

Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ учащихся  
«Прикладные вопросы математики»

Математическое моделирование

## **Численное решение задач гидродинамики**

Конопацкий Александр Викторович

МОУ «Лицей №1» г. Перми, 11 кл.

Волегов Павел Сергеевич

к.ф.-м.н., доц. каф. ММСП

ПНИПУ

Пермь

2011

# Содержание

|   |    |
|---|----|
| Введение.....                                       | 2  |
| 1. Концептуальная постановка задачи.....            | 4  |
| 2. Математическая постановка задачи.....            | 4  |
| 3. Обезразмеривание.....                            | 5  |
| 4. Численный метод решения задач гидродинамики..... | 6  |
| 5. Результаты численных расчётов.....               | 7  |
| Выводы и заключение.....                            | 8  |
| Список литературы.....                              | 9  |
| Приложение.....                                     | 10 |

## Введение

**Волны-убийцы** – гигантские одиночные волны высотой 20-30 (а иногда и больше) метров, возникающие в океане и обладающие нехарактерным для морских волн поведением. Настоящие «волны-убийцы», представляющие опасность для судов и морских сооружений, имеют большие абсолютные высоты. Волна возникает от внезапных перемещений обширных участков дна океана в результате подводных землетрясений. В открытом океане или море, они представляют собой очень длинные ( $\lambda \approx 100$  км) и пологие ( $h \sim 1$  м) волны. Поскольку  $h/\lambda \approx 10^{-5}$ , то их невозможно зарегистрировать с судов, но можно фиксировать из космоса.

Математическая модель распространения волны содержит систему уравнений, граничные условия, а также начальные условия. С хорошей степенью точности можно считать жидкость покоящейся в начальный момент[3].

Скорость распространения длинной волны  $c = \sqrt{gh}$ . Оценим ее порядок: поскольку глубина Тихого океана в районе Чили около 4 км, то

$$c \approx \sqrt{10 \cdot 4000} = 200 \text{ м/с} = 720 \text{ км/ч}.$$

Над неровным дном на меньших глубинах и над подводными возвышениями скорость распространения волны уменьшается. По словам очевидцев высота цунами вблизи берегов может достигать 30 – 40 м.

Хотя скорость волны огромна, в открытом океане она не опасна из-за ее пологости и очень большой длины. При подходе к берегу глубина бассейна уменьшается, и на мелководье происходит деформация волн, которая сопровождается концентрацией энергии. В 1957г. М.А. Лаврентьев высказал гипотезу, согласно которой неровности дна типа подводных гребней могут играть роль волновода. Впоследствии эта гипотеза получила экспериментальное подтверждение и при определенных ограничениях была доказана теоретически.

**Цель работы:** описание изменения уровня свободной поверхности вязкой жидкости, при изменении рельефа дна. С помощью созданной модели можно будет узнать распространение волны в зависимости от изменения дна.

**Задачи.** В данной работе поставлена задача создания линейную модель волны, на которой с помощью графика можно будет наблюдать изменения уровня свободной поверхности вязкой жидкости при изменении рельефа дна. Опираясь на реальные условия, необходимо составить математическую модель, которую впоследствии нужно исследовать.

**Актуальность.** Данную модель можно будет использовать для моделирования цунами, так как волны, проникая на берег, обладает громадной разрушительной силой. Они могут привести к большим человеческим жертвам и огромным разрушениям.

## **1. Концептуальная постановки задачи**

Рассматриваемая система представляет собой плоскую область, в данной области находится вязкая жидкость, скорость которой равна нулю и поверхность этой жидкости находится в равновесии в начальный момент времени.

### **1.1. Основные гипотезы**

1. Рассматриваем плоскую область вязкой жидкости.
2. Уровень свободной поверхности зависит от изменения рельефа дна.
3. Атмосферное давление  $10^5 \text{ Па}$  постоянно.
4. Ветром пренебрегаем.
5. Ускорение свободного падения  $9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
6. В начальный момент море находится в состояния равновесия (нулевой уровень), а также спокойно (скорость равна нулю).

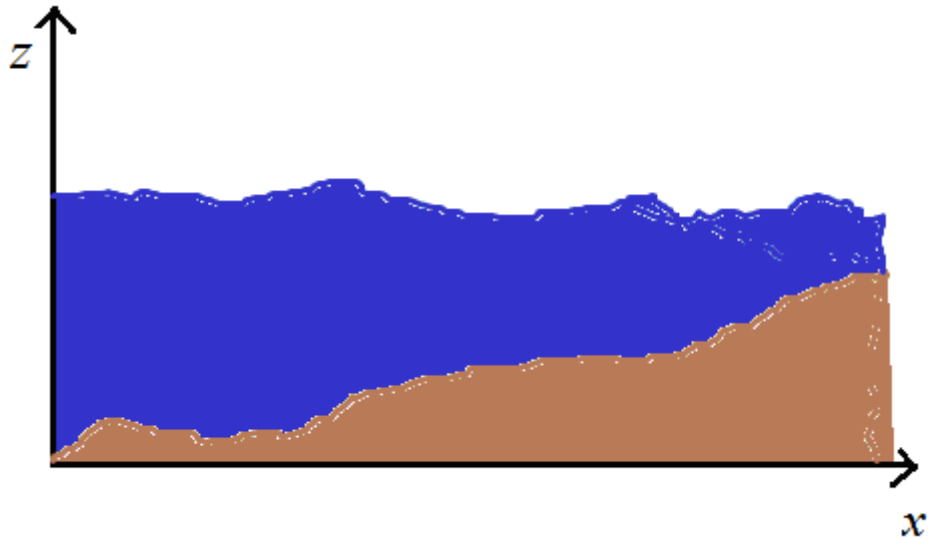


Рис. 1. Схема моделирующей области

## 2. Математическая постановка задачи

### 2.1 Исходные уравнения

Исходная дифференциальная модель будет состоять из двух дифференциальных уравнений второго порядка[2]. Где  $\zeta$  – является величиной отклонения уровня воды от нулевого положения,  $U$  – является величиной отклонения поверхности дна от нулевого положения,  $f$  – величина начального толчка (фактически  $f$  является силой землетрясения),  $x$  – координата положения,  $t$  – время. Первое уравнение по сути есть уравнение колебаний при изменяющихся границах (в качестве которых выступает рельеф дна), второе – уравнение упругих колебаний дна при воздействии на него точечной нагрузки:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \zeta}{dt^2} - \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( c^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \right) = \frac{\partial^2 U}{dt^2} \\ \rho \frac{\partial^2 U}{dt^2} - \rho c_0^2 \frac{\partial^2 U}{dx^2} = \rho f \end{cases} \quad (1)$$

## 2.2. Начальные и краевые условия

Из условия, что в начальный момент море находится в состоянии равновесия (нулевой уровень), а также спокойно (скорость равна нулю) определим начальные и граничные условия.

Начальные условия примут вид:

$$U|_{t=t_0} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial t}|_{t=t_0} = 0$$

$$\zeta|_{t=t_0} = 0 \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial t}|_{t=t_0} = 0$$

Граничные условия:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0; \qquad x = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \qquad x = l$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0; \qquad x = 0 \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \qquad x = l$$

## 3. Обезразмеривание

Теперь нам потребуется перейти к безразмерным величинам.

Для исследования возьмём отрезок со стороны 3000м.

$$U = \frac{\bar{U}}{k}, \qquad \zeta = \frac{\bar{\zeta}}{k}, \text{ где } k = 1\text{м}$$

$$t = \frac{\bar{t}}{t_*}, \text{ где } t_* = 1\text{мин} = 60\text{с}$$

$$x = \frac{\bar{x}}{l}, \text{ где } l = 3\text{км} = 3000\text{м}$$

Запишем дифференциальное уравнение в безразмерной форме:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial \bar{t}^2} - \left( \frac{\partial}{l \cdot \partial x} \left( \frac{t_*^2}{l} \cdot c^2 \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} \right) \right) = \frac{\partial^2 \bar{U}}{l \cdot \partial \bar{t}^2} \\ \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{t}^2} - c_0^2 \frac{T^2 \Delta \bar{U}}{l} = f \cdot \frac{t_*^2}{U_*} \end{cases} \quad (2)$$

Для упрощения системы введем обозначения:

$$\alpha = \frac{T^2 c^2}{\ell^2} \quad a = \frac{T^2 c_0^2}{\ell} \quad \beta = \frac{1}{\ell}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = g \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \beta \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \end{cases} \quad (3)$$

## 4. Численные методы решения задач гидродинамики

### 4.1. Разностная задача

Для построения разностного аналога системы дифференциальных уравнений применим следующие разностные аналоги производных по координатам и по времени[1] :

$$\frac{\partial U}{\partial t} \approx \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \approx \frac{U_i^{n+1} - 2U_i^n + U_i^{n-1}}{\tau^2}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \approx \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2}, \quad (6)$$

Для  $\zeta$  проделаем аналогичные операции и построим разностную схему[1]:

$$\begin{cases} \frac{U_i^{n+1} - 2U_i^n + U_i^{n-1}}{\tau^2} - \frac{a}{h^2} (U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n) = g \\ \frac{\zeta_i^{n+1} - 2\zeta_i^n + \zeta_i^{n-1}}{\tau^2} - \frac{\alpha}{h^2} (\zeta_{i+1}^n - 2\zeta_i^n + \zeta_{i-1}^n) = \beta \frac{U_i^{n+1} - 2U_i^n + U_i^{n-1}}{\tau^2} \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{где } g = \begin{cases} f, & x = 0,5 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad t = 0$$

Рассматриваемые разностные выражения (4), (5) и (6) (по  $x$  и  $t$ ) аппроксимируют производные  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$  и  $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$  со вторым порядком относительно  $h_x$ ,  $h_y$  и  $\tau$  соответственно[1].

## 5. Результаты численных расчетов

В начальный момент, когда скорость и море находятся в равновесии, графики искомых функций  $U$  (черный график) и  $\zeta$  (красный график) имеют вид:

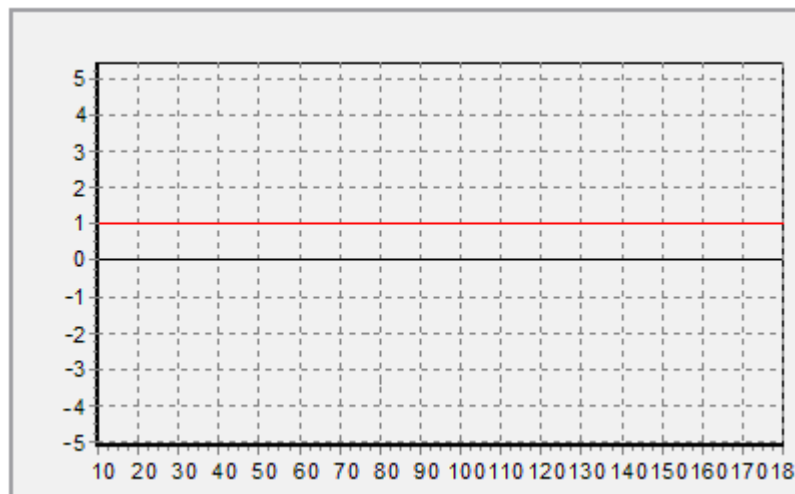


Рис.2. Графики зависимостей уровня дна и уровня жидкости от координаты

При исследовании математической модели при различных параметрах были получены следующие результаты:

- 1) при параметрах  $\alpha = 0,05$ ,  $\beta = 0,2$ ,  $a = 0,07$ ,  $f = 10$



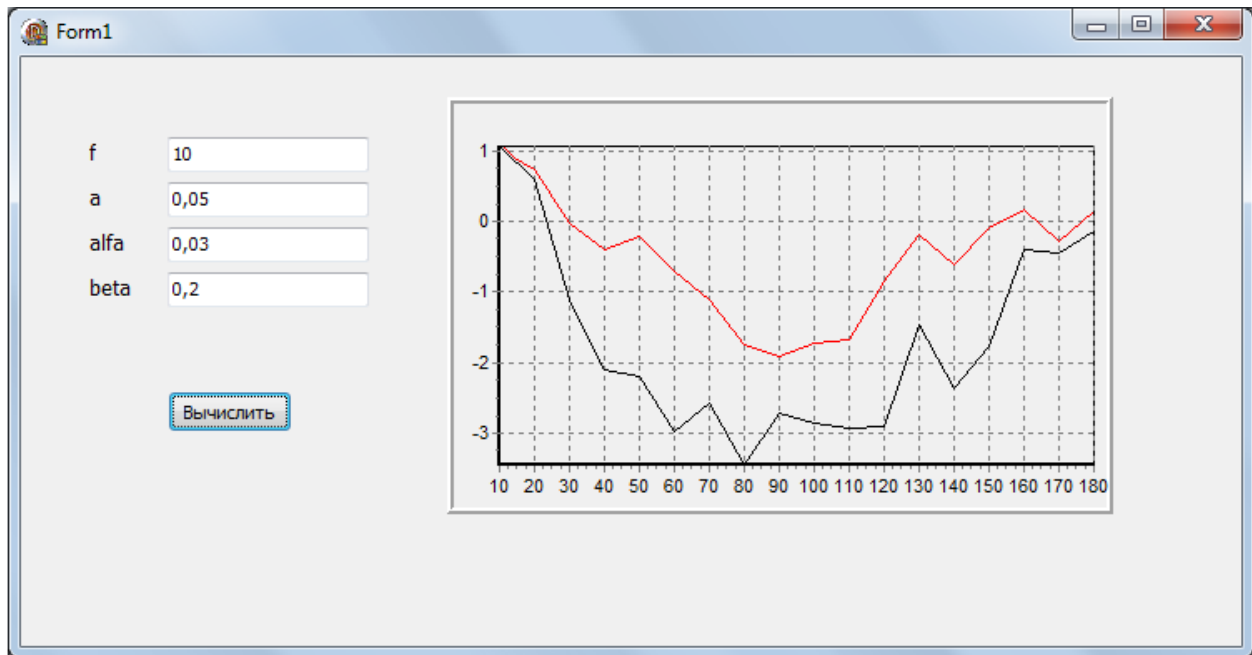


Рис.3. Графики зависимостей уровня дна и уровня жидкости от координаты

На графике видно что дно (чёрным) и поверхность жидкости(красным) после воздействия силой  $f$  отклонились от нулевого уровня. Видно что после 100 секунд дно отклонилось от положения равновесия(0) на максимальное положение -3.4 , а поверхность отклонилась от положения равновесия(1) на -2.9 , видно что формирование волны при таких параметрах происходит на отрезке от 40-50, 90-130, 140-160 и 170-180.

## Выводы

В данной работе мы изучили линейную модель изменения уровня свободной поверхности вязкой жидкости при изменении рельефа дна. Опираясь на реальные условия, мы составили математическую модель, которую впоследствии исследовали с помощью разностных схем. Мы исследовали сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи и выяснили, что разностная задача устойчива, и она аппроксимирует дифференциальную задачу.

Также с помощью программы Borland Delphi 7 мы реализовали разностную схему, провели тестовые расчёты при самостоятельно

выбранных значениях параметров и построили графики возмущений на поверхности и на дне в системе координат  $x$  в различные моменты времени.

В итоге мы пришли к выводу, что полученные с помощью наших вычислений значения, действительно сходятся с реальными условиями, т.е. данную математическую модель можно использовать.

### **Список литературы**

1. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы (введение в теорию), учебное пособие, Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1977.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – 7-е изд. – М.: Изд-во МГУ: Наука, 2004. – 798с.
3. Дулов В.Г. Математическое моделирование в глобальных проблемах естествознания. – Новосибирск, 2005. – 248с.