Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ учащихся

«Прикладные вопросы математики»

Алгебра

# Магические квадраты

Князева Анастасия,
МОУ «Лицей №1» г. Кунгур, 8 кл.
Пластинина Мария Игнатьевна,
учитель математики
МОУ «Лицей №1» г. Кунгур

## Введение

Однажды на уроке математики учитель предложил нам решить следующую задачу.

Задача: заполнить квадрат 3x3 натуральными числами от 1 до 9 включительно, так, чтобы были использованы все цифры и сумма чисел на всех строках, столбцах и диагоналях была одинакова.

Один из 30 учеников справился с нелёгкой задачей. Он изобразил заполненный квадрат на доске, сказав, что на его заполнение у него ушло минут 10-15. Он перебирал различные варианты, пока не пришел к нужному.

Меня заинтересовала предложенная задача. Но метод перебора мне не понравился: он отнимает очень много времени, хотя и позволяет тренировать свои вычислительные навыки. Это побудило меня заняться исследовательской работой.

Цель работы:

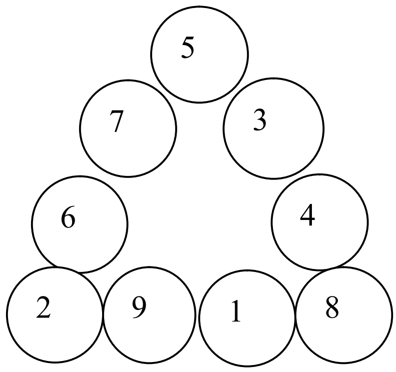
1. Познакомиться с магическими квадратами.
2. Узнать историю возникновения квадратов.
3. Научиться правильно и быстро заполнять магические квадраты.
4. Познакомиться поближе с популярной игрой судоку.
5. Узнать, знакомы ли мои одноклассники с чудесными квадратами.
6. Познакомиться с учёными, которые приложили немного труда для изучения математики.

## Магические фигуры

Фигуры называют магическими, если числа, нужные для их заполнения размещены так, что в каждом горизонтальном, вертикальном и диагональном ряду получается одна и та же сумма.

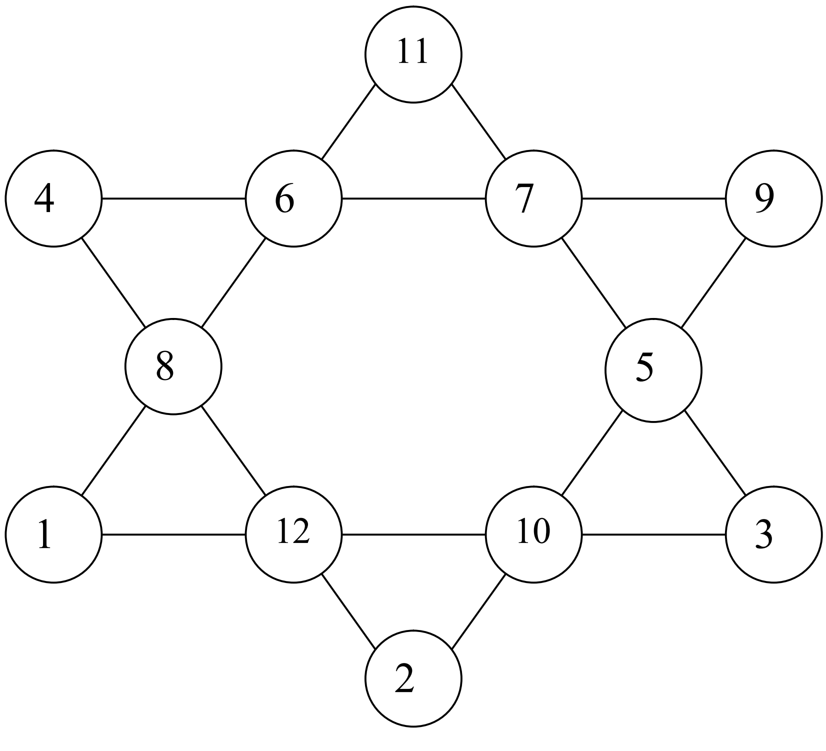
Магический треугольник.

В кружках этого треугольника расставлены все девять значащих цифр так, чтобы сумма их на каждой стороне составляла 20.




Проверяем: 5+3+4+8=20, 8+1+9+2=20, 2+6+7+5=20.

Шестиконечная магическая звезда.



У шестиконечной звезды все шесть рядов чисел имеют одну и ту же сумму:

| | |
|---|---|
| 4+6+7+9=26 | 11+6+8+1=26 |
| 4+8+12+2=26 | 11+7+5+3=26 |
| 9+5+10+2=26 | 1+12+10+3=26 |

Но сумма чисел, расположенных на вершинах звезды, другая:
4+11+9+3+2+1=30.

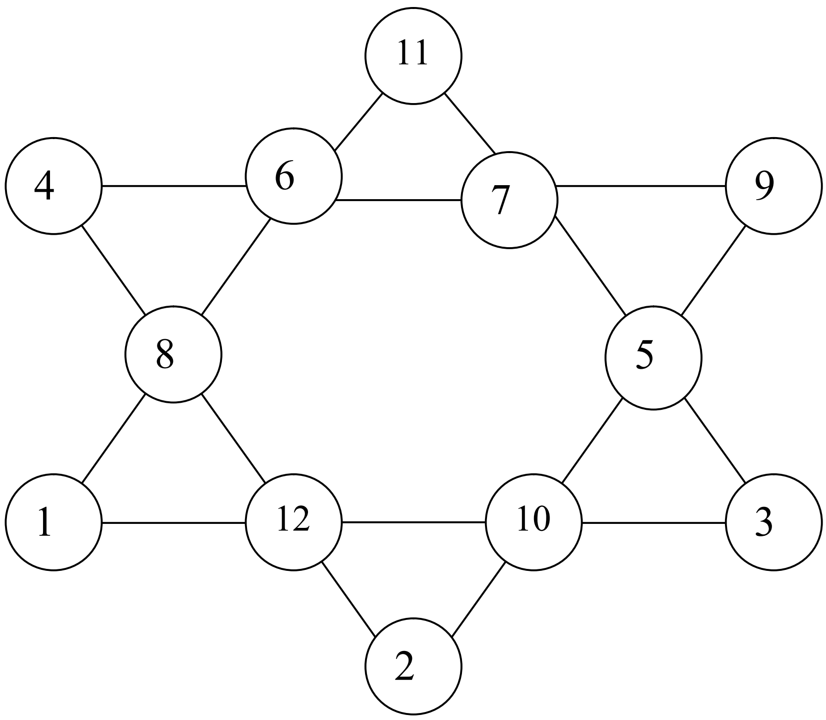
Но надо усовершенствовать эту звезду, расставив числа в кружках так, чтобы не только прямые ряды давали одинаковые суммы, но чтобы ту же сумму составляли числа на вершинах звезды.

Чтобы облегчить отыскание требуемого расположения чисел, будем руководствоваться следующими соображениями.

Сумма чисел на концах искомой звезды равна 26, сумма же всех чисел звезды 78. Значит, сумма чисел внутреннего шестиугольника равна 78-26=52.
Затем я рассмотрела один из больших треугольников. Сумма чисел каждой его стороны равна 26; я сложила числа всех трёх сторон – получила 26х3=78, причём каждая из чисел, стоящих на углах входит дважды. А так как сумма чисел трех внутренних пар (т.е. сумма чисел внутреннего шестиугольника) должна равняться 52, то удвоенная сумма чисел на вершинах каждого треугольника равна 78-52=26; однократная же сумма равна 13.

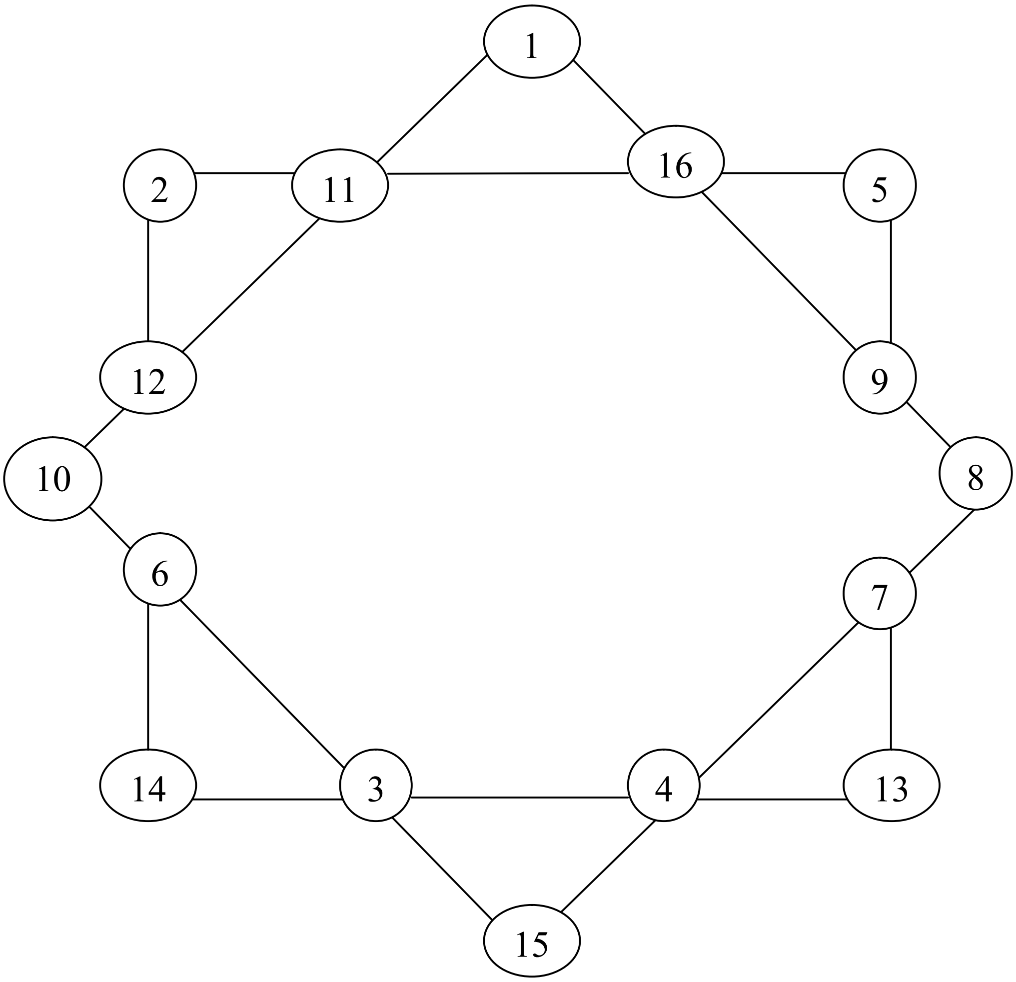
Поле поисков теперь заметно сузилось. Например, что не 12, ни 11 не могут занимать вершины звезды (почему?). Значит, испытание можно начинать с 10, причем сразу определяется какие два числа должны занимать остальные вершины треугольника: 1 и 2.

Продвигаясь таким путём далее, можно разыскать требуемое расположение.



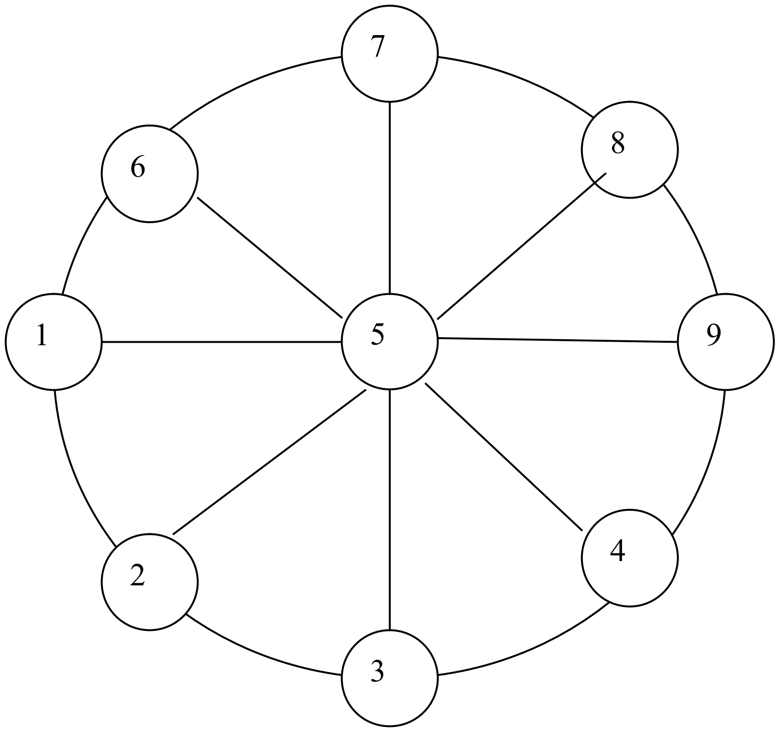
Восьмиконечная звезда.

Числа от 1 до 16 размещены в круги звезды, чтобы сумма чисел на стороне каждого квадрата была 34, и сумма их на вершинах каждого квадрата так же составляла 34.



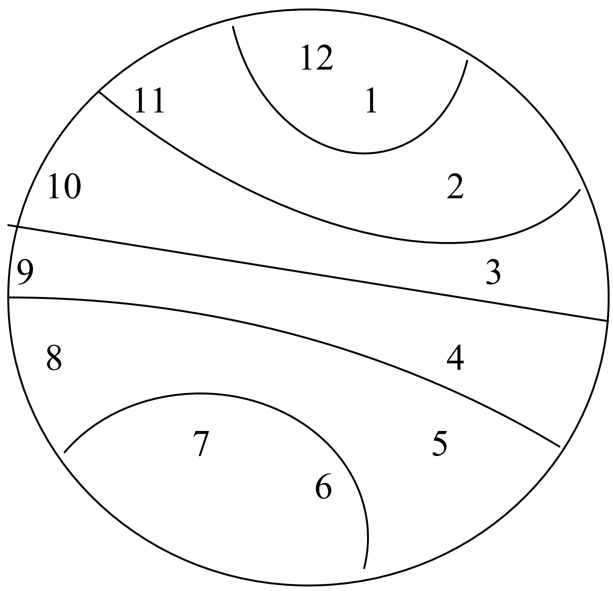

Числовое колесо.

Цифры от 1 до 9 размещены в числовом колесе так, чтобы одна цифра была в центре круга, прочие – у концов каждого диаметра, и чтобы сумма трёх цифр каждого ряда составляла 15.



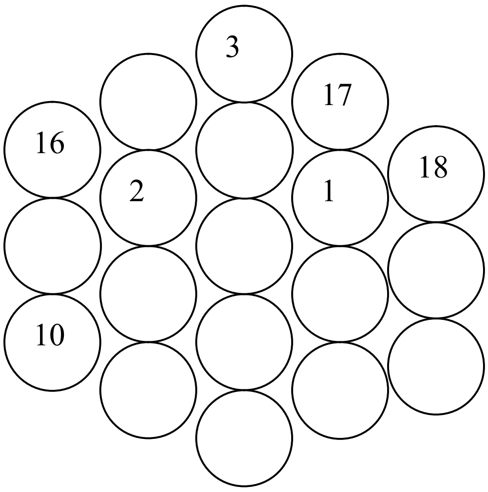

Магический циферблат.

Циферблат разделён на 6 частей любой формы, - так, чтобы сумма чисел, имеющихся на каждом участке, была одна и та же.

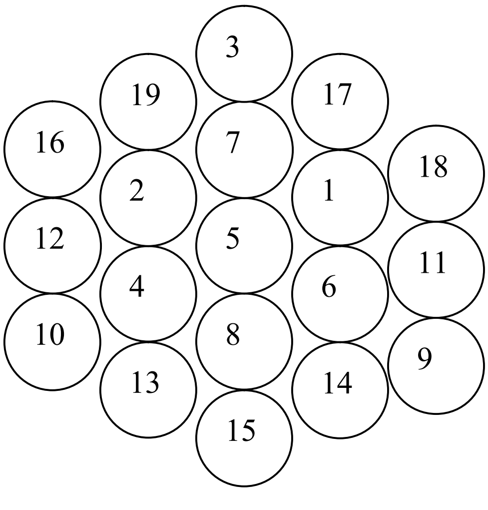


Магический цветок.

Надо вписать в свободные кружки натуральные числа так, чтобы в них оказались все числа от 1 до 19 и во всех пяти рядах каждого из трёх направлений (вертикального и двух наклонных) сумма чисел, стоящих в одном ряду, была одна и та же.



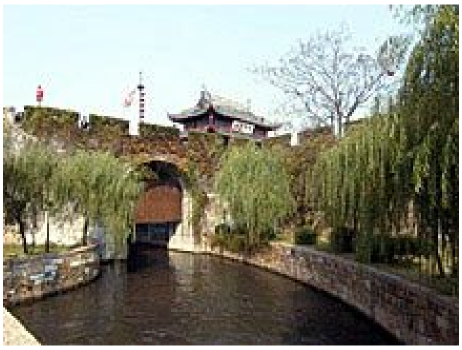

Поскольку в одном из рядов известны все числа (3, 17, 18), то имеется возможность найти сумму чисел ряда (постоянную ряда). В тех рядах, в которых по одному свободному кружку, легко определяются неизвестные числа. Так последовательно надо заполнить 4 верхних наклонных ряда и 2 крайних вертикальных. В следующих двух наклонных ряда будет по 2 неизвестных числа. Их надо отыскать, записав два равенства с двумя известными. Оставшиеся 4 нижних кружка нетрудно заполнить, так как останется использовать 4 известных числа.

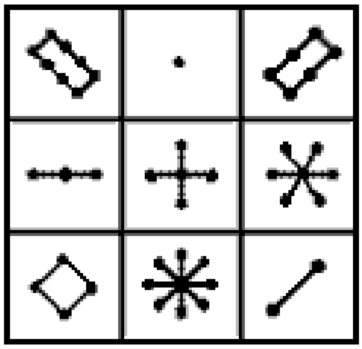



Также есть магический квадрат.

## История возникновения магических квадратов

Возникновение магических квадратов относится к глубокой древности. Согласно легенде, во времена правления императора Ю (ок. 2200 до н.э.) из вод Хуанхэ (Желтой реки) всплыла священная черепаха, на панцире которой были начертаны таинственные иероглифы, и эти знаки известны под названием Ло Шу.





Река Хуанхэ Священная черепаха Иероглифы

Таблица Ло Шу состоит из 9 клеток: 3 строк и 3 столбцов, заполненных натуральными числами от 1 до 9. В этом магическом квадрате суммы чисел по всем строкам, столбцам и двум диагоналям равны одному и тому же числу 15.

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 9 | 4 |
| 7 | 5 | 3 |
| 6 | 1 | 8 |

Таблица Ло Шу.

В Западной Европе в средние века магические квадраты были достоянием представителей мнимых наук - алхимии и астрологии. От старинных суеверных представлений эти числовые квадраты и получили своё необычное в математике название – «магические», то есть волшебные. Астрологи и алхимики верили, что дощечка с изображенным на ней магическим квадратом способным отвратить беду от человека, который носит на себе такой талисман.

Впервые изображение встречается на гравюре «Меланхолия» немецкого художника Альбрехта Дюрера (1514). Этот магический квадрат состоит из 16 клеток: 4 строк и 4 столбцов, заполненных натуральными числами от 1 до 16. В нем сумма чисел по каждой строке, каждому столбцу и двум диагоналям равна 34. Средние числа в нижней строке (15 и 14) означают дату 1514 — год издания этой гравюры А. Дюрера.

Гравюра «Меланхолия»

Немецкий художник А. Дюрер

Этот магический квадрат замечателен еще и другими интересными свойствами: в нем одному и тому же числу (34) равна сумма не только чисел, стоящих в строках, столбцах и двух диагоналях, но и суммы чисел, стоящих в квадратах из четырех клеток, расположенных по углам и в середине, а также сумма чисел, стоящих в вершинах этого магического квадрата, следовало бы называть как-нибудь иначе, например волшебными, сверхмагическими и т.п.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 3 | 2 | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 6 | 7 | 12 |
| 4 | 15 | 14 | 1 |

А на древнем востоке магическим квадратом приписывали таинственные свойства. Гете упоминает магические квадраты в сцене приготовления колдуньей омолаживающего зелья.

## Построение магических квадратов четвёртого, пятого порядка и квадрата восьмого порядка

Слово «порядок» означает в данном случае на одной стороне квадрата. Квадрат 3 х 3 имеет третий порядок, а квадрат 5 х 5 имеет – пятый.

### Построение магического квадрата четвёртого порядка.

Проведём диагонали квадрата 4 х 4

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|

Вставляем в клетки числа от 1 до 16, двигаясь слева на право. Если число попало в клетку, пересечённую диагональю, то его пропускаем.

Получается вот такой квадрат.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | |
| 5 | | | 8 |
| 9 | | | 12 |
| | 14 | 15 | |

Теперь ставим 16 в левый верхний угол и вписываем оставшиеся числа в порядке убывания.

**Построение магического квадрата пятого порядка.**

Поставим 1 в любую клетку квадрата 5 х 5.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | 1 | | | |

Сделаем вертикальный ход шахматного коня (одна клетка вправо и две клетки вверх) и поставим 2.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | 2 | | |
| | | | | |
| | 1 | | | |

Будем делать вертикальные ходы шахматного коня, ставить числа в порядке возрастания, пока не заполним весь квадрат.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | 3 | |
| | | | | |
| | | 2 | | |
| | | | | |
| | 1 | | | |

Если ход коня выводит за верхний край квадрата – возвращаемся снизу.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | 3 | |
| | | | | |
| | | 2 | | |
| | | | | 4 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | | | |

Если ход выводит за правый край – возвращаемся слева.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | 3 | |
| 5 | | | | |
| | | 2 | | |
| | | | | 4 |
| | 1 | | | |

Если клетка уже занята – возвращаемся к только что вписанному числу и ставим следующие прямо под ним.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | 3 | |
| 5 | | | | |
| 6 | | 2 | | |
| | | | | 4 |
| | 1 | | | |

**Магический квадрат восьмого порядка.**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 48 | 31 | 50 | 33 | 16 | 63 | 18 |
| 30 | 51 | 46 | 3 | 62 | 19 | 14 | 35 |
| 47 | 2 | 49 | 32 | 15 | 34 | 17 | 64 |
| 52 | 29 | 4 | 45 | 20 | 61 | 36 | 13 |
| 5 | 44 | 25 | 56 | 9 | 40 | 21 | 60 |
| 28 | 53 | 8 | 41 | 24 | 57 | 12 | 37 |
| 43 | 6 | 55 | 26 | 39 | 10 | 59 | 22 |
| 54 | 27 | 42 | 7 | 58 | 23 | 38 | 11 |

Этот квадрат восьмого порядка составлен в XVIII веке великим Леонардом Эйлером. Каждый горизонтальный ряд или вертикальный даёт сумму 260, а половина ряда сумму 130.

**Магические превращения**

Получение магических квадратов было популярным развлечением среди математиков, создавались огромные квадраты, например 43х43, содержащий числа от 1 до 1849, причём обладающие свойствами магических квадратов и ещё многими дополнительными свойствами.

Магических квадратов 2х2 не существует. Магических квадратов 3х3 — один — остальные такие квадраты получаются из него поворотами и симметриями. Магических квадратов 4х4 уже 800, а количество магических квадратов 5х5 близко к четверти миллиона.

Как известно, что из любого магического квадрата можно получить бесконечное множество других магических квадратов путём умножения всех его чисел на одинаковый множитель или прибавления к ним одного и того же слагаемого. Если составить квадрат и повернуть его мысленно на четверть полного оборота (на 90 градусов), то получим другой магический квадрат.

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 1 | 8 |
| 7 | 5 | 3 |
| 2 | 9 | 4 |

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 3 | 4 |
| 1 | 5 | 9 |
| 6 | 7 | 2 |

Дальнейшие повороты — на 180 градусов (половину полного оборота) и на 270 градусов (три четверти полного оборота) — дадут ещё два видоизменения начального квадрата.

Каждый из вновь полученных магических квадратов можно, в свою очередь, видоизменить, если представить себе, что он как бы отражён в зеркале.

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 1 | 8 |
| 7 | 5 | 3 |
| 2 | 9 | 4 |

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 9 | 4 |
| 7 | 5 | 3 |
| 6 | 1 | 8 |

Проделав с 9-клеточным квадратом все повороты и отражения, получаем следующие его видоизменения:

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 1 | 8 |
| 7 | 5 | 3 |
| 2 | 9 | 4 |

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 1 | 6 |
| 3 | 5 | 7 |
| 4 | 9 | 2 |

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 7 | 6 |
| 9 | 5 | 1 |
| 4 | 3 | 8 |

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 7 | 2 |
| 1 | 5 | 9 |
| 8 | 3 | 4 |

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 9 | 4 |
| 7 | 5 | 3 |
| 6 | 1 | 8 |

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 3 | 4 |
| 1 | 5 | 9 |
| 6 | 7 | 2 |

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 3 | 8 |
| 9 | 5 | 1 |
| 2 | 7 | 6 |

Это полный набор всех магических квадратов, какие вообще могут быть составлены из первых девяти чисел.

Приведём ещё два магических квадратов, состоящие из 16 и 9 клеток и заполненные натуральными (не подряд) числами. Суммы одного из их по строкам, столбцам и диагоналям равны 77, а другого – 105.

Эти два магические квадраты представляют особенный интерес как в смысле трудности их составления, так и в смысле законов распределения простых чисел, а именно: если все числа этих магических квадратов умножить на 10, а затем ко всем числам большего из них прибавить 7, а ко всем числам меньшего прибавить 9, то получается снова магический квадрат, заполненные только одними простыми числами, и притом различными (не повторяющимися).

| | | | |
|---|---|---|---|
| 36 | 13 | 22 | 6 |
| 3 | 25 | 10 | 39 |
| 4 | 27 | 15 | 31 |
| 34 | 12 | 30 | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| 26 | 23 | 56 |
| 65 | 35 | 5 |
| 14 | 47 | 44 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 369 | 139 | 229 | 69 |
| 39 | 259 | 109 | 399 |
| 49 | 279 | 159 | 319 |
| 349 | 129 | 309 | 19 |

| | | |
|---|---|---|
| 269 | 239 | 569 |
| 659 | 359 | 59 |
| 149 | 479 | 449 |

Есть еще способ составления магических или числовых квадратов.

1. Сложите числа по горизонтали.

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 3 | |
| 5 | 1 | |
| | | |

2. Теперь по вертикали.

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 5 |
| 5 | 1 | 6 |
| | | |

3. Сложите ответы по горизонтали и вертикали.

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 5 |
| 5 | 1 | 6 |
| 7 | 4 | |

Полученные суммы должны совпадать.

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 5 |
| 5 | 1 | 6 |
| 7 | 4 | 11 |

Магические квадраты:

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 4 | 7 |
| 4 | 5 | 9 |
| 7 | 9 | 16 |

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 3 | 9 |
| 5 | 5 | 10 |
| 11 | 8 | 19 |

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 5 | 11 |
| 4 | 7 | 11 |
| 10 | 12 | 22 |

| | | |
|---|---|---|
| 7 | 2 | 9 |
| 3 | 6 | 9 |
| 10 | 8 | 18 |

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 2 | 8 |
| 6 | 7 | 13 |
| 12 | 9 | 21 |

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 3 | 11 |
| 1 | 8 | 9 |
| 9 | 10 | 20 |

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 4 | 12 |
| 6 | 7 | 13 |
| 14 | 11 | 25 |

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 3 | 7 |
| 6 | 5 | 11 |
| 10 | 8 | 18 |

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 9 | 11 |
| 8 | 4 | 12 |
| 10 | 13 | 23 |

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 5 | 13 |
| 7 | 6 | 13 |
| 15 | 11 | 26 |

| | | |
|---|---|---|
| 9 | 6 | 15 |
| 5 | 8 | 13 |
| 14 | 14 | 28 |

| | | |
|---|---|---|
| 7 | 5 | 12 |
| 3 | 4 | 7 |
| 10 | 9 | 19 |

## Квадраты с чётным числом клеток

Для составления магических квадратов с чётным числом клеток ещё не найдено общего и удобного правила. Сравнительно простой приём существует лишь для таких чётных квадратов, число клеток которых делится без остатка на 16; число клеток в стороне этих квадратов кратно 4, то есть сторона их состоит из 4, из 8, из 12 и т. д. клеток.

Условимся, какие клетки мы будем называть «противолежащими» друг другу. На квадрате показаны две пары противолежащих клеток: одна пара обозначена крестиками, другая — кружочками.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | X | | |
| О | | | | | |
| | | | | | О |
| | | X | | | |
| | | | | | |

Если клетка находится во втором сверху ряду на четвертом слева месте, то противолежащая ей клетка находится во втором снизу ряду на четвёртом справа месте.  Для клеток, взятых в диагональном ряду, противолежащие расположены на этой же диагонали.

Способ составления квадратов с указанным числом клеток в стороне объясним на примере квадрата из 8х8 клеток. Начинаем с того, что вписывают в клетки по порядку все числа от 1 до 64.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |

В полученном квадрате диагональные ряды дают одинаковую сумму — 260, как раз такую, какая и должна быть в математическом квадрате из 8х8 клеток. Но строки и столбцы этого квадрата имеют другие суммы. Так, первая верхняя строка даёт в сумме всего 36, то есть на 224 меньше, чем требуется (260 - 36); восьмая, самая нижняя, строка даёт в сумме 484, то есть на 224 больше, чем требуется (484 – 260). Каждое число восьмой строки на 56  больше находящегося над ним числа первой строки и это 224 = 4 х 56. Можно уравнять суммы этих строк, если половину чисел первой строки обменять местами находящимися под ними числами восьмой строки; например, числа 1, 2, 3. 4 обменять местами с числами 57, 58, 59, 60.

Сказанное о первой и восьмой строках верно также для строк второй и седьмой, третей и шестой, вообще для каждой пары строк, равностоящих от крайних. Производя обмен чисел во всех строках, получим квадрат с одинаковыми суммами строк.

Необходимо, чтобы и столбцы давали ту же сумму. При первоначальном расположении чисел мы могли бы достигнуть этого путём такого же обмена чисел, какой мы произвели сейчас с числами строк. Но теперь, после перестановок в строках, дело осложнилось. Чтобы быстро отыскать числа, подлежащие обмену, существует следующий приём, которым можно пользоваться с самого начала: вместо двояких перестановок — в строках и столбцах — обменивают местами те числа, которые противолежат друг другу. Одного этого правила всё же недостаточно — ведь мы установили, что обмену принадлежат не все числа ряда, а только половина; остальные числа остаются на прежних местах. Какие же из противолежащих пар надо обменивать?

На этот вопрос отвечают следующие четыре правила:

1. Надо магический квадрат разделить на четыре квадрата.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1х | 2 | 3 | 4х | 5х | 6 | 7 | 8х |
| 9х | 10х | 11 | 12 | 13 | 14 | 15х | 16х |
| 17 | 18х | 19х | 20 | 21 | 22х | 23х | 24 |
| 25 | 26 | 27х | 28х | 29х | 30х | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |

2. В левом верхнем квадрате отметить крестиками половину всех клеток так, чтобы в каждом столбце и в каждой строке этого квадрата. Это можно сделать различными способами — например, так как показано на приведённой выше фигуре.
3. В правом верхнем квадрате надо отметить крестиками клетки, симметричные тем, которые были отмечены в левом верхнем квадрате.
4. Теперь остаётся числа, находящиеся в отмеченных клетках, поменять с числами, находящимися в противолежащих клетках.

В результате всех проделанных перестановок получается магический квадрат из 64 клеток.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 64 | 2 | 3 | 61 | 60 | 6 | 7 | 57 |
| 56 | 55 | 11 | 12 | 13 | 14 | 50 | 59 |
| 17 | 47 | 46 | 20 | 21 | 43 | 42 | 24 |
| 25 | 26 | 38 | 37 | 36 | 35 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 30 | 29 | 28 | 27 | 39 | 40 |
| 41 | 23 | 22 | 44 | 45 | 19 | 18 | 48 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 15 | 51 | 52 | 53 | 54 | 10 | 9 |
| 8 | 58 | 59 | 5 | 4 | 62 | 63 | 1 |

## **Квадраты с нечетным числом клеток**

Способами составления магических квадратов с нечётным числом клеток занимались многие математики: в XVI в.А.Ризе и М.Штифель, в XVII в. А.Кирхер и Баше де Мезериак. Теорией Магических квадратов занимался французский математик Делаир. Для составления магических квадратов с нечетным числом клеток имеется очень простой общий способ. Для составления же магических квадратов с четным числом клеток все имеющиеся способы значительно сложнее.

Познакомимся со старинным приёмом составления нечётных магических квадратов, то есть квадратов из любого нечетного числа клеток: 9, 25, 49 и т.п. Приём этот предложен в XVII веке французским математиком Баше. Так как способ Баше пригоден, между прочим и для 9- клеточного квадрата, то удобнее всего начать описание способа именно  с наиболее простого примера. Итак, приступим к составлению 9-клеточного квадрата по способу Баше.

Начертив квадрат, который разделен на 9 клеток, пишем по порядку числа от 1 до 9, располагая их косыми рядами по три в ряд.

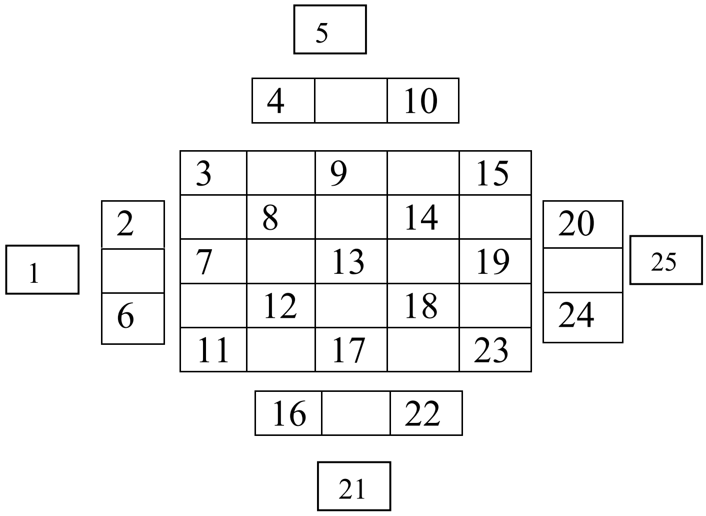
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 3 | | |
| | 2 | | 6 | |
| 1 | | 5 | | 9 |
| | 4 | | 8 | |
| | | 7 | | |

Числа, стоящие вне квадрата, вписываем внутрь его так, чтобы они примкнули к противолежащим сторонам квадрата (оставаясь в тех же столбцах или строках,  что и раньше).

В результате получаем квадрат:

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 7 | 6 |
| 9 | 5 | 1 |
| 4 | 3 | 8 |

Применим правило Баше к составлению квадрата из 25-ти клеток. Начинаем с расположения:




Остается  только числа, оказавшиеся за рамками квадрата, ввести внутрь его. Для этого нужно фигуры образованные числами, стоящими вне квадрата мысленно вдвинуть в квадрат так, чтобы эти фигуры примкнули противолежащим сторонам квадрата. Получится магический 25-клеточный квадрат.

Составив один магический квадрат из 25 клеток, вы путём поворотов и отражений можете получить его видоизменения.

## Индийский способ

Также были знакомы с магическими квадратами в древней Индии. В древнеиндийских книгах  квадраты упоминаются 2000 лет назад. Из Индии увлечение магическими квадратами перешло к арабам, которые усматривали в подобных сочетаний чисел нечто чудесное, мистическое и смотрели на них как на талисманы.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 14 | 15 | 4 |
| 12 | 7 | 6 | 9 |
| 8 | 11 | 10 | 5 |
| 13 | 2 | 3 | 16 |

Древнеиндийский магический квадрат.

Чтобы составить индийский магический квадрат существует весьма древних приём, придуманный в Индии еще до начала нашего летосчисления. Его можно изложить кратко в шести правилах.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 39 | 48 | 1 | 10 | 19 | 28 |
| 38 | 47 | 7 | 9 | 18 | 27 | 29 |
| 46 | 6 | 8 | 17 | 26 | 35 | 37 |
| 5 | 14 | 16 | 25 | 34 | 36 | 45 |
| 13 | 15 | 24 | 33 | 42 | 44 | 4 |
| 21 | 23 | 32 | 41 | 43 | 3 | 12 |
| 22 | 31 | 40 | 49 | 2 | 11 | 20 |

1. В середине верхней строке пишут 1, а в самом низу соседнего справа столбца —
2. Следующие числа пишут по порядку в диагональном направлении вправо вверх.
3. Дойдя до правого края квадрата, переходят к крайней левой клетке ближайшей вышележащей строки.
4. Дойдя до верхнего края квадрата, переходят к самой нижней клетке соседнего справа столбца.

Примечание. Дойдя до правой верхней угловой клетки, переходят к левой нижней.

5. Дойдя до уже занятой клетки, переходят к клетке, лежащей непосредственно под последней заполненной клеткой.
6. Если последняя заполненная клетка находится в нижнем ряду квадрата, переходя к самой верхней клетке в том же столбце.

Руководствуясь этими правилами, можно быстро составлять магические квадраты с любым нечётным числом клеток.

Если число клеток квадрата не делится на 3, можно начинать составление магического квадрата не по правилу, а по другому правилу.

Единицу можно написать в любой клетке диагонального ряда, идущего от средней клетки крайнего левого столбца к средней клетке самой верхней строки квадрата. Все последующие числа выписываются согласно правилам 2 — 5.

Это даёт возможность составить по индийскому способу не один, а несколько квадратов.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 32 | 41 | 43 | 3 | 12 | 21 | 23 |
| 40 | 49 | 2 | 11 | 20 | 22 | 31 |
| 48 | 1 | 10 | 19 | 28 | 30 | 39 |
| 7 | 9 | 18 | 27 | 29 | 38 | 47 |
| 8 | 17 | 26 | 35 | 37 | 46 | 6 |
| 16 | 25 | 34 | 36 | 45 | 5 | 14 |
| 24 | 33 | 42 | 44 | 4 | 13 | 15 |

## Применение магических квадратов

Традиционной сферой применения магических квадратов являются талисманы.

К примеру, талисман Луны обладает определенными свойствами: предохраняет от кораблекрушения и болезней, делает человека любезным, способствует предотвращению дурного намерения, а так же укрепляет здоровье. Его гравируют на серебре в день и час Луны, когда Солнце или Луна находится в первых десяти градусах Рака. Магический квадрат 9-ого порядка вписывается в девятиугольник (9 - число Луны, см. ниже) и окружается специальными символами.

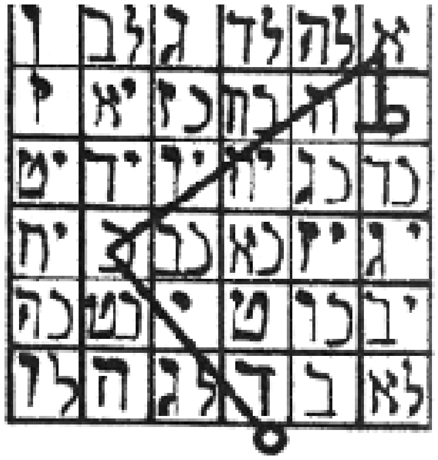

Однако существуют и магические квадраты для стихий и знаков Зодиака. Например:

Поскольку в древнееврейском языке числа записывались буквами, магические

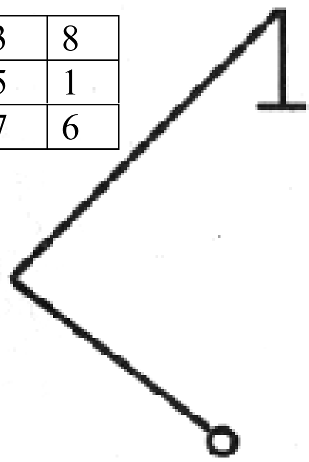
| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | Сфера Сатурна | 18 | Рак |
| 4 | Сфера Юпитера | 19 | Лев |
| 5 | Сфера Марса | 20 | Дева |
| 6 | Сфера Солнца | 21 | Юпитер |
| 7 | Сфера Венеры | 22 | Весы |
| 8 | Сфера Меркурия | 23 | Стихия Воды |
| 9 | Сфера Луны | 24 | Скорпион |
| 10 | Сфера Элементов | 25 | Стрелец |
| 11 | Стихия Воздуха | 26 | Козерог |
| 12 | Меркурий | 27 | Марс |
| 13 | Луна | 28 | Водолей |
| 14 | Венера | 29 | Рыбы |
| 15 | Овен | 30 | Солнце |
| 16 | Телец | 31 | Стихия Огня |
| 17 | Близнецы | 32 | Сатурн,Стихия Земли |

квадраты становились буквенными и использовались для получения сигилл духов.

Буквы имени духа соединялись, образуя специальный знак. В случае если буква имени имела большее значение, чем числа расположенные в квадрате, она заменялась на букву в 10 раз меньшую по гематрическому значению.



| | | |
|---|---|---|
| 4 | 3 | 8 |
| 9 | 5 | 1 |
| 2 | 7 | 6 |



**Наименьший магический квадрат**

Наименьший магический квадрат — 9-клеточный; легко убедиться испытанием, что магический квадрат из 4 клеток существовать не может. Вот образец 9-клеточного магического квадрата:

Если сложить в этом квадрате числа 4+3+8, или 2+7+6, или 3+5+7, или 4+5+6, или любой другой ряд из трёх чисел, то во всех случаях получается одна и та же сумма 15. Итог этот можно предвидеть не составляя еще самого квадрата: три строки квадрата — верхняя, средняя и нижняя — должны заключать все его 9 чисел, составляющие сумме

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$$

С другой стороны, сумма эта должна быть равна, очевидно, утроенному итогу одной строки. Отсюда для каждой строки имеем итог:

$$45: 3= 15.$$

Подобным же образом можно заранее определить сумму чисел строки или столбца любого магического квадрата, состоящего из какого угодно числа клеток. Для этого нужно сумму всех чисел квадрата разделить на число его строк.

**Судоку**

Эту игру, также известную как магический квадрат придумал в 1783году швейцарский математик Леонард Эйлер.

Игровое поле sudoku состоит из квадрата 9х9 клеток, разделенного на меньшие квадраты 3х3 клеток. У головоломки всего одно правило: игроку необходимо заполнить клетки цифрами от 1 до 9, таким образом, чтобы в каждой строке, в каждом столбце и каждом квадрате 3х3 каждая цифра встречалась только один раз. В некоторых ячейках уже в начале игры стоят числа, что может влиять на сложность раскладки. Ключ к решению головоломки – это логика и внимание.

В середине XX века такие головоломки стали популярны в США, где их называли Number place, а из Америки они попали в Японию, получив название sudoku (от «су»- число, цифра и «доку»- позиция, место).

Настоящую популярность sudoku обрела в 80х годах XX века, когда японские журналы начали публиковать эту головоломку на своих страницах. В 2005году английские газеты также стали печатать sudoku, и это стало началом ее триумфального шествия по всей Европе.

Виды sudoku:

- Sudoku - диагональ. В этих sudoku цифры не повторяются не только в строках, столбцах и блоках 3х3, но и в выделенных диагоналях.

Например:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 2 | 1 | 7 | 3 | 9 | 6 | 5 | 4 |
| 9 | 3 | 5 | 4 | 8 | 6 | 1 | 7 | 2 |
| 4 | 7 | 6 | 1 | 5 | 2 | 9 | 8 | 3 |
| 1 | 9 | 2 | 5 | 7 | 8 | 4 | 3 | 6 |
| 7 | 6 | 4 | 9 | 2 | 3 | 5 | 1 | 8 |
| 3 | 5 | 8 | 6 | 4 | 1 | 2 | 9 | 7 |
| 6 | 4 | 3 | 8 | 9 | 5 | 7 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 9 | 3 | 6 | 7 | 8 | 4 | 5 |
| 5 | 8 | 7 | 2 | 1 | 4 | 3 | 6 | 9 |

- Sudoku – фигуры. Эти Sudoku решаются почти также, как и классические, с той лишь разницей, что 9-клеточные блоки могут быть не только квадратными, но и любой другой формы.

Например:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 3 | 6 | 9 | 8 | 1 | 2 | 4 | 5 |
| 1 | 2 | 4 | 5 | 7 | 3 | 8 | 9 | 6 |
| 8 | 9 | 5 | 6 | 4 | 2 | 3 | 1 | 7 |
| 2 | 4 | 8 | 1 | 9 | 5 | 7 | 6 | 3 |
| 9 | 5 | 7 | 3 | 6 | 4 | 1 | 2 | 8 |
| 6 | 1 | 3 | 8 | 2 | 7 | 4 | 5 | 9 |
| 3 | 8 | 1 | 2 | 5 | 9 | 6 | 7 | 4 |
| 4 | 6 | 9 | 7 | 1 | 8 | 5 | 3 | 2 |
| 5 | 7 | 2 | 4 | 3 | 6 | 9 | 8 | 1 |

- Сум – Sudoku. В сум – Sudoku в углу областей, выделенных пунктиром, дана сумма цифр, которые в этой области нужно расставить. Как и в классических Sudoku в строках, в столбцах и блоках 3x3 не должно быть одинаковых цифр. Внутри пунктирного блока цифры также не повторяются.

Например:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 2 | 9 | 1 | 3 | 6 | 5 | 7 | 4 |
| 4 | 3 | 5 | 9 | 8 | 7 | 2 | 1 | 6 |
| 6 | 1 | 7 | 2 | 4 | 5 | 3 | 8 | 9 |
| 2 | 9 | 8 | 3 | 7 | 4 | 6 | 5 | 1 |
| 5 | 6 | 1 | 8 | 2 | 9 | 4 | 3 | 7 |
| 7 | 4 | 3 | 6 | 5 | 1 | 9 | 2 | 8 |
| 9 | 5 | 2 | 4 | 1 | 8 | 7 | 6 | 3 |
| 3 | 8 | 4 | 7 | 6 | 2 | 1 | 9 | 5 |
| 1 | 7 | 6 | 5 | 9 | 3 | 8 | 4 | 2 |

- Классические Sudoku. Обычные Sudoku 9x9.

Например:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 9 | 8 | 4 | 1 | 6 | 7 | 5 | 3 |
| 1 | 6 | 7 | 3 | 5 | 2 | 9 | 4 | 8 |
| 3 | 5 | 4 | 7 | 8 | 9 | 6 | 1 | 2 |
| 5 | 7 | 9 | 1 | 3 | 8 | 4 | 2 | 6 |
| 6 | 8 | 2 | 9 | 4 | 5 | 1 | 3 | 7 |
| 4 | 3 | 1 | 2 | 6 | 7 | 5 | 8 | 9 |
| 8 | 1 | 6 | 5 | 7 | 3 | 2 | 9 | 4 |
| 9 | 4 | 3 | 6 | 2 | 1 | 8 | 7 | 5 |
| 7 | 2 | 5 | 8 | 9 | 4 | 3 | 6 | 1 |

## Практическая часть

**1. Магический квадрат.**

Расставьте 6 цифр от 1 до 9 так, чтобы в квадрате сумма чисел в каждой строке, в каждом столбце, а также по диагоналям была равна.

Дано:

| | | |
|---|---|---|
| 4 | | 8 |
| | | |
| | | 6 |

Решение:

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 3 | 8 |
| 9 | 5 | 1 |
| 2 | 7 | 6 |

**2. Магические квадраты.**

Сложите числа по горизонтали и по вертикали. Сложите ответы по горизонтали и по вертикали. Полученные суммы должны совпадать. Например,

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 3 | 11 |
| 4 | 11 | 15 |
| 12 | 14 | 26 |

Дано:

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 6 | |
| 11 | 7 | |
| | | |

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 6 | |
| 12 | 5 | |
| | | |

Решение:

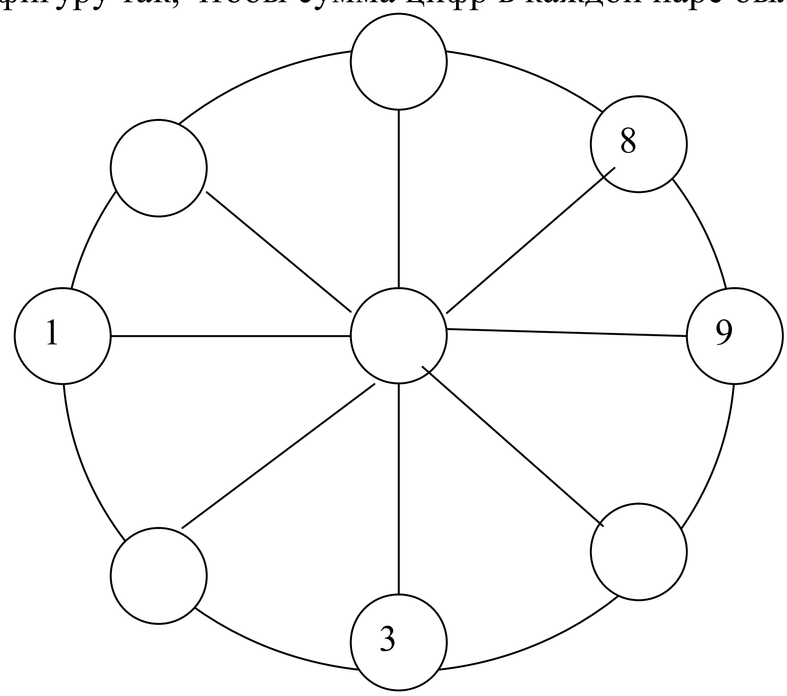
| | | |
|---|---|---|
| 8 | 6 | 14 |
| 11 | 7 | 18 |
| 19 | 13 | 32 |

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 6 | 11 |
| 12 | 5 | 17 |
| 17 | 11 | 28 |

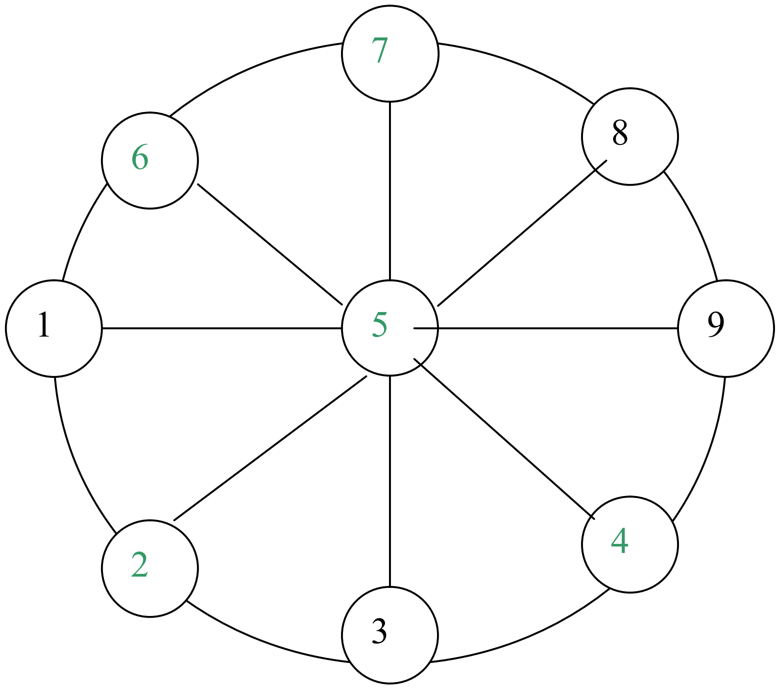
**3. Числовое колесо.**

Заполните фигуру так, чтобы сумма цифр в каждой паре была одинакова.

Дано:



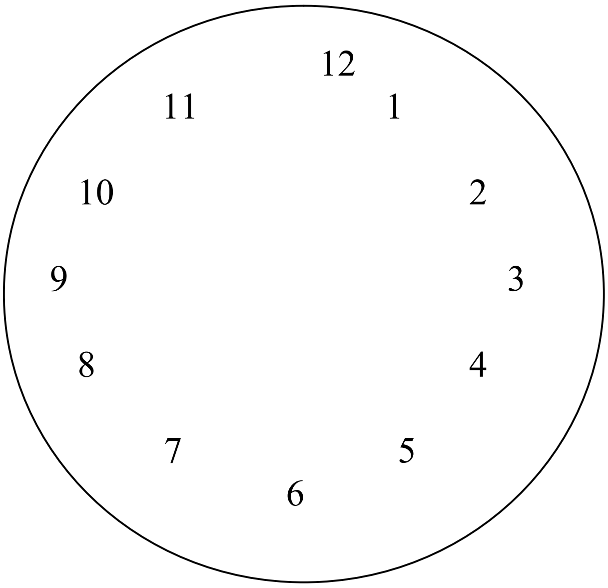
Решение:



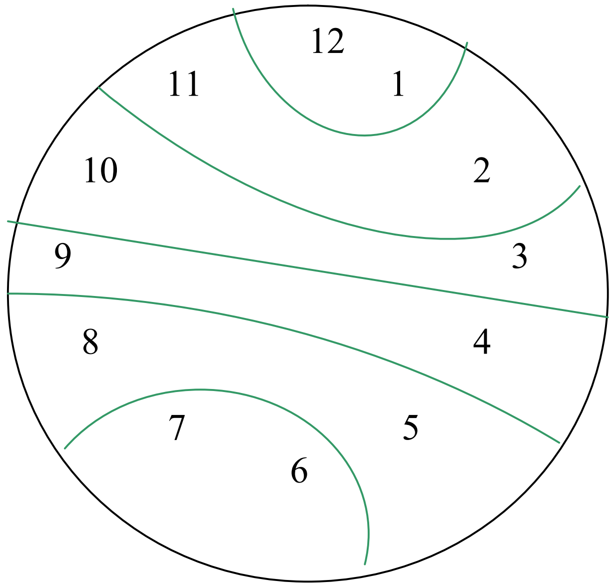

**4. Магический циферблат.**

Разделите циферблат так, чтобы в каждой части сумма цифр была одинакова.

Дано:



Решение:




**5. Квадрат 3 порядка.**

Впишите цифры, которые стоят вне квадрата, так чтобы сумма цифр в каждой строке, в каждом столбце, а также по диагоналям была равна.

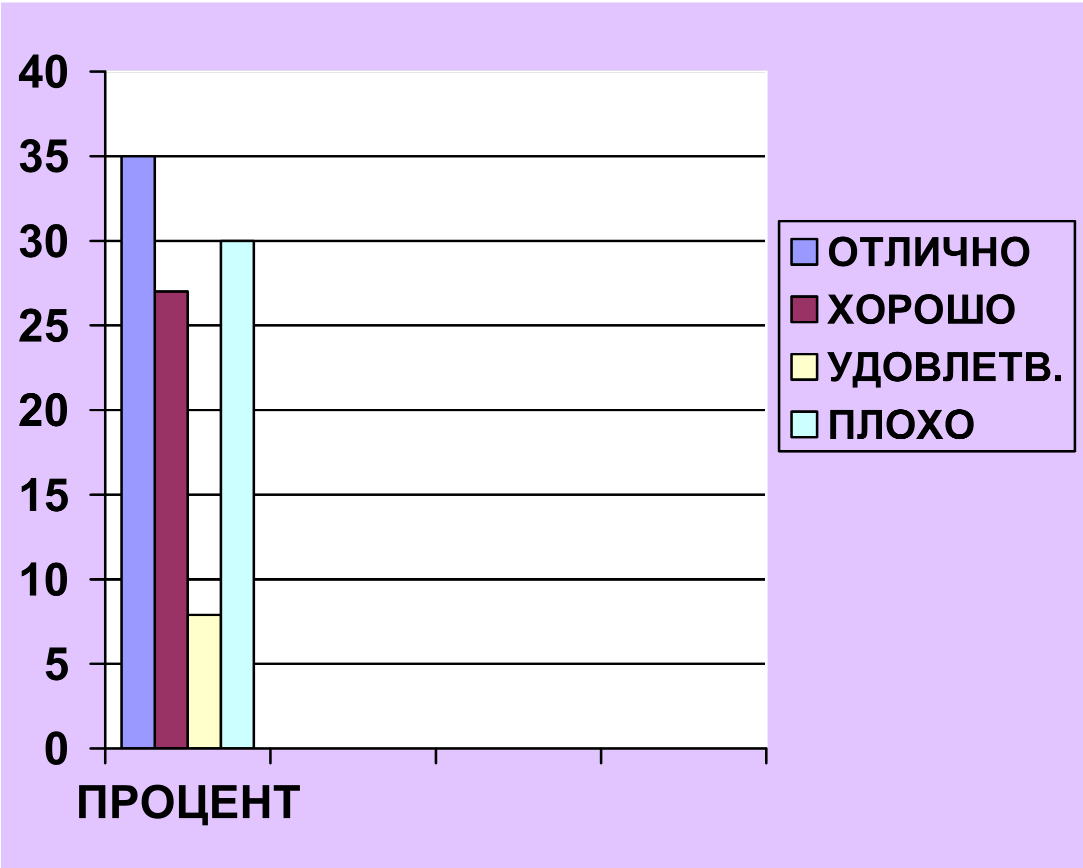
Дано:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 3 | | |
| | 2 | | 6 | |
| 1 | | 5 | | 9 |
| | 4 | | 8 | |
| | | 7 | | |

Решение:

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 7 | 6 |
| 9 | 5 | 1 |
| 4 | 3 | 8 |

Диаграмма по опросе анкеты




Таким образом:

35% учащающих из 26 учеников отлично выполнили 5 заданий на тему «Магические квадраты».

27% учащающих из 26 учеников хорошо выполнили 5 заданий на тему «Магические квадраты».

8% учащающих из 26 учеников удовлетворительно выполнили 5 заданий на тему «Магические квадраты».

30% учащающих из 26 учеников плохо выполнили 5 заданий на тему «Магические квадраты».

Из этого следует, что большинство из учеников мало знакомы с магическими квадратами и им было трудно выполнять предложенные мной задания.

## Заключение

Трудно понять классическую музыку без подготовки. Нелегко воспринимать абстрактную живопись, не имея представления о её законах. То же можно сказать о числовых узорах.

Удивительная, поистине, магическая красота, содержащаяся в магических квадратах, влечёт к себе лучшие умы человечества в течение тысячелетий. Понять её не всякому дано, но один раз осознав стройность и безжалостную строгость чисел, связанных узами магии, можно получить огромное удовольствие.

Я очень много узнала нового, но на самом деле это ничтожно малая частица такой просторной и бесконечной науки, как математика.

В результате написания реферата я сделала выводы:

- Магические квадраты – это нечто удивительное, интересное и увлекательное.
- Заполнять магические квадраты несложно, но необходимо знать некоторые правила.
- Судоку – это одна из интереснейших игр на свете.
- Главными чертами магических квадратов являются не только ясность, чёткость и логика, но и эстетичность, стройность и красота.
- Законы квадратов отражают законы красоты.

Написав реферат, я узнала много способов составления магических квадратов, историю их возникновения (что и побудило меня заняться исследовательской работой), а также много интересного из жизни математики и магических квадратов.

## Список литературы


1. Аллан Рей, Вилльямс Мартин «Математика на пять». Издательство «АСТ ПРЕСС». Москва, 1998г., стр. 36.
2. Гуревич Е.Я. «Тайна древнего талисмана». Издательство «НАУКА». Москва, 1969 г., стр. 365.
3. Доморяд А.П. «Математические развлечения и игры». Издательство «ФИЗМАТИЗМ». Москва, 1958г., стр. 207 – 208.
4. Игнатьев Е.И. « В царстве смекалки». Издательство «НАУКА». Москва, 1979г., стр. 183.
5. Кордемский Б.А. «Математические завлекалки». Издательство «ОНИКС АЛЬЯНС – В». Москва, 2000г., стр. 382 – 383.
6. Климченко Д.В. «Задачи по математике для любознательных». Издательство «ПРОСВЕЩЕНИЕ». Москва, 1992г., стр.20, 63, 75.
7. Лэнгдон Н., Снейп Ч. «С математикой в путь». Издательство «ПЕДАГОГИКА». Москва, 1987г., стр. 28 – 29.
8. Перельман Я.И. «Живая математика». Издательство «НАУКА». Москва, 1974., стр. 25, 57.
9. Перельман Я.И. «Занимательные задачи и опыты». Издательство «ДЕТСКАЯ ЛИТЕРАТУРА». Москва, 1972г., стр. 350 – 351, 357 – 360.
10. Перельман Я.И. «Математика для любознательных». Издательство «РИМИС». Москва, 2008г., стр. 99 – 107.
11. Перельман Я.И. «Математические задачи». Издательство «ВАП». Домодедово, 1994г., стр.352 – 364.
12. Постников М.М. «Магические квадраты». Издательство «НАУКА». Москва, 1969г., стр. 365.
13. Савин А.П «Математика от А до Я» - энциклопедический словарь для юношества. Издательский дом «современная педагогика», издательство «ПЕДАГОГИКА - ПРЕСС». Москва, 2001г., стр. 353 – 355.
14. Савин А.П. – автор - составитель «Я познаю мир». Издательство «АСТрель». Москва, 2002г., стр. 53 – 55.
15. Серпинский В. «Что мы знаем и чего не знаем о простых числах». Издательство «ФИЗМАТИЗМ». Москва, 1963г., стр. 27 – 28.
16. Тресиддер Д. «Словарь символов». Издательство «ФАИР ПРЕСС». Москва, 2001г., стр. 141.
17. Якушева «Справочник школьника». Издательство «СЛОВО». Москва, 1995г.
18. Журнал «Судоку». Москва, 2010г., стр. 36 – 40.