

Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ учащихся
«Прикладные вопросы математики»

Математическое моделирование

Анализ хаотических решений системы Лоренца

Котельникова Анастасия Юрьевна
МОУ «Лицей №1» г. Перми, 11 кл.

Волегов Павел Сергеевич
к.ф.-м.н., доц. каф. ММСП
ПНИПУ

Пермь
2011

Содержание

Введение.....	3
Глава 1. Система Лоренца	4
Глава 2. Методы решения систем дифференциальных уравнений.....	5
Глава 3. Поиск статистического критерия.....	9
Глава 4. Результаты.....	10
Выводы	15
Литература	16

Введение

В середине XX века система Лоренца (маломодовая модель конвекции [1]) стала одной из наиболее известных динамических систем, иллюстрирующих переход к хаосу и возникновение странных аттракторов. Эта модель была создана на основе задачи Релея о конвективной устойчивости подогреваемого снизу горизонтального слоя несжимаемой жидкости.

Например, в слое воды 1 м при подогреве снизу неустойчивость возникает уже при вертикальной разности температуры величиной 10^{-7} градуса, в слое толщиной 1 сантиметр критическая разность температуры равна 0.1 градуса, а слой воды толщиной 1 миллиметр практически абсолютно устойчив. Именно в подогреваемом снизу горизонтальном слое жидкости со свободной верхней границей Бенар обнаружил возникновение после превышения критического градиента температуры гексагональных структур, получивших название ячеек Бенара (рис. 1).

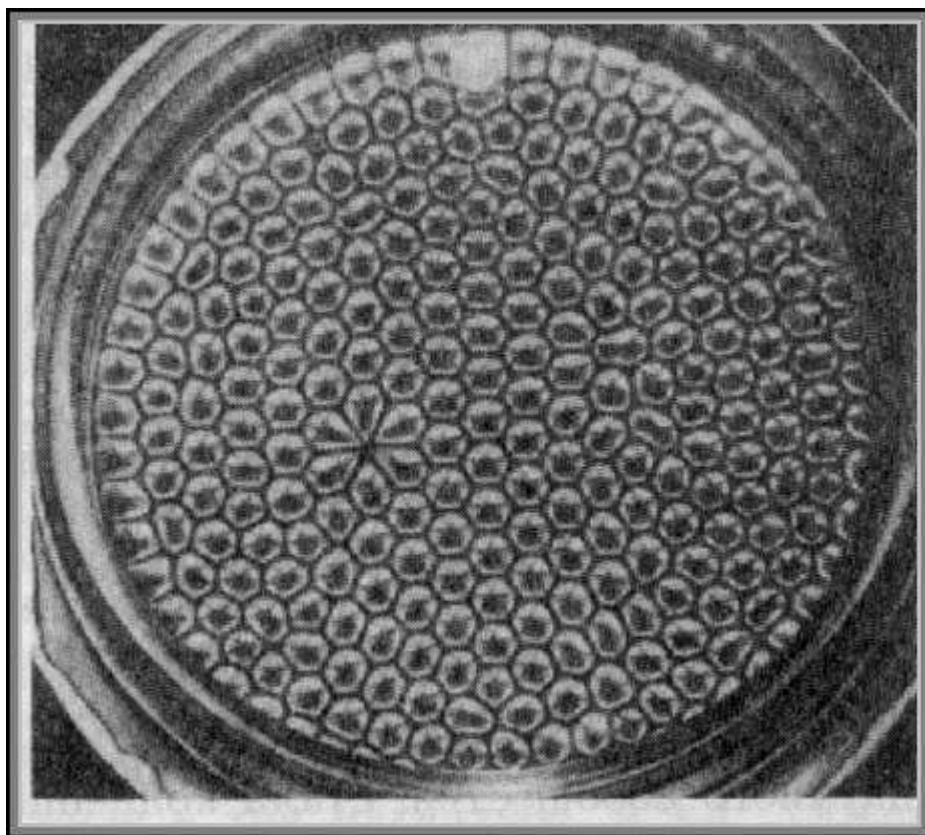


Рис. 1 Ячейки Бенара

Хаос в динамических системах во многом связан с турбулентностью, одним из наиболее сложных объектов исследования механики жидкости и га-

за. Турбулентность до сих пор остается неисследованным до конца явлением, что обеспечивает **актуальность** любых исследований в этом направлении.

Целью работы является попытка полного описания поведения системы Лоренца при различных значениях параметров модели.

Для достижения цели исследования нам необходимо решить следующие **задачи**:

- выбрать численный метод для решения системы Лоренца;
- на основе Фурье- и вейвлет-анализа временного сигнала выделить основные типы поведения системы;
- выявить критерий определения поведения системы;
- построить цветовые карты, описывающие распределение характерных решений системы в зависимости от значений параметров модели.

Глава 1. Система Лоренца

В 1900 году была опубликована статья французского исследователя Бенара с фотографией структуры, по виду напоминавшей пчелиные соты. При нагревании снизу слоя ртути, налитой в плоский широкий сосуд, весь слой неожиданно распадался на одинаковые вертикальные шестигранные призмы, которые впоследствии были названы ячейками Бенара.

Нелинейные уравнения, которыми описывается образование и разрушение структур Бенара, называются уравнениями Лоренца. Эдвард Лоренц в 1963 году исследовал решение уравнений, которые служат математической моделью конвективного движения в газах и жидкостях. Они получены в результате обезразмеривания уравнений течения жидкости. Они связывают между собой координаты фазового пространства: скорости потоков в слое, температуру и управляющий параметр. Их решение может быть проведено лишь численно, с помощью компьютеров. Система Лоренца – система трех нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{X} = \sigma X + \sigma Y, \\ \dot{Y} = -XZ + rX - Y, \\ \dot{Z} = XY - bZ, \end{cases} \quad (1)$$

где точкой обозначена производная по безразмерному времени. Рассмотрим подробнее физический смысл коэффициентов этой системы:

1. $\sigma = \frac{\nu}{\chi}$ – число Прандтля, зависящее от свойств жидкости: от вязкости и температуропроводности, чем больше температуропроводность, тем меньше число Прандтля.
2. $b = \frac{4}{(1+a)^2}$, где a – отношение геометрических размеров.
3. $r = \frac{R}{R_c}$ – внешний управляющий параметр, где $R = \frac{g\beta\theta L^3}{\nu\chi}$ – число Релея (пропорционально архимедовой силе и обратно пропорционально вязкости и температуропроводности), $R_c = \frac{\pi^4(a^2+n^2)^3}{a^2}$ – критическое значение числа Релея.

Глава 2. Методы решения систем дифференциальных уравнений

В данном разделе рассматриваются вопросы, связанные с численным решением систем обыкновенных дифференциальных уравнений, т.к. система Лоренца не имеет аналитического решения, поэтому приходится решать ее численно.

Методы решения дифференциальных уравнений условно классифицируются по следующему признаку:

- точное решение, позволяющее представить искомую функцию в элементарных функциях;
- приближенные решения, в которых точное решение получается как предел некоторой последовательности; в этом случае, как правило, ис-

пользуются разложения искомой функции в ряды Тейлора, Фурье и так далее;

- численные решения, когда искомая функция определяется для конечного числа значений аргумента в узлах разностной сетки [2].

Для решения нашей системы мы рассматривали методы Эйлера и Рунге-Кутты.

Метод Эйлера

Пусть для отрезка $[a, b]$, на котором ищется решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)), \quad 0 < x \leq T, \quad y(0) = y_0, \quad (2)$$

построена сеточная область $\Omega_n = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ с постоянным шагом h . Для построения решения уравнения (2) воспользуемся разложением искомой функции $y(x)$ в ряд Тейлора вблизи произвольной точки $x_k \in \Omega_n$:

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k) \cdot h + \dots \quad (3)$$

Учитывая, что согласно уравнению (2) $y'(x_k) = f(x_k, y(x_k))$, это разложение решения можно записать в виде

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + f(x_k, y(x_k)) \cdot h + \dots \quad (4)$$

С помощью полученного выражения построим вычислительный процесс

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot h, \quad k = 1, 2, \dots, y_0 = y(0). \quad (5)$$

Метод Рунге-Кутты

Для построения разностной схемы интегрирования воспользуемся разложением решения задачи (2) в ряд Тейлора:

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k) \cdot h + y''(x_k) \cdot \frac{h^2}{2} + \dots \quad (6)$$

Заменим вторую производную в этом разложении выражением

$$y''(x_k) = (y'(x_k))' = f'(x_k, y(x_k)) \approx \frac{f(\tilde{x}, \tilde{y}) - f(x_k, y(x_k))}{\Delta x}, \quad (7)$$

где $\tilde{x} = x_k + \Delta x$, $\tilde{y} = y(x_k + \Delta x)$, причем Δx подбирается из условия достижения наибольшей точности записанного выражения. Для дальнейших выкладок произведем замену величины \tilde{y} разложением в ряд Тейлора

$$\tilde{y} = y(x_k + \Delta x) = y(x_k) + y'(x_k) \cdot \Delta x + \dots \quad (8)$$

Для исходного уравнения (2) построим вычислительную схему:

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot h + \frac{h^2}{2\Delta x} (f(x_k + \Delta x, y_k + y'_k \Delta x) - f(x_k, y_k)), \quad (9)$$

которую преобразуем к виду

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h \left[\left(1 - \frac{h}{2\Delta x}\right) \cdot f(x_k, y_k) + \frac{h}{2\Delta x} f(x_k + \Delta x, y_k + y'_k \cdot \Delta x) \right] = \\ &= y_k + h \left[\left(1 - \frac{h}{2\Delta x}\right) \cdot f(x_k, y_k) + \frac{h}{2\Delta x} f\left(x_k + \frac{\Delta x}{h} h, y_k + f(x_k, y_k) \frac{\Delta x}{h} h\right) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

Введем обозначения:

$$\alpha = \frac{h}{2\Delta x}, \quad \beta = 1 - \frac{h}{2\Delta x}, \quad \gamma = \frac{\Delta x}{h}, \quad \delta = f(x_k, y_k) \frac{\Delta x}{h}, \quad (11)$$

которые позволяют записать предыдущее выражение в форме

$$y_{k+1} = y_k + h[\beta \cdot f(x_k, y_k) + \alpha \cdot f(x_k + \gamma \cdot h, y_k + \delta \cdot h)]. \quad (12)$$

Очевидно, что все введенные коэффициенты зависят от величины Δx и могут быть определены через α , который в этом случае играет роль параметра,

$$\beta = 1 - \alpha, \quad \gamma = \frac{1}{2\alpha}, \quad \delta = f(x_k, y_k) \frac{2}{\alpha}. \quad (13)$$

При $\alpha = 0$ получаем как частный случай уже известную схему Эйлера

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k). \quad (14)$$

При $\alpha = 1$ выражение (2) записывается в форме

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} \cdot f(x_k, y_k)\right). \quad (15)$$

В этом случае проведение расчетов на очередном шаге интегрирования можно рассматривать как последовательность следующих операций:

1. Вычисляется выражение

$$y_{k+1/2} = y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k), \quad (16)$$

представляющее собой *полушаг* интегрирования по схеме Эйлера, то есть определяется приближенное значение искомой функции в точке $x_k + \frac{h}{2}$.

2. Для той же промежуточной точки определяется приближенное значение производной

$$y'_{k+1/2} = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_{k+1/2}\right). \quad (17)$$

3. Определяется уточненное значение функции в конечной точке всего шага, причем по схеме Эйлера с вычисленным на предыдущем шаге значением производной,

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot y'_{k+1/2}. \quad (18)$$

Геометрические построения показывают, что получаемое в такой последовательности решение лежит “ближе” к истинному, чем вычисляемое по схеме Эйлера, то есть следует ожидать более высокой точности решения, получаемого методом Рунге-Кутты.

Окончательно схема Рунге-Кутты принимает вид

$$y_{k+1} = y_k + h \left[(1 - \alpha) f(x_k, y_k) + \alpha \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2\alpha}, y_k + \frac{h}{2\alpha} f(x_k, y_k)\right) \right]. \quad (19)$$

Схемы Рунге-Кутты, имеющие *четвертый* порядок аппроксимации:

$$\begin{cases} K_1 = f(x_k, y_k), \\ K_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} K_1\right), \\ K_3 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} K_2\right), \\ K_4 = f(x_k + h, y_k + h K_3), \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4). \end{cases} \quad (20)$$

В нашей программе реализован метод Рунге-Кутты четвертого порядка аппроксимации, т.к. более высокая степень аппроксимации дифференциального уравнения разностным аналогом позволяет получать более точное решение при более крупном шаге и, следовательно, меньшем числе шагов, то есть приводит к снижению требуемых ресурсов ЭВМ.

Глава 3. Поиск статистического критерия

На основе выявленных характерных решений была написана программа, автоматически определяющая тип поведения системы. В качестве основных статистических характеристик спектра были рассмотрены: среднее значение, среднее квадратическое отклонение, максимальное значение, коли-

чество точек в спектре над его средним значением. При поиске критерия мы пользовались различными комбинациями этих характеристик. Самыми оптимальными оказались отношение среднего отклонения к среднему значению и отношение максимума к среднему значению. Было проведено 300 измерений, занесенных в таблицу, и в ручном режиме выявлены промежутки хаотического, квазихаотического и стационарного сигналов. Переходный промежуток был введен для того, чтобы в областях, где мы не можем точно определить поведение системы (например, из-за резкого изменения поведения), избежать необоснованного отнесения поведения системы к одному из типов. Так как полная цветовая карта представляла бы собой заполненный куб (т.к. в системе Лоренца три коэффициента σ , r и b), решено было строить цветовые карты на срезах этого куба. Фиксированным оставлен коэффициент b , т.к. его значение меньше всего меняет поведение системы. Цветовая карта для изменяющегося b не представляет практического интереса.

Проведенные измерения с сортировкой по критерию «среднее отклонение к среднему значению» представлены в табл. 1 (Приложение). В качестве основного критерия был выбран критерий «отношение максимума к среднему значению», т.к. при сортировке промежутки оказались наиболее длинными. Первый критерий был выбран лишь в качестве вспомогательного.

Глава 4. Результаты

После выбора критерия был разработан алгоритм, позволяющий в автоматическом режиме определять тип поведения системы (из трех, выбранных ранее) и построены цветовые карты, описывающие распределение характерных решений системы в зависимости от значений параметров модели.

На рис. 10 показана цветовая карта для $b=2,6666$, на рис. 13 показана карта для $b=2$, а на рис. 14 – для $b=3$. На оси ординат откладывается r . На оси абсцисс откладывается σ . Красным цветом обозначено стационарное

поведение, синим хаотическое, зеленым квазихаотическое, желтым — переходное.

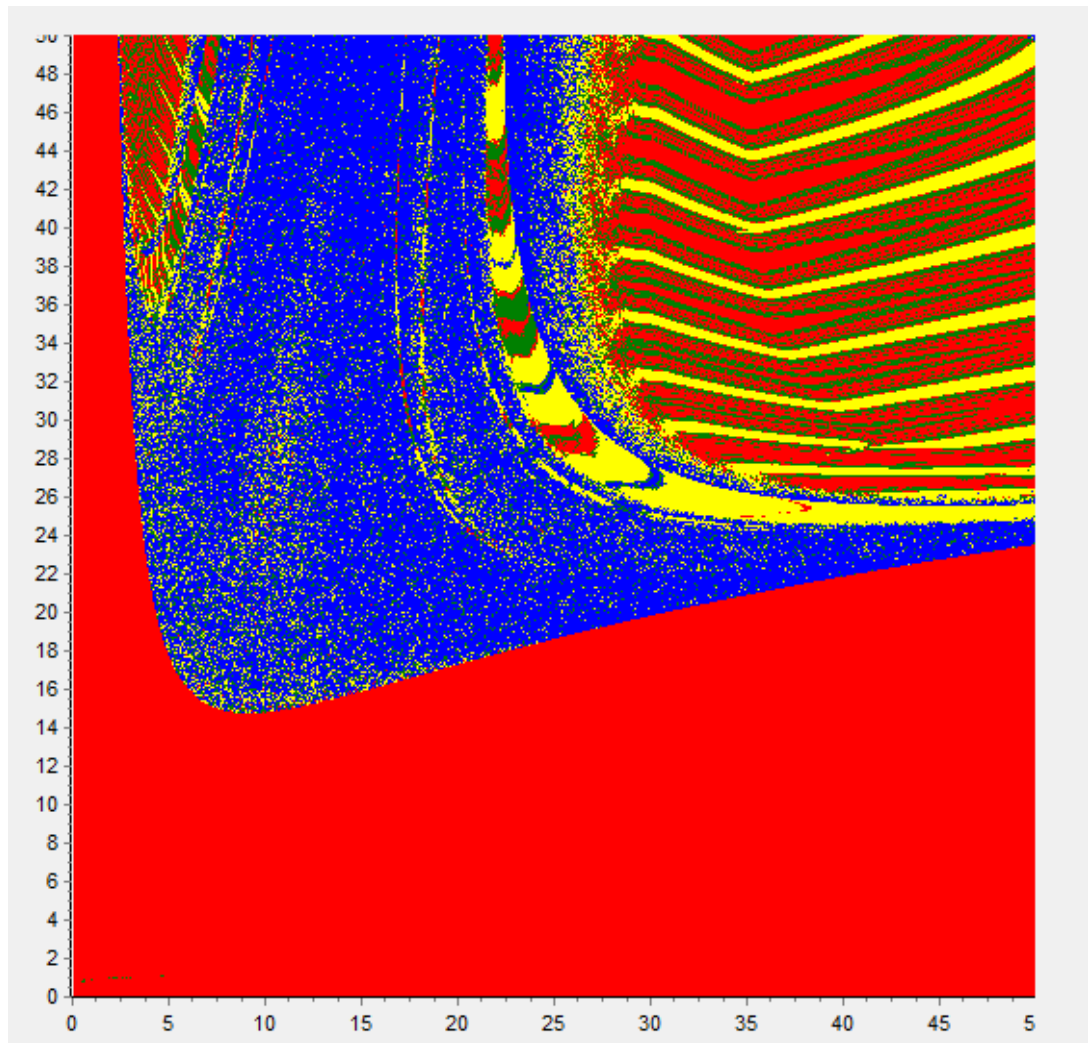


Рис. 10 Цветовая карта для $b=2,6666$.

На рис. 10 мы можем наблюдать близкие к прямым линии в верхней правой области. На рис. 11 показана увеличенная область верхнего правого квадрата ($25 \leq \sigma \leq 50$ и $25 \leq r \leq 50$) с шагом 0,05.

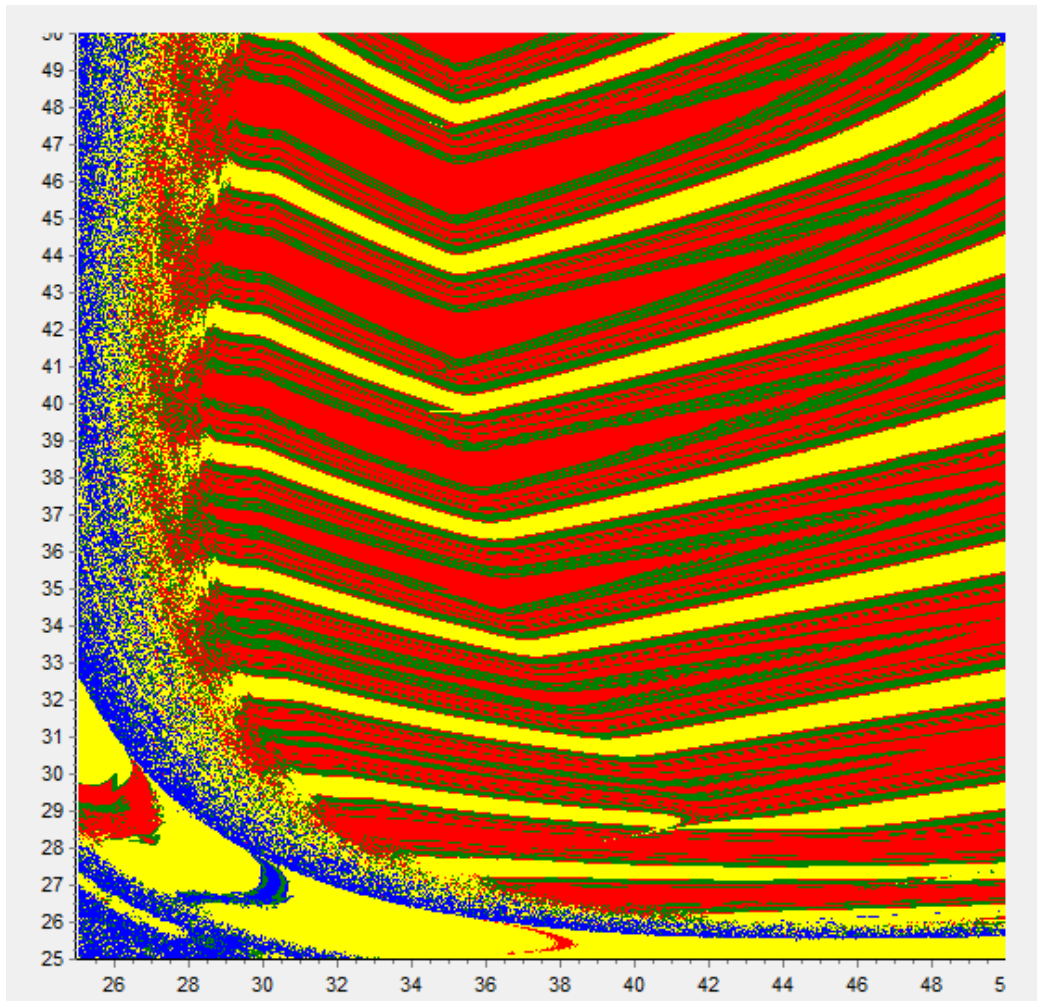


Рис. 11 Увеличенная область цветовой карты для $b=2,6666$.

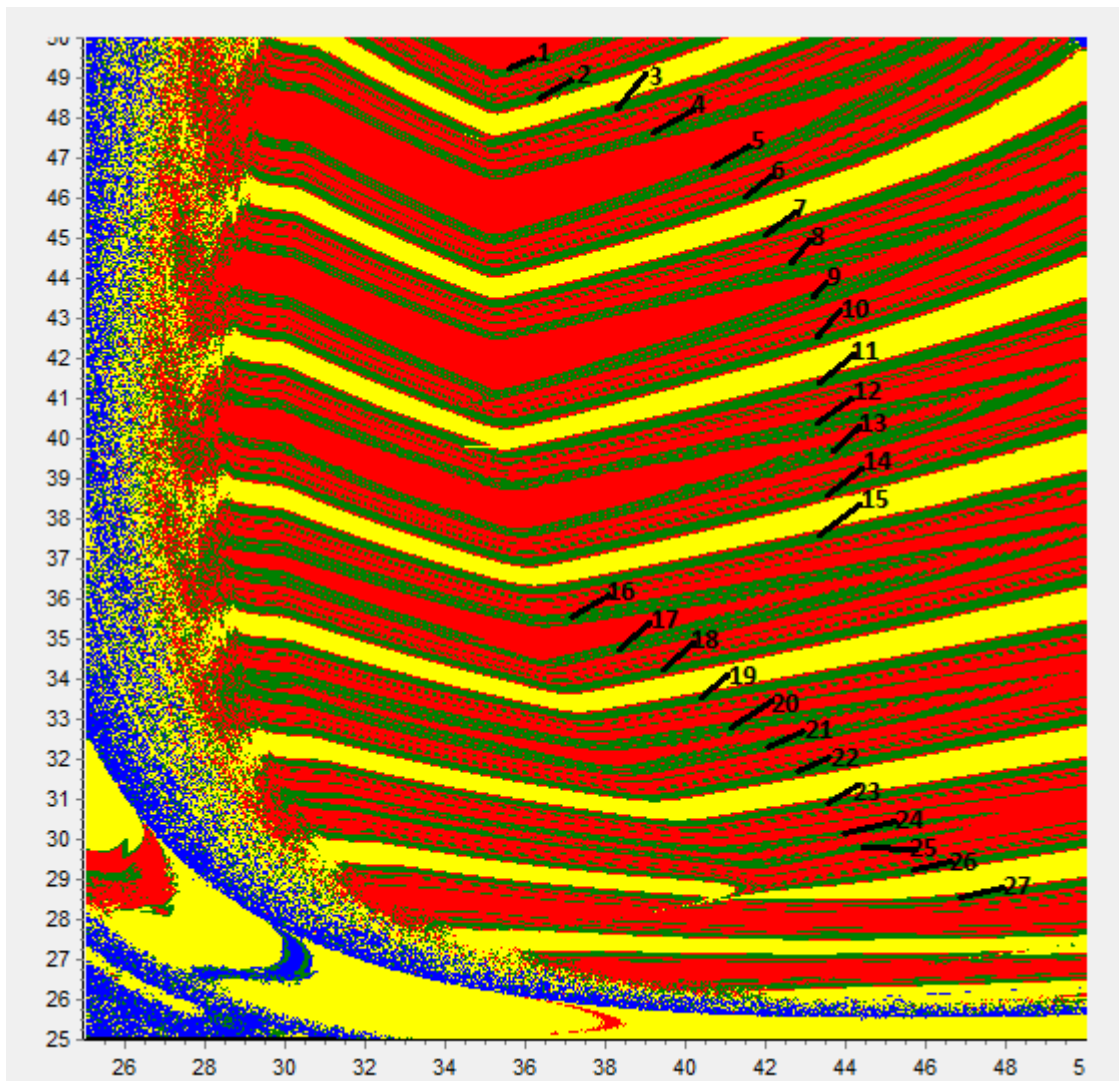


Рис. 12. Увеличенная область цветовой карты для $b=2,6666$.

Для линий, отмеченных номерами, были посчитаны коэффициенты наклона. Результаты приведены в табл. 2 (Приложение).

На основании коэффициентов этих прямых можно сделать вывод, что эти линии на самом деле не параллельны, как кажется с первого взгляда, и никакой последовательности в коэффициентах нет.

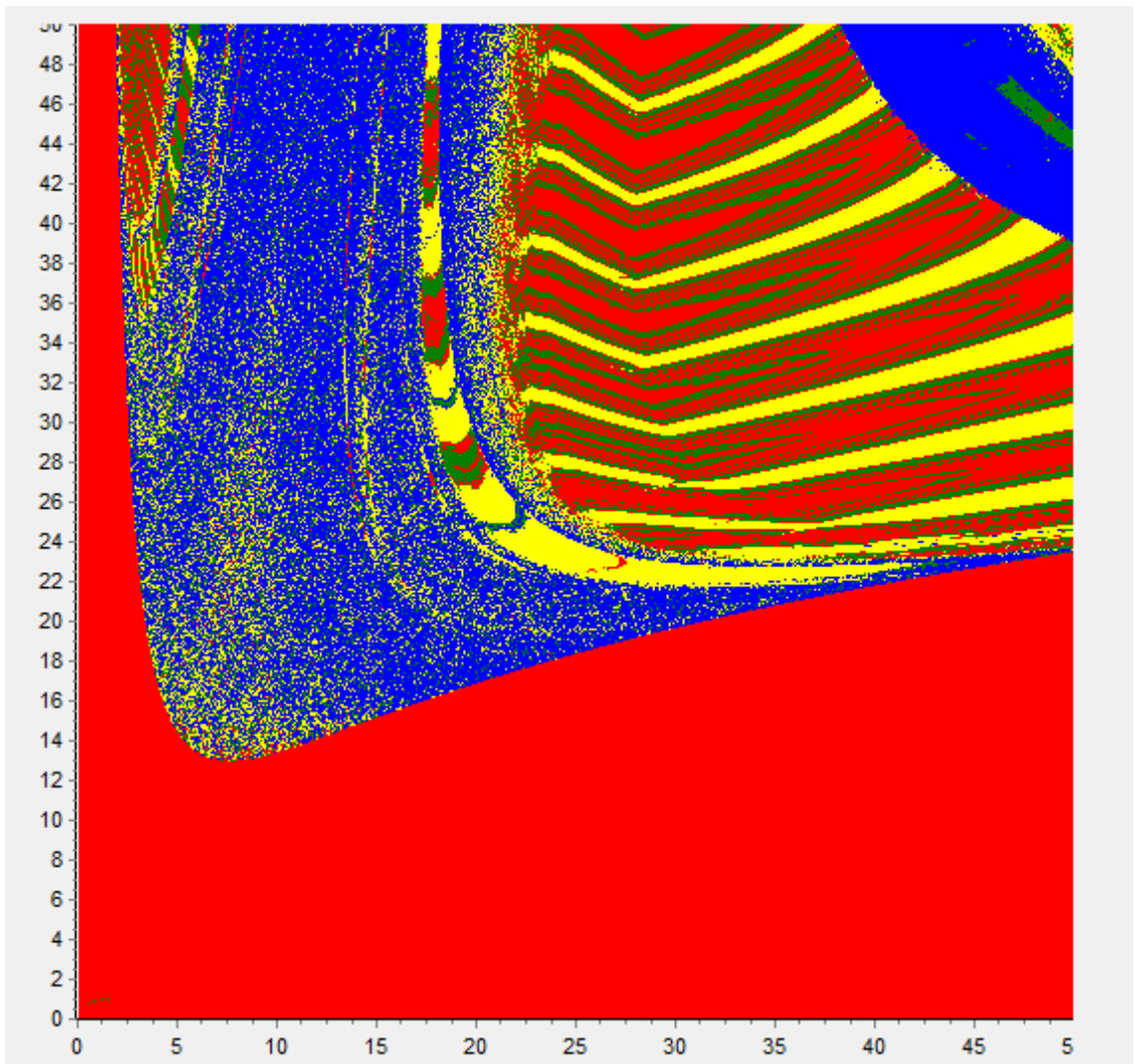


Рис. 13.Цветовая карта для $b=2$.

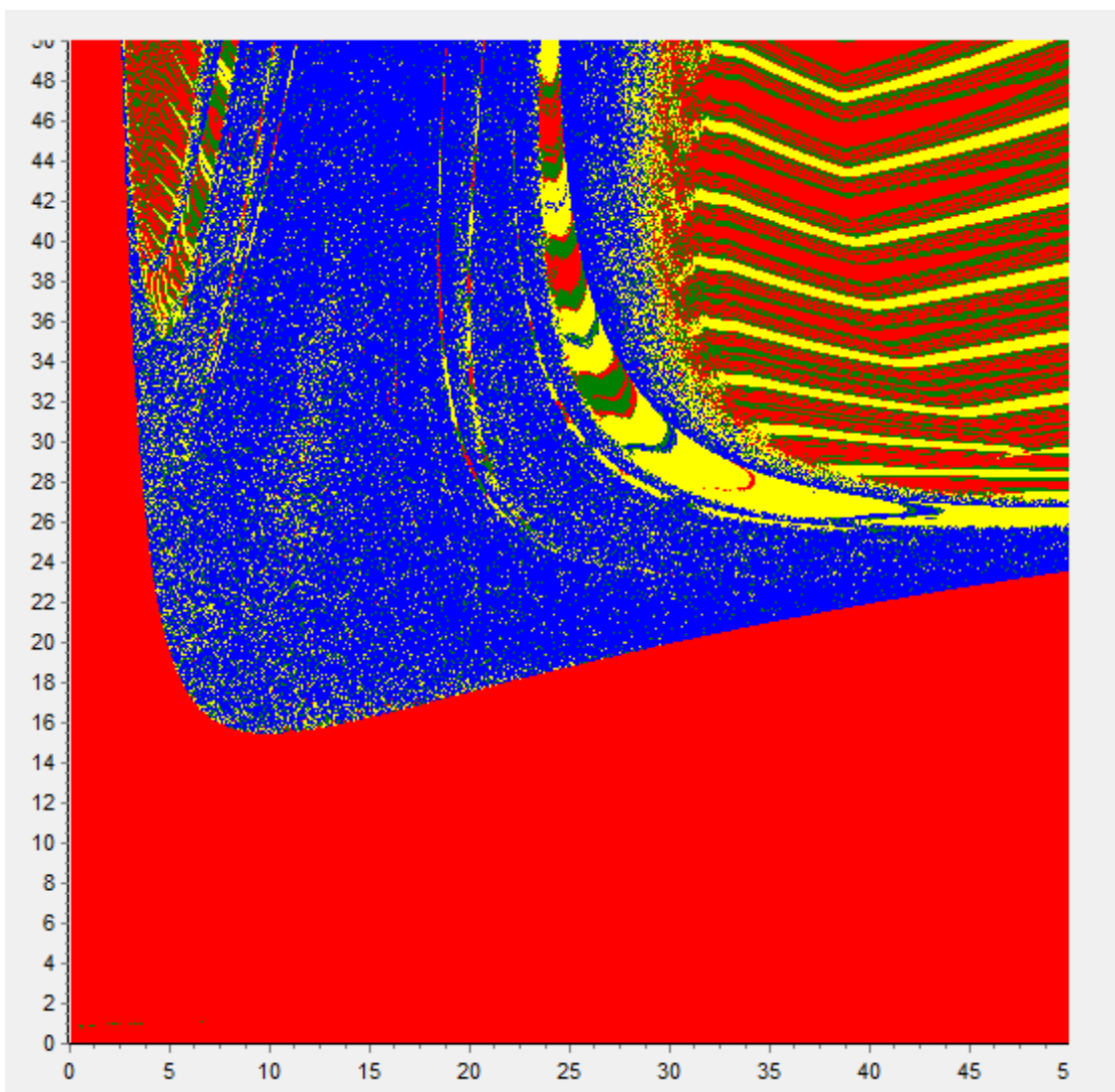


Рис. 14. Цветовая карта для $b=3$.

На основании полученных цветowych карт мы выдвинули гипотезу, что область перемежающихся решений меняет свое положение при изменении коэффициента b , не меняя при этом своей структуры.

Выводы

В работе представлено исследование системы Лоренца (маломодовой модели конвекции). Для решения системы выбран численный метод Рунге-Кутты, так как данная система не решается аналитически. Для обработки получаемых временных сигналов $x(t)$ использованы Фурье- и вейвлет-анализ. Визуально выделены три основных типа поведения решений системы Лоренца: хаотический, квазихаотический, стационарный. Выявлен критерий типа поведения системы. Построены цветowych карты, описывающие распределе-

ние характерных решений системы в зависимости от значений параметров модели.

Литература

1. Фрик П.Г. Турбулентность: модели и подходы. – Пермь: Изд-во ПГТУ, – 1998. – 108 с.
2. Бояршинов М.Г. Численные методы. – Пермь: Изд-во ПГТУ, – 1998. – 176 с.
3. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. – М: ДМК Пресс, 2005. – 304 с.

Приложение

Табл. 1. Поиск статического критерия.

№	σ	r	b	Ср.знач/ ср. от- клон.	Макс/ср. знач	Точки выше ср. знач/ ср. знач.	Макс./ср. отклон	Макс./ r	Тип поведе- ния
57	12,1	25,1	4,1	1,87	76	0,000618	40,5	523243,1	Хаос 1
143	21	32	11	1,82	78	0,000286	42,8	1216096	Хаос 1
108	12,5	30,5	4,5	1,85	89	0,000476	48	716759,3	Хаос 1
254	43	31	15	1,8	93	0,000273	51,6	1497280	Хаос 1
144	22	33	12	1,82	93	0,000253	51,5	1520204	Хаос 1
229	9,1	15,1	2,8	1,9	93	0,00134	49,2	383295,3	Хаос 1
145	23	34	13	1,82	99	0,000225	54,6	1682389	Хаос 1
52	10	30	2,6666	1,89	103	0,000648	54,6	513970,8	Хаос 1
177	12,2	25,2	4,2	1,87	106	0,000662	56,6	752973,3	Хаос 1
253	43	37	15	1,78	107	0,000198	60	2505129	Хаос 1
147	25	36	15	1,82	107	0,000209	58,8	1904364	Хаос 1
178	11,8	24,8	3,8	1,88	108	0,000594	57,7	713164,7	Хаос 1
49	10	27	2,6666	1,89	112	0,000716	59,5	547240,8	Хаос 1
183	8,7	15,7	1,7	1,9	125	0,001641	65,4	352783	Хаос 1
298	14	33	7	1,85	125	0,000341	67,7	1453640	Хаос 1
38	10	16	2,6666	1,89	127	0,00127	67,2	518567	Хаос 1
266	4,3	13,3	1,3	1,94	135	0,001952	69,8	286679,8	Хаос 1
300	18	41	7	1,81	138	0,000276	76,3	1788646	Хаос 1
205	5,7	13,7	0,9	1,94	141	0,002435	72,6	223459,1	Хаос 1
142	20	31	10	1,84	145	0,000279	78,9	2150221	Хаос 1
193	7,2	14,2	1,2	1,92	146	0,002229	76,1	300353	Хаос 1
175	12,2	30,2	4,2	1,86	147	0,000513	78,6	1106572	Хаос 1
94	12	30	4	1,87	147	0,000501	78,9	1069612	Хаос 1
84	8	15	1	1,89	149	0,002919	78,9	269320,8	Хаос 1
43	10	21	2,6666	1,9	154	0,000869	80,9	715459,7	Хаос 1
281	7,3	14,3	0,8	1,91	155	0,002871	81	222532	Хаос 1
70	10	13	1	1,92	156	0,003021	81,2	266621,4	Хаос 1
176	11,8	29,8	3,8	1,87	157	0,00049	83,7	1097033	Хаос 1
146	24	35	14	1,83	158	0,000184	86,2	2804859	Хаос 1
41	10	19	2,6666	1,9	160	0,001004	84,3	712161	Хаос 1
40	10	18	2,6666	1,9	163	0,001045	85,8	718855,6	Хаос 1
195	8,2	15,2	1,2	1,92	164	0,002026	85,6	351757,3	Хаос 1
...									
204	8,8	14,8	0,8	1,93	188	0,002639	97,5	274035,6	Хаос 2
50	10	28	2,6666	1,88	188	0,000689	99,7	925185,2	Хаос 2
61	5	13	0,5	1,95	193	0,00371	98,8	175861,2	Хаос 2
83	7	14	1	1,93	197	0,002205	102	351610,8	Хаос 2
194	10,2	14,2	1,2	1,91	199	0,002295	104	408300,5	Хаос 2
285	3,9	12,9	0,4	1,93	199	0,006233	103,2	121489,5	Хаос 2
201	6,8	13,8	0,8	1,93	200	0,002996	103,6	284743,3	Хаос 2

55	12	10	0,5	1,9	202	0,008705	106,3	155105,2	Хаос 2
290	3,1	13,1	0,6	1,94	202	0,002722	104,1	209356,5	Хаос 2
109	8,5	15,5	1,5	1,92	210	0,00166	109,7	531176,3	Хаос 2
...									
286	5,6	10,6	0,8	1,94	315	0,003225	162,3	433608,6	Хаос 1
234	10	31	0,5	1,93	319	0,002076	165,8	312486,7	Стационарный
215	7,2	14,2	0,7	1,93	321	0,003121	165,8	405317,8	Хаос 2
198	4,8	12,8	0,8	1,93	322	0,002782	166,5	424730,8	Хаос 2
53	12	25	0,5	1,93	338	0,002226	174,9	322013,6	Стационарный
202	9,8	13,8	0,8	1,94	338	0,002384	174,6	462661,2	Хаос 2
291	5,7	10,7	0,9	1,94	340	0,003168	175,2	491284	Хаос 1
223	3,8	12,8	0,3	1,93	343	0,006869	177,9	175488	Хаос 2
110	5,5	10,5	0,7	1,95	347	0,003737	178,2	398096	Стационарный
206	5,3	13,3	0,5	1,95	360	0,003661	185	318299,7	Хаос 2
107	10,5	16,5	2,6666	1,89	361	0,001134	190,9	1522768	Хаос 2
106	80	45	2	1,87	362	0,000403	193,3	1416087	Стационарный
277	80,1	45,1	2,1	1,87	362	0,000366	193,3	1428248	Стационарный
211	3,2	13,2	0,7	1,93	362	0,003127	188,3	430292,9	Хаос 2
287	5,4	13,4	0,6	1,94	364	0,003579	187,9	356341,2	Хаос 1
...									
120	45	45	53	1,97	1820	0,000004	922,6	1,68E+08	Стационарный
210	2,2	13,2	0,7	1,97	1831	0,000658	927,3	2320428	Стационарный
1	1	1	2,6666	1,97	1915	0,342598	971,5	72678,75	Стационарный
78	3	13	1	1,99	1917	0,000125	962,2	3526622	Стационарный
218	11,8	8,8	0,3	1,98	1945	0,002291	982,7	1061550	Стационарный
89	10	1	4	1,98	1949	0,159658	985,3	134306,3	Стационарный
86	1	1	4	1,98	1968	0,120096	994,6	147484,9	Стационарный
280	11,9	8,9	0,4	1,99	2006	0,000788	1009	1429834	Стационарный
232	8,5	15	2,7777	1,99	2023	0,000038	1015,3	10642906	Стационарный
181	9,2	15,2	2,8888	1,99	2025	0,000036	1015,5	11115453	Стационарный
279	12,1	9,1	0,6	1,99	2039	0,000501	1023,1	2235945	Стационарный
13	1	101	2,6666	1,77	2039	0,000009	1151,3	10962200	Стационарный
256	8,6	15,1	2,8888	2	2044	0,000036	1023,8	11249333	Стационарный
23	10	1	2,6666	2	2044	0,022258	1024,2	275463,8	Стационарный
88	1	101	4	2	2045	0,000001	1024,5	16543535	Стационарный
207	12,2	9,2	0,7	2	2047	0,000085	1024,5	2613201	Стационарный
69	10	1	1	2	2047	0,012378	1024,5	165365,1	Стационарный
75	12	10	1	2	2048	0,000054	1024,5	3777634	Стационарный
36	10	14	2,6666	2	2048	0,000014	1024,5	10370343	Стационарный
20	7	14	2,6666	2	2048	0,000014	1024,5	10373559	Стационарный
76	12	9	1	2	2048	0,000061	1024,5	3731424	Стационарный
66	1	1	1	2	2048	0,011805	1024,5	173488,6	Стационарный
19	6	14	2,6666	2	2048	0,000014	1024,5	10371342	Стационарный

Табл. 2. Коэффициенты наклона линий. Номера линий отмечены на рис.12.

№ линии	Точный коэффициент наклона		Приближенный коэффициент наклона	
	До точки перелома	После точки перелома	До точки перелома	После точки перелома
1	-0,52632	0,35088	-23/44	15/44
2	-0,48684	0,32492	-21/44	14/44
3	-0,50514	0,32106	-22/44	14/44
4	-0,48342	0,29621	-21/44	13/44
5	-0,50514	0,35020	-22/44	15/44
6	-0,47056	0,30764	-21/44	14/44
7	-0,44314	0,27357	-19/44	12/44
8	-0,39190	0,22903	-17/44	10/44
9	-0,46631	0,31530	-20/44	14/44
10	-0,46631	0,31530	-20/44	14/44
11	-0,37190	0,23271	-16/44	10/44
12	-0,35608	0,21804	-15/44	9/44
13	-0,33654	0,28297	-14/44	12/44
14	-0,32878	0,24747	-14/44	11/44
15	-0,30382	0,20527	-13/44	9/44
16	-0,29053	0,19076	-13/44	9/44
17	-0,32685	0,24562	-14/44	10/44
18	-0,27169	0,21804	-12/44	9/44
19	-0,22719	0,18353	-10/44	8/44
20	-0,21073	0,16914	-9/44	7/44
21	-0,22353	0,21438	-10/44	9/44
22	-0,19257	0,19257	-9/44	9/44

23	-0,14410	0,15481	-6/44	7/44
24	-0,12988	0,15660	-6/44	7/44
25	-0,11924	0,19438	-5/44	8/44
26	-0,11924	0,15481	-5/44	7/44
27	-0,10334	0,12278	-4/44	5/44