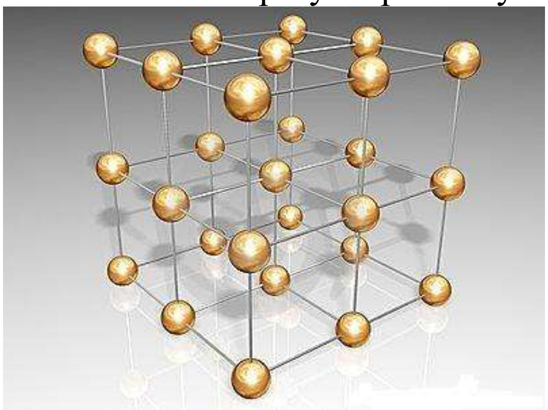

Рис. 1 Кристаллическая решётка

Для решения задачи мы используем имитационный метод.
Так как при распространении волны происходит последовательное увеличение и уменьшение расстояния между атомами, мы представляем, что материал представляет собой совокупность материальных точек (сетку или решетку), соединенных пружинами.

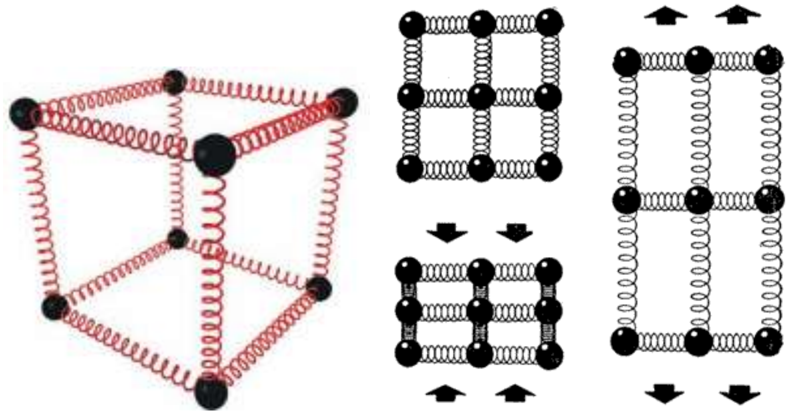

Рис. 2 Математическая постановка (имитация решётки и сил взаимодействия зарядов)

Атомы можно представить материальными точками, потому что их размеры бесконечно малы по сравнению с макроскопическими телами. Это даёт возможность использовать закон Гука. Но в таком случае деформации материала не могут выходить из предела пропорциональности.
Кроме того мы воспользуемся следующими упрощениями:

- Пружинки, соединяющие атомы не имеют массы, так как в реальной ситуации пружинок вовсе нет.

- В первом приближении материал сплошной и не имеет дефектов. Возможны дальнейшие усложнения.

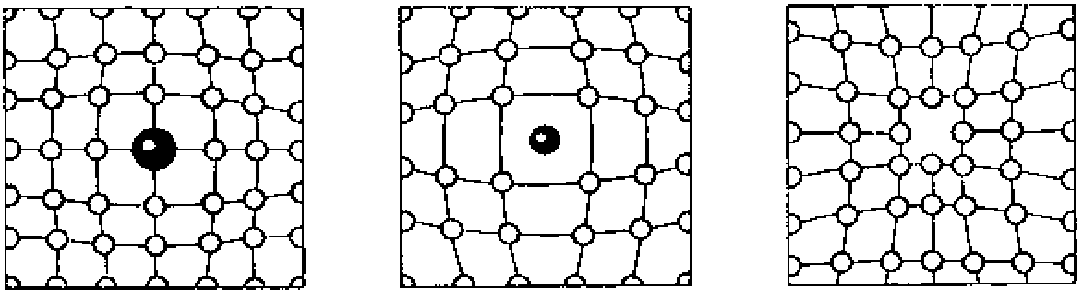

Рис. 3 Виды точечных дефектов (замещение, внедрение, вакансия)

- Атомы неподвижны и находятся в положениях равновесия. Считаем их неподвижными, потому что амплитуда их колебаний очень мала, а скорость имеет порядок приблизительно 10^6, из-за чего этими колебаниями можно пренебречь.
- Пренебрегаем силой сопротивления и притяжением земли. Сила притяжения пренебрежимо мала в сравнении с силами межмолекулярного взаимодействия. Силой сопротивления пренебрегаем, потому что между атомами нет среды.
- Каждый атом взаимодействует с четырьмя соседними.

Математическая постановка

i – номер точки по горизонтали
j – номер точки по вертикали
x_{ij} - координата
m – масса мат. точки
$\vec{a}$ - ускорение
x,y – оси
$\vec{v}$ – скорость
t – время
$\vec{F}_{ij}$ - сила действующая со стороны точки i,j
k – коэффициент жесткости
l_0 - начальное расстояние между атомами

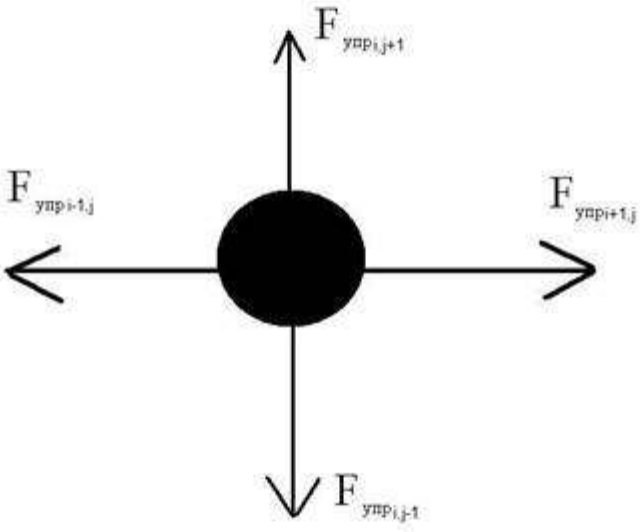

Рис. 4 Силы, действующие на частицу i, j

Запишем второй закон Ньютона(1) для произвольной частицы. А так же формулы для вычисления ускорения(2) и скорости(3).

$$m\vec{a} = \overrightarrow{F_{i-1j}} + \overrightarrow{F_{i+1j}} + \overrightarrow{F_{ij+1}} + \overrightarrow{F_{ij-1}}; \quad (1)$$

$$\vec{a} \approx \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}; \quad (2)$$

$$\vec{v} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (3)$$

Проецируем второй закон ньютона на оси x и y.

$$x: \ ma_x = k\,|(x_{ij} - x_{(i-1)j}) - l_0|_x + k\,|(x_{ij} - x_{(i+1)j}) - l_0|_x; \quad (4)$$

$$y: \ ma_y = k\,|(y_{ij} - y_{i(j-1)}) - l_0|_y + k\,|(y_{ij} - y_{i(j+1)}) - l_0|_y; \quad (5)$$

Преобразуем формулы (4) и (5) для того, чтобы получить зависимости проекций ускорения произвольной частицы от координат соседних с ней точек.

$$a_x = \frac{k\left|(x_{ij} - x_{(i-1)j}) - l_0\right|_x + k\left|(x_{ij} - x_{(i+1)j}) - l_0\right|_x}{m} \qquad (6)$$

$$a_y = \frac{k\left|(y_{ij} - y_{i(j-1)}) - l_0\right|_y + k\left|(y_{ij} - y_{i(j+1)}) - l_0\right|_y}{m} \qquad (7)$$

Теперь, зная зависимость ускорения от положения тела в данный момент, можно найти скорость, которую будет иметь частица на следующем такте(её будем считать нулевой).

$$V_x = V_{x0} + a_x \Delta t \qquad (8)$$

$$V_y = V_{y0} + a_y \Delta t \qquad (9)$$

Формулы для нахождения координат:

$$x = x_0 + V_{x0}\Delta t + \frac{a_x (\Delta t)^2}{2} \qquad (10)$$

$$y = y_0 + V_{y0}\Delta t + \frac{a_y (\Delta t)^2}{2} \qquad (11)$$