

Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ учащихся
«Прикладные вопросы математики»

Математическое моделирование

**Математическое моделирование
элементов фигурного катания: твизл**

Корнилов Станислав Дмитриевич,
МОУ «Лицей №1» г. Перми, 11 кл.
Шабрыкина Наталья Сергеевна,
к. ф.-м. н., доцент ПНИПУ

Введение

Фигурное катание – один из самых популярных и красивых зимних видов спорта, входящих в программу Олимпийских Игр. Фигурное катание популярно, т.к. отличается высокой эмоциональностью и выразительностью движений. Ну и конечно это один из общедоступных видов спорта, поэтому часто им начинают заниматься еще в дошкольном возрасте.

В современном фигурном катании сочетается большое количество разнообразных элементов, для выполнения которых требуется хорошая подготовка. Начальный период обучения этому виду спорта представляет собой нелегкий процесс. Современное направление развития фигурного катания на коньках характеризуется ярко выраженной тенденцией к гармонии основных компонентов катания, сбалансированности содержания программы. Перед спортсменами ставится задача продемонстрировать владение всеми группами элементов — шагами, спиралями, вращениями, прыжками. В преодолении этих трудностей может существенно помочь математическая модель, позволяющая подбирать различные параметры для более успешного выполнения элементов фигурного катания с учетом индивидуальных параметров фигуристов и без лишних физических затрат.

В работе будет рассматриваться один из основных элементов фигурного катания — твизл. Твизл - это вращение фигуриста вокруг своей оси и одновременное перемещение по дуге. Этот элемент состоит из двух довольно простых элементов: движение по дуге и вращение вокруг собственной оси, но совместить их и получить полноценный твизл получается не у многих. Созданию математической модели твизла и посвящена данная работа. Такая модель может помочь начинающим фигуристам скорее освоится в мире фигурного катания и понять, какие факторы влияют на данные элементы.

Концептуальная постановка задачи

Движение по дуге – основной элемент фигурного катания, с него начинается обучение фигурному катанию. Данный элемент позволяет фигуристу развить скорость, необходимую для выполнения других, более сложных элементов, а также является связующим звеном между этими элементами. При движении по дуге фигурист стоит на одной ноге, а лезвие конька соприкасается со льдом одним ребром. Фигурист движется не вертикально, а под некоторым углом к горизонту, из-за чего траектория его движения криволинейная, а не прямая. Кривизну траектории можно охарактеризовать физическим параметром - радиусом кривизны. При построении модели движения по дуге были приняты следующие допущения:

- Фигурист рассматривается как движущаяся материальная точка.
- Угол наклона конька к вертикали изменяется по линейному закону.

Вращение вокруг вертикальной оси – элемент фигурного катания, в котором фигурист, стоя на опорной ноге, вращается вокруг воображаемой оси. Свободная нога может быть отведена в сторону или поднята вверх. В процессе вращения фигурист может менять позы вращения, координируя свои действия с помощью свободной ноги и рук. Заход во вращение обычно представляет собой движение по дуге длиной в половину окружности. Весь процесс вращения может быть разбит на два этапа: группировка (промежуток времени, за который фигурист изменяет свой момент инерции, прижимая руки к телу) и вращение (промежуток времени, за который фигурист вращается вокруг собственной оси, обладая постоянным моментом инерции).

При построении модели вращения вокруг вертикальной оси были приняты следующие допущения:

- Фигурист рассматривается как тело произвольной формы, обладающее некоторым моментом инерции.
- Ось вращения вертикальна и проходит через центр масс фигуриста.
- Момент инерции изменяется по линейному закону.

При построении модели твизла были приняты следующие допущения:

- Фигурист рассматривается как тело произвольной формы, обладающее некоторым моментом инерции.
- Скорость движение центра масс складывается из двух компонент: скорости поступательного движения по той же дуге, по которой центр масс двигался до захода в твизл, и вращения вокруг оси, проходящей через центр масс.
- Угол наклона конька к вертикали изменяется по линейному закону.
- Момент инерции изменяется по линейному закону.

При построении всех элементов модели приняты следующие гипотезы:

- Коэффициент силы трения коньков фигуриста об лед остается постоянным, т.к. скорость фигуриста не большая.
- Сила сопротивления воздуха на фигуриста не учитывается, т.к. пренебрежимо мала при скоростях, развиваемых фигуристом.
- Фигурист движется в поле тяжести земли.

Математическая постановка задачи

Движение по дуге

Будет рассмотрена материальная точка, поступательно движущуюся по траектории с некоторым неизвестным радиусом кривизны $\rho(t)$.

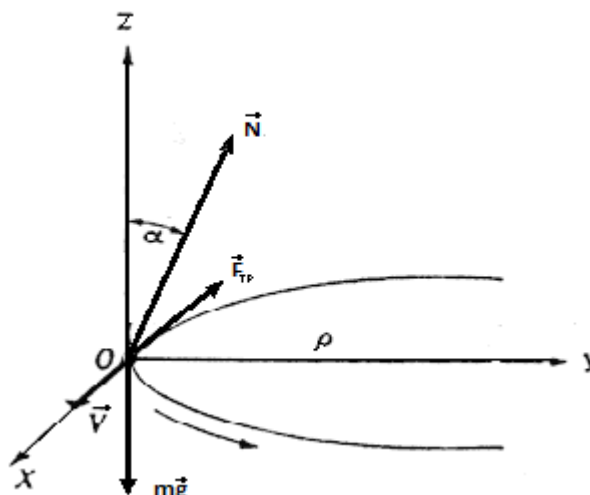


Рис. 1. Силы, действующие на фигуриста в процессе движения по дуге

С учетом принятых допущений можно записать второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} + m\vec{g} \quad (1)$$

где m – масса фигуриста, \vec{a} – вектор полного ускорения, $\vec{F}_{\text{тр}}$ – вектор силы трения, возникающей между льдом и коньком фигуриста, \vec{N} – вектор силы реакции опоры, \vec{g} – вектор ускорения свободного падения.

Вводится обозначение $\alpha(t)$ – переменный угол между вертикалью и вектором силы реакции опоры. Затем, зная, что $F_{\text{тр}} = \mu N$ где μ – коэффициент трения и то, что ускорение \vec{a} может быть разложено на нормальную a_n и тангенциальную a_τ составляющие, в некоторый момент времени спроектируем второй закон Ньютона на три естественные оси:

$$\begin{aligned} ma_\tau &= -\mu N \\ ma_n &= N \sin(\alpha(t)) \\ 0 &= N \cos(\alpha(t)) - mg \end{aligned} \quad (2)$$

Для решения системы уравнений (2) необходимо начальное условие для линейной скорости:

$$V(0) = V_0 \quad (3)$$

Угол $\alpha(t)$ переменный, поэтому будет рассматриваться линейная зависимость, выраженная уравнением:

$$\alpha(t) = \frac{\alpha_d - \alpha_0}{t_d} t + \alpha_0 \quad (4)$$

где α_0 – начальный угол, α_d – конечный угол, под которым фигурист завершает выполнение движения по дуге, а t_d - момент времени, когда фигурист заканчивает по дуге.

Вращение вокруг вертикальной оси

Фигурист рассматривается как тело, обладающее переменным моментом инерции.

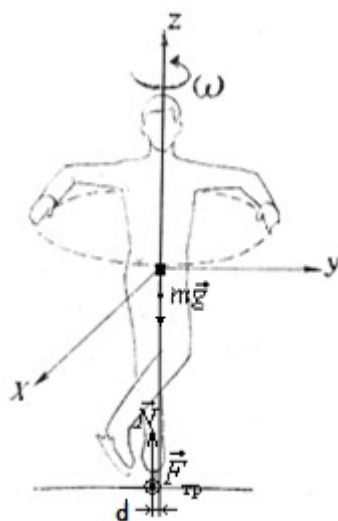


Рис. 2. Силы, действующие на фигуриста в процессе вращения вокруг вертикальной оси [3]

Для моделирования вращения будет использоваться дифференциальное уравнение вращательного движения:

$$\frac{d(J(t)\omega(t))}{dt} = \sum M_F \quad (5)$$

где $\omega(t)$ – зависимость угловой скорости фигуриста от времени, а $\sum M_F$ - сумма моментов всех внешних сил, действующих на фигуриста.

Т.к. единственная сила, имеющая плечо - это сила трения, уравнение принимает вид:

$$\frac{d(J(t)\omega(t))}{dt} = -\mu mgd \quad (6)$$

где d – расстояние от оси вращения до лезвия конька фигуриста (плечо силы трения между лезвием конька и льдом).

Во время выполнения группировки момент инерции фигуриста – это переменная функция, поэтому составлена линейная зависимость, по которой происходит её изменение:

$$J(t) = \frac{J_k - J_0}{t_k - t_0} (t - t_0) + J_0 \quad (7)$$

где J_k – момент инерции в группировке, а J_0 - момент инерции в полностью разгруппированном состоянии. После окончания группировки момент инерции не меняется.

Во время выполнения группировки выражение (7) принимает вид:

$$J(t) = \frac{J_k - J_0}{t_{гр} - t_d} (t - t_d) + J_0 \quad (8)$$

где $t_{гр}$ - момент времени, когда фигурист заканчивает делать группировку.

Для процесса группировки дифференциальное уравнение вращательного движения (6) преобразуется дифференциальное уравнение для угловой скорости в группировке:

$$\frac{d(J(t)\omega_{гр}(t))}{dt} = -\mu mgd \quad (9)$$

где $\omega_{гр}(t)$ - зависимость угловой скорости от времени в процессе группировки.

Во время выполнения самого вращения момент инерции остается постоянным, равным конечному моменту инерции группировки. Поэтому дифференциальное уравнение вращательного движения (6) для вращения в состоянии полной группировки принимает следующий вид:

$$J_x \frac{d(\omega_{\text{вр}}(t))}{dt} = -\mu mgd \quad (10)$$

где $\omega_{\text{вр}}(t)$ – зависимость угловой скорости от времени в процессе полноценного вращения.

Для решения дифференциального уравнения (9) необходимо условие начальной угловой скорости:

$$\omega_0 = \frac{\rho(t_d)}{V(t_d)} \quad (11)$$

Твизл

В процессе выполнения твизла фигурист рассматривается как тело произвольной формы, поэтому сила тяжести будет приложена к центру масс фигуриста.

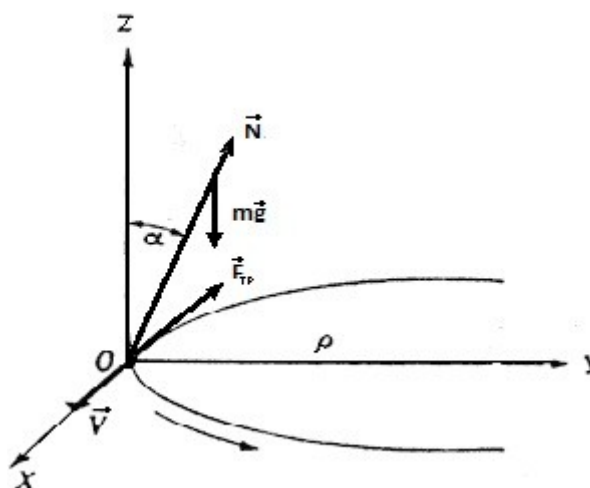


Рис. 2. Силы, действующие на фигуриста в процессе выполнения твизла

Твизл состоит из двух элементов, рассмотренных выше, поэтому для его моделирования необходимо совместить две полученных ранее модели. Заход на твизл рассматривается как движение по дуге, а затем фигурист входит во вращение. В первом этапе твизла – группировке, который длится очень недолго, фигурист изменяет свой момент инерции, прижимая руки к телу. На этом же этапе фигурист изменяет угол наклона, под которым он зашел в твизл (α_d – конечный угол при движении по дуге), до некоторого угла

$\alpha_{\text{вр}}$ – угол, под которым фигурист заканчивает группировку и входит в полноценное вращение. Для этого введена линейная зависимость угла $\alpha(t)$:

$$\alpha(t) = \frac{\alpha_{\text{вр}} - \alpha_{\text{д}}}{t_{\text{гр}} - t_{\text{д}}} (t - t_{\text{д}}) + \alpha_{\text{д}} \quad (12)$$

Принимая во внимание зависимость (12) дифференциальное уравнение вращательного движения (6) преобразовано для твизла:

$$\frac{d(J(t)\omega(t))}{dt} = -\frac{\mu mgd}{\cos(\alpha(t))} \quad (13)$$

На первом этапе твизла – группировке выражение (13) принимает вид:

$$\frac{d(J(t)\omega_{\text{гр}}(t))}{dt} = -\frac{\mu mgd}{\cos(\alpha(t))} \quad (14)$$

На втором этапе твизла – непосредственно вращении выражение (13) принимает вид:

$$J_{\text{к}} \frac{d(\omega_{\text{вр}}(t))}{dt} = -\frac{\mu mgd}{\cos(\alpha(t))} \quad (15)$$

Конечная угловая скорость в группировке является начальной для этапа непосредственно вращения.

Из зависимости $\omega(t)$, оси может быть посчитана $V_{\text{вращ}}$ - линейная скорость лезвия конька, по формуле:

$$V_{\text{вращ}} = \omega(t)d \quad (16)$$

Линейная скорость твизла раскладывается на сумму скоростей движения центра масс и вращения конька:

$$\vec{V}_{\text{твизл}} = \vec{V}_{\text{вращ}} + \vec{V}_{\text{ц.м.}} \quad (17)$$

В свою очередь вектор полной скорости твизла раскладывается на тангенциальную и нормальную составляющие:

$$V_{\text{т твизл}} = V_{\text{ц.м.}} + V_{\text{вращ}} \sin(\varphi(t)) \quad (18)$$

$$V_{\text{н твизл}} = V_{\text{вращ}} \cos(\varphi(t))$$

где $\varphi(t)$ - угол между линейной скоростью центра масс фигуриста и плечом силы трения d

Модуль полной скорости твизла считается по теореме Пифагора:

$$V_{\text{ТВИЗЛ}} = \sqrt{V_{\tau \text{ ТВИЗЛ}}^2 + V_{\eta \text{ ТВИЗЛ}}^2} \quad (19)$$

Решение

Движение по дуге

Нормальная и тангенциальная составляющие ускорения находятся по формулам:

$$a_{\tau} = \frac{dV(t)}{dt} \quad (20)$$

$$a_n = \frac{V^2(t)}{\rho(t)} \quad (21)$$

где $V(t)$ – зависимость линейной скорости фигуриста от времени.

Подставив формулу (20) в систему уравнений (2) и преобразовав полученное выражение можно выразить дифференциальное уравнение для скорости:

$$\frac{d(V(t))}{dt} = -\frac{\mu g}{\cos(\alpha(t))} \quad (22)$$

При аналитическом решении уравнения (22), используя начальное условие (3), получается зависимость линейной скорости центра масс фигуриста от времени:

$$V(t) = V_0 - \frac{\mu g}{\cos(\alpha(t))} \quad (23)$$

Затем, подставляя зависимость (17) в уравнение (15), выражается зависимость радиуса кривизны:

$$\rho(t) = \frac{V^2(t)}{g \operatorname{tg}(\alpha(t))} \quad (24)$$

Для построения траектории движения фигуриста будут использоваться формулы:

$$x(t) = \rho(t) \operatorname{cost} \quad (25)$$

$$y(t) = \rho(t) \operatorname{sint}$$

Вращение вокруг вертикальной оси

Для нахождения $\omega_{\text{гр}}(t)$ аналитически решается уравнение (9), при этом используется условие начальной угловой скорости (11).

Зависимость угловой скорости в процессе группировки от времени выглядит следующим образом:

$$\omega_{гр}(t) = \omega_0 + \frac{\mu mgd}{J(t)} \quad (26)$$

$\omega_{вр}(t)$ является решением уравнения (10). При этом считается, что начальная угловая скорость для вращения равна конечной угловой скорости группировки:

$$\omega_{вр}(t) = \omega_{гр}(t_{гр}) - \frac{\mu mgd}{J_x} \quad (27)$$

В целом зависимость угловой скорости от времени $\omega(t)$ является кусочной функцией: во время группировки угловая скорость рассчитывается по формуле (26), а во время движения с постоянным моментом инерции по формуле(27):

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega_0 - \frac{\mu mgd}{J(t)}, t_d < t \leq t_{гр} \\ \omega_{гр}(t_{гр}) - \frac{\mu mgd}{J_x}, t_{гр} < t \leq t_{вр} \end{cases} \quad (28)$$

Зная, что скорость является первой производной от угла можно составить дифференциальное уравнение для угла:

$$\omega(t) = \frac{d(\varphi(t))}{dt} \quad (29)$$

Решением данного уравнения является зависимость $\varphi(t)$.

Полный оборот – это прохождение угла в 2π , поэтому количество полных оборотов можно найти по формуле:

$$n = \frac{\int_{t_0}^{t_k} \varphi(t)}{2\pi} \quad (30)$$

Твизл

Твизл является совокупностью двух элементов, разобранных выше, поэтому можно воспользоваться их решениями, чтобы составить решение для модели твизла.

При построении модели твизла линейная скорость $V(t)$ будет являться кусочной функцией: при движении по дуге это будет $V_{ц.м.}$, а при движении в самом твизле $V_{твизл}$:

$$V(t) = \begin{cases} V_0 - \frac{\mu g}{\cos(\alpha(t))}, & 0 < t \leq t_d \\ \sqrt{V_{твизл}^2 + V_{п твизл}^2}, & t_d < t < t_{гр} \end{cases} \quad (31)$$

$V_{ц.м.}$ рассчитывается из уравнения (17), а $V_{твизл}$ рассчитывается из уравнения (13).

Для твизла зависимость $\omega_{гр}(t)$ является аналитическим решением уравнения (14) и выглядит следующим образом:

$$\omega_{гр}(t) = \omega_0 - \frac{\mu mgd}{J(t) \cos(\alpha(t))} \quad (32)$$

Зависимость $\omega_{вр}(t)$ является аналитическим решением уравнения (15) и принимает вид:

$$\omega_{вр}(t) = \omega_{гр}(t_{гр}) - \frac{\mu mgd}{J_k \cos(\alpha(t))} \quad (33)$$

Угловая скорость $\omega(t)$ в твизле является кусочной функцией: во время группировки она может быть подсчитана по формуле (32), а в во время вращения по формуле (33):

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega_0 - \frac{\mu mgd}{J(t) \cos(\alpha(t))}, & t_d < t \leq t_{гр} \\ \omega_{гр}(t_{гр}) - \frac{\mu mgd}{J_k \cos(\alpha(t))}, & t_{гр} < t \leq t_{вр} \end{cases} \quad (34)$$

Траектория движения центра масс фигуриста является кусочной функцией:

$$x(t) = \begin{cases} \rho(t) \cos t, & 0 < t \leq t_d \\ \rho(t) \cos t + d \cos(\varphi(t)), & t_d < t < t_{гр} \end{cases} \quad (35)$$

$$y(t) = \begin{cases} \rho(t) \sin t, & 0 < t \leq t_d \\ \rho(t) \sin t + d \sin(\varphi(t)), & t_d < t < t_{гр} \end{cases}$$

Результаты и анализ

Рассмотрим результаты решения, полученные с помощью использования построенной модели, листинг программы которой приведен в приложении.

Все результаты приведены для параметров: $m = 55 \text{ кг}$, $\mu = 0.02$,
 $d = 0.07 \text{ м}$, $g = 9.8 \text{ м/с}^2$.

Описанные выше дифференциальные уравнения решались аналитически с помощью математического пакета Maple 11.

Рассмотрим результаты, полученные для процесса движения по дуге. Рассмотрим зависимость радиуса кривизны от времени при различных начальных значениях скорости и угла. На рис. 5 представлены графики траектории движения центра масс фигуриста при начальной скорости $V_0 = 2 \text{ м/с}$. На левом графике угол наклона к вертикали изменяется от $\alpha_0 = 5^\circ$ градусов до $\alpha_d = 15^\circ$, а на правом до $\alpha_d = 30^\circ$.

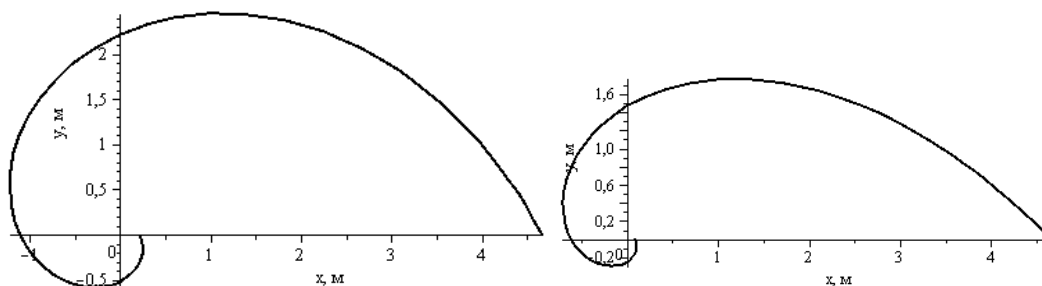


Рис. 5. Траектория движения центра масс фигуриста для разных переменных углов

По данным графикам видно, что чем быстрее изменяется угол наклона ребра конька к вертикали, тем быстрее уменьшается радиус кривизны траектории.

На рис. 6 представлены графики траектории движения центра масс фигуриста для постоянного угла $\alpha = 10^\circ$. Значение начальной скорости для левого графика – $V_0 = 2 \text{ м/с}$, для правого - $V_0 = 3 \text{ м/с}$.

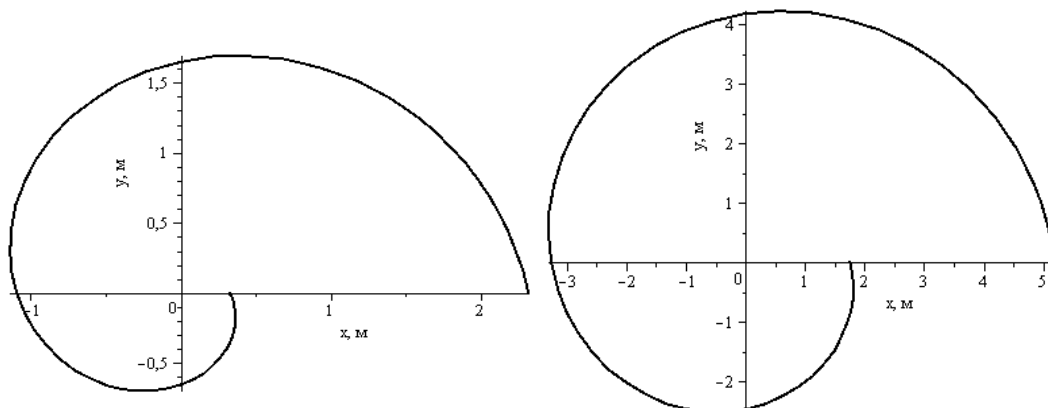


Рис. 6. Траектория движения центра масс фигуриста при различных начальных скоростях

По данным графикам видно, что радиус кривизны дуги прямо пропорционален начальной скорости. Чем больше начальная скорость тем медленнее уменьшается радиус кривизны траектории.

Рассмотрим результаты, полученные для процесса вращения вокруг вертикальной оси.

Теперь рассмотрим результаты решения для модели твизла. Для средних значений $V_0 = 2 \text{ м/с}$, $J_k = 1.579 \text{ м} \cdot \text{с}^2$, $J_0 = 2.067 \text{ м} \cdot \text{с}^2$, $\alpha_0 = 10^\circ$, $\alpha_d = 30^\circ$, $\alpha_{вр} = 10^\circ$, $t_d = 3 \text{ с}$, $t_{гр} = 3.2 \text{ с}$, $t_{вр} = 5.2 \text{ с}$ в рамках описанных выше допущений были получены результаты в виде графиков зависимостей линейной и угловой скоростей от времени, а также траектории движения центра масс фигуриста, представленные на рис. 7 и рис. 8.

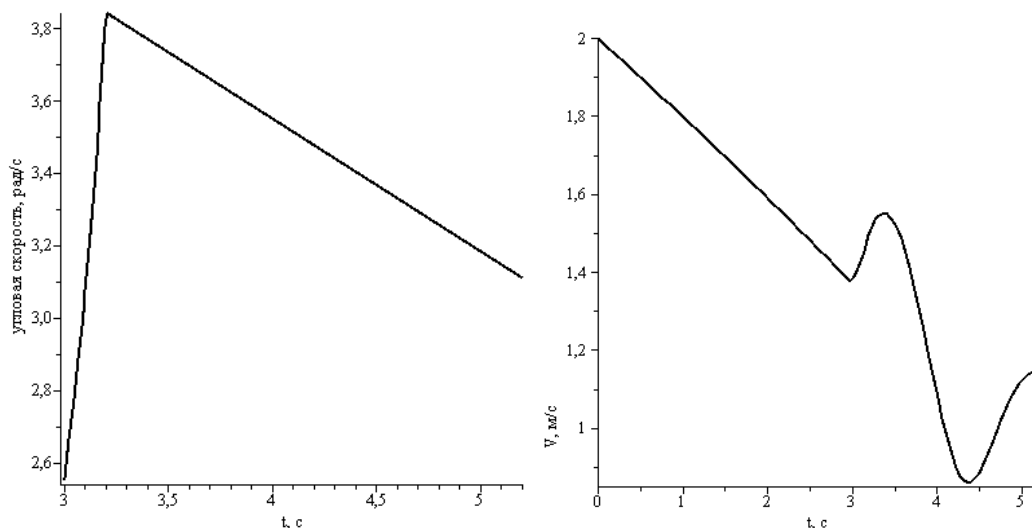


Рис. 7. Графики линейной и угловой скоростей твизла для средних параметров

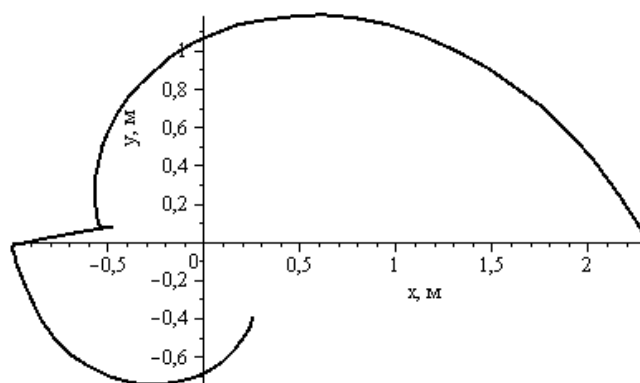


Рис. 8. График траектории движения центра масс фигуриста в твизле для средних параметров

Из результатов, представленных на рис. 6 видно, что начальная угловая скорость при вхождении фигуриста в твизл равняется 2.6 рад/с. За время группировки она возрастает до 3.8 рад/с. При этом фигурист совершает только один полный оборот. Таких маленьких скоростей недостаточно для совершения твизла. Эти данные не соотносятся с экспериментальными данными, полученными из реального фигурного катания. Причиной данного несоответствия является то, что перед исполнением твизла фигуристы совершают движение «мах», которое придает им дополнительную угловую скорость.

Для построения достоверной модели было принято решение взять значение начальной угловой скорости из эксперимента, и не пользоваться

формулой (9). Для тех же начальных условий и экспериментальным значением $\omega_0 = 8 \text{ рад/с}$ получаются графики зависимостей линейной и угловой скоростей от времени, а также траектории движения центра масс фигуриста, представленные на рис. 9 и рис. 10.:

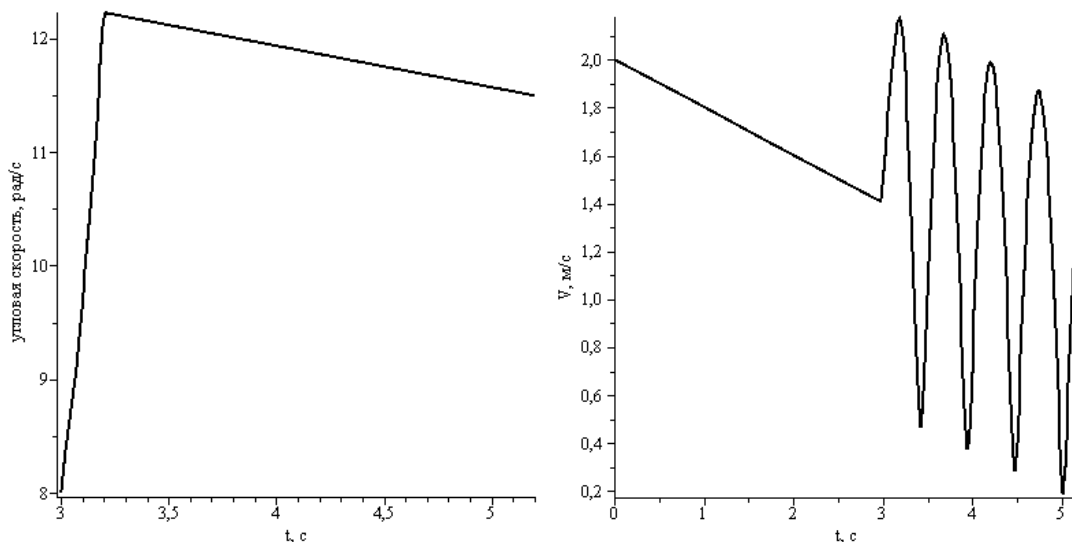


Рис. 9. Графики линейной и угловой скоростей твизла для средних параметров и с заданной начальной угловой скоростью

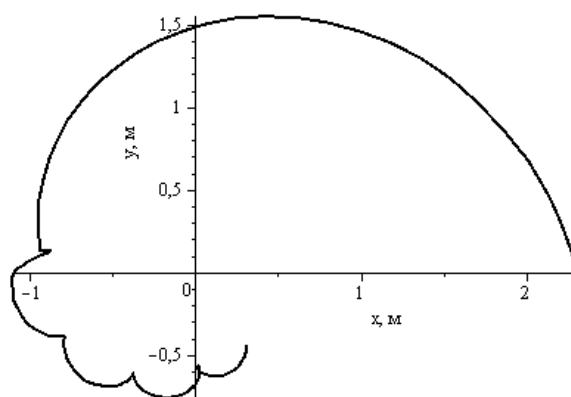


Рис.10. График траектории движения центра масс фигуриста в твизле для средних параметров и с заданной начальной угловой скоростью

При заданной начальной угловой скорости фигурист выполняет 4 полных оборота. Из результатов, представленных на рис.9 видно, что скорость увеличивается до 12 рад/с, а линейная скорость на выходе из твизла равна 1.5 м/с, что хорошо соотносится с экспериментальными данными реального фигурного катания.

Рассмотрим результаты для твизла при различной плотности группировки. Результаты представлены на рис. 11 в виде графиков зависимости линейной скорости фигуриста от времени. На левом графике показаны результаты при полной группировке, на правом - при не полной группировке.

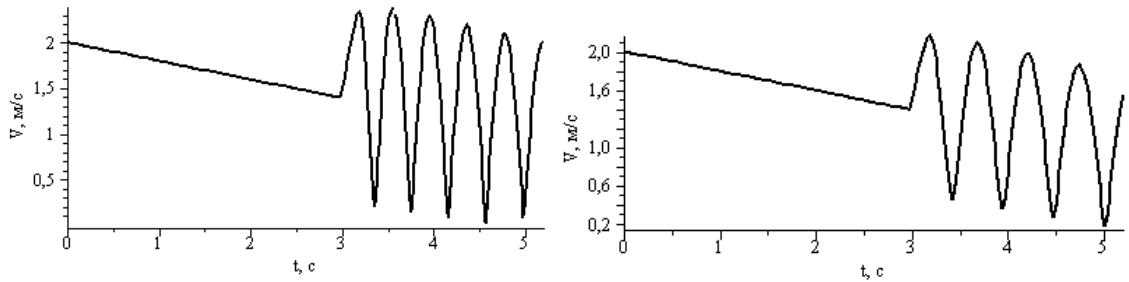


Рис. 11. Графики линейной скорости центра масс фигуриста при полной и неполной группировке

При полной группировке фигурист совершает около 6 вращений, а при неполной около 4.

На рис. 12 представлены результаты в виде графиков зависимости угловой скорости фигуриста от времени. На левом графике показаны результаты при полной группировке, на правом - при не полной группировке.

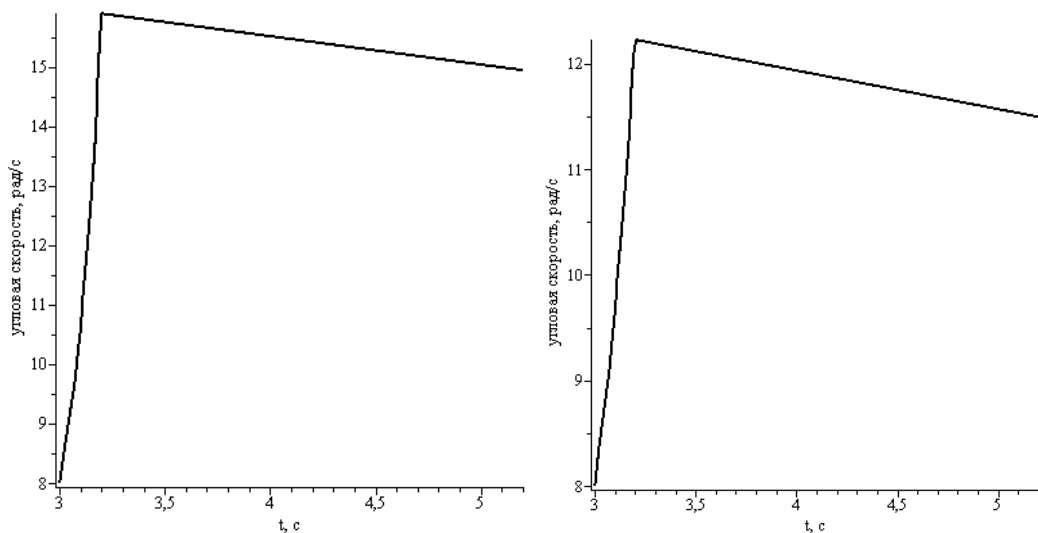


Рис. 12. Графики угловой скорости фигуриста при полной и неполной группировке

Анализируя результаты, представленные на рис. 11 и рис. 12 можно сделать вывод: если целью фигуриста является исполнение как можно большего количества вращений, ему следует делать максимальную группировку, чтобы максимально увеличить угловую скорость. Если же

целью фигуриста является совершить несколько вращений, не сильно потеряв при этом скорость ему достаточно делать не плотную группировку.

Для анализа влияния, которое оказывает изменение времени исполнения элементов твизла, а так же влияния начальной угловой и линейной скорости были произведены математические расчеты с помощью построенной модели. Результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1. Влияние изменения начальных параметров на характеристики твизла

Время движения по дуге(с)	Время группировки (с)	Время вращения (с)	Начальная линейная скорость (м/с)	Начальная угловая скорость (рад/с)	Скорость выхода из твизла (м/с)	Количество оборотов
3	0.2	2	2	8	1.6	4
5	0.2	2	2	8	1.2	4
3	0.5	2	2	8	1.2	4.5
3	0.2	3	2	8	0.6	6
3	0.2	2	3	8	2.4	4
3	0.2	2	3	10	1.8	5
3	0.2	3	3	10	1.2	7

Анализируя полученные результаты можно заметить, что, в зависимости от цели твизла, фигурист может варьировать его исполнение. Если целью является исполнение максимального количества вращений, то фигуристу необходимо набирать большую угловую скорость посредством сильного маха и увеличивать время вращения, но при этом он будет иметь небольшую линейную скорость выхода из твизла. Если же целью является сохранение линейной скорости, то фигуристу необходимо увеличивать скорость вхождения в твизл уменьшая время вращения.

Заключение

В работе были рассмотрены элементы фигурного катания: движение по дуге, вращение вокруг вертикальной оси и твизл. Была построена математическая модель твизла. Были получены зависимости для линейной и угловой скоростей движения фигуриста от времени. Была проанализирована связь данных зависимостей с начальными параметрами: премена угла наклона ребра конька к вертикали, плотность группировки, время исполнения элементов, начальные линейная и угловая скорости. Были построены графики траектории движения центра масс фигуриста, и её зависимость от начальной скорости и перемены угла наклона ребра конька к вертикали. Было посчитано количество полных оборотов, выполняемых в процессе исполнения твизла, при различных начальных условиях. Были написаны рекомендации, которые могут помочь начинающим фигуристам быстрее разобраться с проблемами в освоении твизла.

Список литературы

1. Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. М: Солон-Пресс, 2006. – 720с.
2. Зациорский В.М. и др. Биомеханика двигательного аппарата человека. – М.: Физкультура и спорт, 1981. – 143 с.
3. Мишин А.Н. Биомеханика движений фигуриста. – М.: ФиС, 1981.
4. Мишин А.Н. Фигурное катание на коньках: учеб. для ин-тов физ. Культ // под общ. ред. А.Н. Мишина. – М.: Физкультура и спорт, 1985. – 271 с.
5. Мякишев Г.Я. Физика. Механика. 10 кл.: учеб. для углубленного изучения физики // под ред. Г.Я. Мякишева. – Дрофа, 2005. – 495с.
6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т.1. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985.– 432 с.
7. Смушкин Я.А. Искусство фигурного катания на коньках. – М.: Советская Россия, 1967.– 230 с.
8. Чайковская Е.А. Фигурное катание. – М.: Физкультура и спорт, 1986.– 127 с.