

Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ учащихся
«Прикладные вопросы математики»

Математическое моделирование

Краевые условия в уравнении нестационарной теплопроводности

Губский Арсений

МОУ «Лицей №1» г. Перми, 11 кл.

Волегов Павел Сергеевич

к.ф.-м.н., доц. каф. ММСП

ПНИПУ

Пермь

2011

Оглавление

| | |
|---|--|
| Введение..... | 3 |
| Уравнение теплопроводности..... | Ошибка! Закладка не определена. |
| Типичные краевые условия для уравнения теплопроводности | 4 |
| Результаты | 6 |
| Заключение | 7 |
| Литература | 7 |

Введение

В повседневной жизни мы часто сталкиваемся с процессом теплопроводности. С наступлением нового времени года, человек одевается по-разному, если наступает зима, то человек одевается теплее, чтобы ему было тепло, или, переходя на язык физики, чтобы уменьшить процесс теплопроводности между человеком и окружающей средой. В чем же заключается явление теплопроводности?

Процесс теплопроводности заключается в том, что кинетическая энергия атомов и молекул, которая определяет температуру тела, передаётся другому телу при их взаимодействии или передаётся из более нагретых областей тела к менее нагретым областям.



Рис.1

Иногда теплопроводностью называется также количественная оценка способности конкретного вещества проводить тепло.

Целью исследовательской работы является разработка математической модели процесса теплопроводности с учетом различных граничных и начальных условий.

Задачи:

1. Сформулировать концептуальную постановку задачи моделирования.
2. Записать основной закон Фурье.
3. Вывести уравнение теплопроводности.
4. Решить задачу численным методом.

1. Основные понятия и определения

Существуют три основных вида теплообмена: теплопроводность, конвекция и тепловое излучение .

Теплопроводность – это молекулярный перенос теплоты между непосредственно соприкасающимися телами или частицами одного тела с различной температурой, при котором происходит обмен энергией движения структурных частиц (молекул, атомов, свободных электронов).

Конвекция осуществляется путем перемещения в пространстве не-равномерно нагретых объемов среды. При этом перенос теплоты неразрывно связан с переносом самой среды.

Тепловое излучение характеризуется переносом энергии от одного тела к другому электромагнитными волнами.

Часто все способы переноса теплоты осуществляются совместно. Например, конвекция всегда сопровождается теплопроводностью, так как при этом неизбежно соприкосновение частиц, имеющих различные температуры.

Типичные краевые условия для уравнения теплопроводности

Для того чтобы однозначно определить температурное поле, необходимо задать краевые условия (начальные и граничные). В общем случае для рассматриваемой трехмерной области Ω с границей $\partial\Omega$ *начальные условия* имеют вид

$$T(0, x, y, z) = T_0(x, y, z), \quad x, y, z \in \Omega,$$

они задают начальное распределение температуры в рассматриваемом объеме.

Граничные условия, задаваемые на границе $\partial\Omega$, описывают тепловое взаимодействие рассматриваемого тела с окружающей средой. Итак, *граничные условия* могут быть

I-го рода

$$T(t, x, y, z) = T_1(t, x, y, z), \quad x, y, z \in \partial\Omega, \quad ($$

где $T_1(t, x, y, z)$ – заданная функция.

Эти условия задаются, если на поверхности рассматриваемого тела искусственно поддерживается некоторая температура (постоянная в частном случае)

II-го рода

$$\lambda \mathbf{n} \cdot \nabla T(t, x, y, z) = -q_n(t, x, y, z), \quad x, y, z \in \partial\Omega_q,$$

где $q_n(t, x, y, z)$ – заданная плотность теплового потока на поверхности тела, направленного по нормали к поверхности (при нагреве $q_n > 0$).

Эти условия могут быть заданы, например, при нагреве в высокотемпературных печах, где передача тепла происходит излучением, когда температура тела значительно меньше температуры излучающей поверхности.

III-го рода

$$\lambda \mathbf{n} \cdot \nabla T(t, x, y, z) = -\alpha(T(t, x, y, z) - T_{cp}), \quad x, y, z \in \partial\Omega_\alpha,$$

Эти условия описывают конвективный теплообмен между поверхностью тела и окружающей средой при постоянном потоке тепла. Здесь α – коэффициент теплообмена с окружающей средой, $[\alpha] = \text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{°К})$, он равен количеству тепла, отдаваемого единицей площади поверхности тела в единицу времени при разности температур между поверхностью и средой в 1° .

Теплообмен тела, механизм которого описывается соотношением, называется теплообменом по закону Ньютона.

Граничные условия III-го рода могут быть использованы при рассмотрении нагревания или охлаждения тел лучеиспусканием. Согласно

закону Стефана – Больцмана лучистый поток тепла между двумя поверхностями равен

$$q(t, x, y, z) = \sigma^* [T^4(t, x, y, z) - T_a^4], \quad x, y, z \in \partial\Omega_\sigma$$

где σ^* – коэффициент лучеиспускания, T_a – абсолютная температура поверхности лучевоспринимающего тела.

Результаты моделирования

При задании 1 граничных условий (когда задана начальная температура на границах пластины) происходит следующее распределение температур (рис.4)

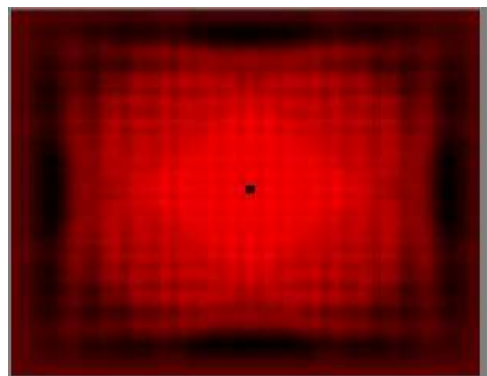


Рис.4

При задании 2 граничных условий (когда задан тепловой поток на границах пластины) получается такое распределение температур (рис.5)

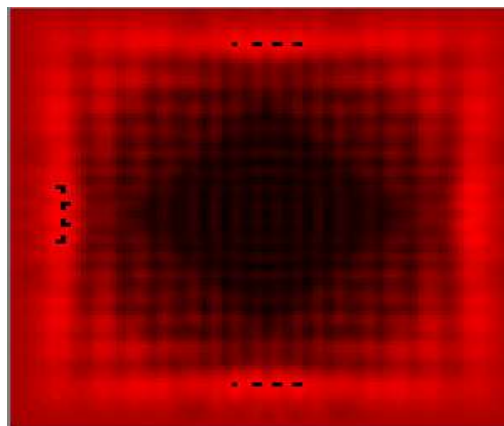


Рис.5

При задании 3 граничных условий(когда задан коэффициент обмена с окружающей средой и начальная температура на границах пластины) получается следующие распределение теплоты

Заключение

В результате исследования была создана математическая модель процесса теплопроводности с учетом различных граничных и начальных условий.

Литература

1. Н. Д. Няшина: Моделирование процессов и объектов в металлургии.