Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ учащихся

«Прикладные вопросы математики»

Алгебра

Решение уравнений с параметром

Елисеев Юрий,

МОУ «Лицей №1» г. Перми, 11 кл.

Сидорова Елена Борисовна,

преподаватель математики

МОУ «Лицей №1» г. Перми

Введение

Просматривая различные пособия и сборники задач для поступающих в ВУЗ, я обратил внимание на то, что практически везде в них присутствуют примеры с параметрами. Однако в школьном курсе математики этим задачам отводится незначительное место.

А ведь при решении уравнений и неравенств с параметрами развивается вариативное мышление, т.к. приходится разбирать все возможные способы решения для того, чтобы найти такие значения параметров, при которых общее решение уравнения или неравенства обладает некоторыми свойствами. Эта тема меня заинтересовала еще тем, что умение решать такие задачи необходимо мне для успешной сдачи экзамена по математике при поступлении в ВУЗ.

Актуальность данной темы определяется необходимостью уметь решать такие уравнения с параметрами при сдачи Единого Государственного экзамена и на вступительных экзаменах в высшие учебные заведения.

Цель моего проекта – научится решать уравнения и неравенства с параметрами, используя различные способы решения и подходы к примерам. Поскольку данная тема очень обширна, и охватить ее в одной работе нереально, я решил разобрать три типа задач:показательные ,логарифмичесские и тригонометричесские уравнения.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1) дать определения понятиям уравнение с параметрами;
2) показать принцип решения данных уравнений на общих случаях;
3) показать решение уравнений с параметрами, связанных со свойствами показательной, логарифмической и тригонометрической функциями.

Для выполнения поставленной цели были использованы следующие **методы**: использование литературы разного типа, работа в группах на уроках алгебры и занятиях элективного курса по математике.

Объектом исследовательской работы было решение уравнений с параметрами, связанных со свойствами выше представленных функций.

Знакомство с параметрами.

ПАРАМЕТР (от греческого

определяется множество всех окружностей радиуса 1 на плоскости x0y; полагая, например, что a=3, b=4, выделяют из этого множества вполне определенную окружность с центром (3,4), следовательно, a и b суть параметра окружности в рассматриваемом множестве.

Решить уравнение или неравенство с параметром – значит для всех допустимых значений параметра найти множество всех решений этого уравнения или неравенства. Причем, существенным этапом решения задач с параметрами является запись ответа. Особенно это относится к тем задачам, в которых возможны разные варианты ответов в зависимости от значений параметра (иногда говорят, что решение «ветвится» в зависимости от параметра).

Задачи с параметрами играют важную роль в формировании логического мышления и математической культуры, но их решение вызывает значительные затруднения. Это связано с тем, что каждое уравнение с параметрами представляет собой целый класс обычных уравнений, для каждого из которых должно быть получено решение. Такие задачи предлагаются на едином государственном экзамене и на вступительных экзаменах в вузы.

Если в уравнении некоторые коэффициенты заданы не конкретными числовыми значениями, а обозначены буквами, то они называются параметрами, а уравнение параметрическим.

Естественно, такой небольшой класс задач многим не позволяет усвоить главное: параметр, будучи фиксированным, но неизвестным числом, имеет как бы двойственную природу. Во-первых, предполагаемая известность позволяет «общаться» с параметром как с числом, а во-вторых, - степень свободы общения ограничивается его неизвестностью. Деление на выражение, содержащее параметр, извлечение корня четной степени из подобных выражений требуют предварительных исследований. Как правило, результаты этих исследований влияют и на решение, и на ответ.

Основное, что нужно усвоить при первом знакомстве с параметром, - это необходимость осторожного обращения с фиксированным, но неизвестным числом. Этому, во многом будут способствовать мои примеры.

Необходимость аккуратного обращения с параметром хорошо видна на тех примерах, где замена параметра числом делает задачу банальной. К таким задачам, например, относятся: сравнить два числа, решить линейное или квадратное уравнение, неравенство и т.д.

Обычно в уравнении буквами обозначают неизвестные.

Решить уравнение - значит:

найти множество значений неизвестных, удовлетворяющих этому уравнению. Иногда уравнения, кроме букв, обозначающих неизвестное(X, Y,Z), содержат другие буквы, называемые параметрами(a, b, c). Тогда мы имеем дело не с одним, а с бесконечным множеством уравнений.

При одних значениях параметров уравнение не имеет корней, при других – имеет только один корень, при третьих – два корня.

При решении таких уравнений надо:

1) найти множество всех доступных значений параметров;

2) перенести все члены, содержащие неизвестное, в левую часть уравнения, а все члены, не содержащие неизвестного в правую;

3) привести подобные слагаемые;

4) решать уравнение ax = b.

Возможно три случая.

1. a 0, b – любое действительное число. Уравнение имеет единственное

решение x = .

2. a = 0, b = 0. Уравнение принимает вид: 0x = 0, решениями являются все x R.

3. a = 0, b$\neq$ 0. Уравнение 0x = b

решений не имеет.

Существенным этапом решения уравнений с параметрами является запись ответа. Особенно это относится к тем примерам, где решение как бы «ветвится» в зависимости от значений параметра. В подобных случаях составление ответа – это сбор ранее полученных результатов. И здесь очень важно не забыть отразить в ответе все этапы решения.

В только что разобранном примере запись ответа практически повторяет решение. Тем не менее, я считаю целесообразным привести ответ.

Ответ:

$x = \frac{b}{a}$ при $a \neq 0$, b – любое действительное число;

x – любое число при $a \neq 0$, $b \neq 0$;

решений нет при $a = 0$, $b \neq 0$.

Решение уравнений с параметрами

1. Найдем значения параметра n, при которых уравнение $15 \cdot 10^{x} - 20 = n - n \cdot 10^{x+1}$ не имеет корней?

Решение: преобразуем заданное уравнение: $15 \cdot 10^{x} - 20 = n - n \cdot 10^{x+1}$;

$15 \cdot 10^{x} + n \cdot 10^{x+1} = n + 20$; $10^{x} \cdot (15 + 10n) = n + 20$; $10^{x} =$.

Уравнение не будет иметь решений при $\frac{n+20}{15+10n} \leq 0$, поскольку 10^{x} всегда положительно.

Решая указанное неравенство методом интервалов, имеем: $\frac{n+20}{15+10n} \leq 0$; $-20 \leq n < -1,5$.

Ответ: [-20;-1.5)

2. Найдем все значения параметра a, при которых уравнение $\lg^2 (1 + x^2) + (3a - 2)\cdot \lg(1 + x^2) + a^2 = 0$ не имеет решений.

Решение: обозначим $\lg(1 + x^2) = z$, $0 \le z$, тогда исходное уравнение примет вид: $z^2 + (3a - 2) \cdot z + a^2 = 0$. Это уравнение – квадратное с дискриминантом, равным $(3a - 2)^2 - 4a^2 = 5a^2 - 12a + 4$. При дискриминанте меньше 0, то есть при $5a^2 - 12a + 4 < 0$ уравнение не имеет решений ,то есть выполняется при $0,4 < a < 2$.

Ответ: (0,4; 2).

3. Найдем наибольшее целое значение параметра a, при котором уравнение $\cos 2x + a\sin x = 2a - 7$ имеет решение.

Решение: преобразуем заданное уравнение:

$\cos 2x + a\sin x = 2a - 7$; $1 - 2\sin^2 x + a\sin x = 2a - 7$; $\sin^2 x$ - $a\sin x + a - 4 = 0$;

$(\sin x - 2) \cdot$ $= 0$.

Решение уравнения $(\sin x - 2) \cdot$ $= 0$ дает:

$(\sin x - 2) = 0$; x принадлежит пустому множеству.

$\sin x$ - $= 0$; $x = (-1)^n \arcsin\left(\frac{a}{2} - 2\right) + pn$, $n \in Z$ при ≤ 1.

Неравенство $\left|\left(\frac{a}{2} - 2\right)\right| \le 1$ имеет решение $2 \le a \le 6$, откуда следует, что наибольшее целое значение параметра а равно 6.

Ответ: 6.

4. Указать наибольшее целое значение параметра a, при котором корни

уравнения $4x^2 - 2x + a = 0$ принадлежит интервалу (- 1; 1).

Решение: корни заданного уравнения равны: $x_1 =$ (1+)

$x_2 =$, при этом $a \le \frac{1}{4}$.

По условию $-1 < \frac{1}{4}(1+\sqrt{1-4a}) < 1$ $< \sqrt{1-4a} < 3$,

$-1 < \frac{1}{4}$ < 1 $>$ > -3.

Решением, удовлетворяющим указанным двойным неравенствам, будет решение двойного неравенства: $-3 < \sqrt{1-4a} < 3$.

Неравенство $-3 < \sqrt{1-4a}$ выполняется при всех $a \le \frac{1}{4}$, неравенство $\sqrt{1-4a} < 3$ – при $-2 < a \le \frac{1}{4}$. Таким образом, допустимые значения параметра a лежат в интервале (-2; .

Наибольшее целое значение параметра а из этого интервала, которое одновременно принадлежит и интервалу (-1; 1), равно 0.

Ответ: 0.

5. При каких значениях параметра a число корней уравнения

2 - x = 0 равно а?

Решение: построим эскиз графика функции, $y = |x^2 - 8|x| + 7|$ при этом учтем, что функция у – четная и ее график – симметричен относительно оси ординат, в силу чего можно ограничиться построением только его правой части ($x \ge 0$). Также учтем, что трехчлен $x^2 - 8x + 7$ имеет корни $x = 1$ и $x = 7$, при $x = 0$ $y = 7$, а при $x = 4$ – минимум, равный – 9. На рисунке: пунктирными прямыми изображена парабола

$y = x^2 - 8x + 7$ с минимумом $y_{мин}$ равным - 9 при $x_{мин} = 4$, и корнями $x_1 = 1$ и $x_2 = 7$; сплошными линиями изображена часть параболы y = $^2 – 8x +$ (1 < x < 7), полученная зеркальным отражением относительно оси 0x части параболы $x^2 - 8x + 7$ при 1 < x < 7.

(Эскиз левой части графика функции при x < 0 можно получить, отразив эскиз правой части графика симметрично относительно оси 0y).

Проводя горизонтали y = *a*, *a* ∈ N, получаем k точек ее пересечение с линиями эскиза графика. Имеем:

a	0	[1; 6]	7	8	9	
к	4	8	7	6	4	2

Таким образом, *a* = k при *a* = 7.

Ответ: 7.

6. Указать значение параметра *a*, при котором уравнение

$x^4 + (1 – 2a)x^2 + a^2 – 4 = 0$ имеет три различных корня.

Решение: всякое биквадратное уравнение в общем случае имеет две пары корней, причем корни одной пары различаются только знаком. Три корня возможны в случае, если уравнение имеет одну пару в виде нуля.

Корни заданного уравнения равны:

x =

Одна из пар корней будет равна 0, если (2a-1) = . Решая это уравнение при условии 2a-1 > 0 $> \frac{1}{2}$, имеем: $(2a – 1) = \sqrt{17 - 4a}$ $(2a – 1)^2 = 17 – 4a$ ⇔ $4a^2 – 4a +1 = 17 – 4a$ ⇔ a = 2.

Ответ: 2.

7. Определить число натуральных n, при которых уравнение не имеет решения.

Решение: $x \neq 0$, $n \neq 10$.

$\frac{x-8}{n-10} =$ $\Leftrightarrow$

Уравнение $x^2 - 8x - n(n-10) = 0$ не имеет решения, если его дискриминант меньше 0, т.е. $16 + n(n-10) < 0 \Leftrightarrow n^2 - 10n + 16 < 0 \Leftrightarrow (n-2)(n-8) < 0 \Leftrightarrow 2 < n < 8$.

В найденном интервале 5 натуральных чисел: 3, 4, 5, 6 и 7. Учитывая условие $n \neq 10$, находим, что общее число натуральных n, при которых уравнение не имеет решений, равно 6.

Ответ: 6.

8. Найти наименьшее целое значение параметра a, при котором уравнение

$(0 < x <$ $)$ имеет решение.

Решение: по условию $1 > \sin x > 0 \Leftrightarrow 1 <$ $< +$,

$1 > \cos x > 0 \Leftrightarrow 1 <$ $< +\infty$,

Следовательно, $2 < a < +\infty$.

Возводя обе части заданного уравнения в квадрат, имеем:

$= a^2 \Leftrightarrow$ $= a^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $= a^2$.

Введем переменную z = . Тогда исходное уравнение примет вид:

$z^2 + 2z - a^2 = 0$. Оно имеет решение при любом *a,* поскольку его дискриминант

$D = 1 + a^2$ положителен при любом *a*.

Учитывая, что $2 < a < +\infty$, заключаем, что наименьшее целое значение параметра *a*, при котором заданное уравнение имеет решение равно 3.

Ответ: 3.

Заключение

Во время создания данного проекта я взялся за детальное рассмотрение парметра на примерах математичесских задач.Ведь параметры встречаются гораздо чаще чем мы себе представляем.Изучение многих процессов и геометрических закономерностей часто приводит к решению задач с параметрами.Включая такое большое колличество столкновений ,пусть и косвенных,с параметром ,я пришел к выводу что необходимо изучать данную тему более детально.Так же непосредственным образом она развивает логическое и вариативное мышление человека ,что позволит ему раздвинуть грани своих возможностей.В моей работе рассмотрены часто встречающиеся типы уравнений,неравенств и их систем,и,я надеюсь,что знания,которые я получил в процессе работы ,помогут мне при сдаче Единого Государственного Экзамена.Так же ,готовя данную работу ,я ставил цель более глубокого изучения этой темы,выявления наиболее рационального решения ,быстро приводящего к ответу.На мой взгляд графический метод явлеяется удобным и быстрым способом решения уравнений и неравенств с параметрами.

Используемая литература.

1. Горнштейн П.И., В.Б.Полонский, М.С.Якир Задачи с параметрами, РИА , 2002г. 290 с.

Ефимов Е.А. , Задачи с параметром , Самара , 2006г. 64с.

Козко А.И. ,Математика задача С5, МЦНМО ,2011г. 144с.

Просветов Г.И. ,Математика. Решение задач повышенной сложности,РДЛ, 2005г. 168с.

Родионов Е.М. , Справочник по математике для поступающих в вузы , МЦ "Аспект" , 1992г. 144 с.

Родионов Е.М. ,Сборник задач по математике ,МЦ "Аспект" ,2007г. 527с.

Саттер Г.А. ,Сложные задачи на часть С, Вильямс ,2005г. 272с.

Ястребинецкий Г.А. ,Уравнения и неравенства, содержащие параметры,Наука, 1972г. 256с.