Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ учащихся

«Прикладные вопросы математики»

Геометрия

Роль фракталов в различных приложениях

Крапивина Анастасия,

МОУ «Лицей №1» г. Перми, 11 кл.

Грайфер Лазарь Борисович,

к. ф.-м. н., доцент ПНИПУ

До недавнего времени геометрические модели различных природных конструкций традиционно строились на основе сравнительно простых геометрических фигур: прямых, многоугольников, окружностей, многогранников, сфер. Однако очевидно, что этот классический набор, становится плохо применимым для характеристики таких сложных объектов, как очертание береговых линий материков, разряд молнии в воздухе, форма облаков, снежинки, пламя костра и др. В последние 15-20 лет для описания этих и им подобных образований ученые все чаще используют новые геометрические понятия.

Одним из таких понятий, изменившим многие традиционные представления о геометрии, явилось понятие фрактала.

Фракталы – это геометрические объекты (линии, поверхности, пространственные тела), имеющие сильно изрезанную форму в одинаковой степени в любом масштабе. Форма этих объектов не изменяется от того, рассматриваем мы их вблизи или издалека. Слово «фрактал» произошло от латинского «fractus» и переводится как дробный, ломаный, состоящий из элементов.

Первые примеры самоподобных множеств с необычными свойствами появились в XIX веке (например, множество Кантора). Термин «фрактал» был введён Бенуа Мандельбротом в 1975 году и получил широкую популярность с выходом в 1977 году его книги «Фрактальная геометрия природы».

Мандельброт предложил *пробное* определение фрактала:

Фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа – Безиковича которого строго больше его топологической размерности (топологическая размерность всегда равна целому числу.)

Затем Мандельброт сузил свое предварительное определение, предложив заменить его следующим:

Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому.

Строгого и полного определения фракталов пока не существует.

Основное свойство фракталов – самоподобие, предполагающее неизменность основных геометрических особенностей при изменении масштаба.

Однако свойство точного самоподобия характерно лишь для регулярных фракталов. Если вместо детерминированного способа построения включить в алгоритм создания некоторый элемент случайности, то возникнут так называемые случайные фракталы.

Следует отметить, что слово «фрактал» не является математическим термином и не имеет общепринятого строгого математического определения. Оно может употребляться, когда рассматриваемая фигура обладает какими-либо из перечисленных ниже свойств:

- Обладает нетривиальной структурой на всех масштабах. В этом отличие от регулярных фигур (таких, как окружность, эллипс, график гладкой функции): если мы рассмотрим небольшой фрагмент регулярной фигуры в очень крупном масштабе, он будет похож на фрагмент прямой. Для фрактала увеличение масштаба не ведёт к упрощению структуры, на всех шкалах мы увидим одинаково сложную картину.
- Является самоподобной или приближённо самоподобной.
- Обладает дробной метрической размерностью или метрической размерностью, превосходящей топологическую.

Многие объекты в природе обладают фрактальными свойствами, например, побережья, облака, кроны деревьев, снежинки, кровеносная система и система альвеол человека или животных.

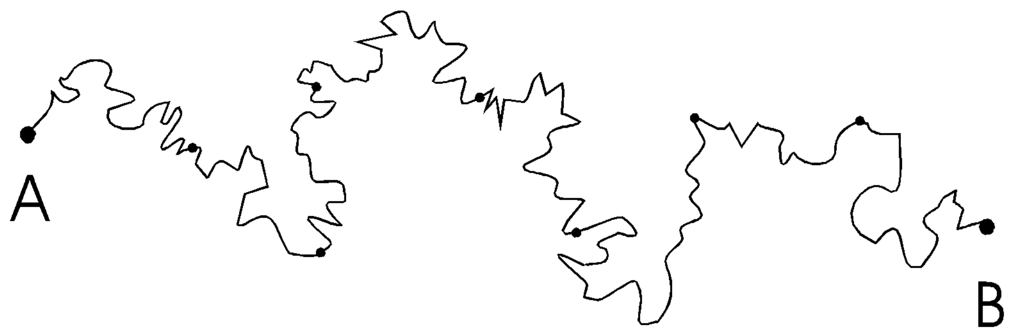
Фракталы, особенно на плоскости, популярны благодаря сочетанию красоты с простотой построения при помощи компьютера.

История фрактальной геометрии тесно связанна с именами таких известных математиков как Кантор, Пеано, Хаусдорф, Вейерштрасс, Безикович, Серпинский и др. Вейерштрасс впервые ввел в обращение непрерывную, но нигде не дифференцируемую функцию. Хаусдорф в 1919 году ввел понятие о дробной размерности множеств и привел их примеры (Канторово множество, кривая Коха и т.д.).

Большой вклад в будущую фрактальную геометрию внесли также знаменитые работы французских математиков Г. Жюлиа и П. Фоту, которые в начале 20 века занимались теорией рациональных отображений в комплексной плоскости. Практически полностью забытая, их деятельность получила неожиданное развитие в начале 80-х годов, когда с помощью компьютеров математикам удалось получить прекрасные картины, показывающие примеры таких отображений.

Задача о длине береговой линии

Первоначально понятие фрактала в физике возникло в связи с задачей об определении длины береговой линии.



Пусть расстояние по прямой линии между расположенными на береговой линии точками A и B равно R. Чтобы измерить блину береговой линии между этими точками, расставим по берегу жестко связанные между собой вешки (их количество равно n) так, чтобы расстояние между соседними вешками равнялось *l*. Тогда длина береговой линии равна L = (n-*1*) l.

Следующее измерение проведем, уменьшим *l*. Окажется, что при уменьшении масштаба l будут получаться все большие и большие значения длины L, то есть длина береговой линии не стремится к конечному пределу, а увеличивается по степенному закону, установленному английским физиком Л. Ричардсоном:

$$L \approx l\left(\frac{R}{l}\right)^D = l^{1-D}R\,,$$

где D>1, некоторый показатель степени, который называется фрактальной размерностью береговой линии. Чем больше величина D, тем более изрезанной является эта береговая линия.

Из формулы мы видим, что чем меньший масштаб мы используем, тем меньшие детали побережья будут учтены и дадут вклад в измеряемую длину; наоборот, увеличивая масштаб, мы «спрямляем» побережье, уменьшая L.

Таким образом, для определения длины береговой линии L с помощью жесткого масштаба *l* (например, циркуля) необходимо сделать *N* = *L/l* шагов, причем L меняется с *l* так, что N зависит от *l* по закону $N \approx (R/l)^D$. В результате с уменьшением масштаба длина береговой линии неограниченно возрастает.

Если представить длину береговой линии на графике, который выполнен в дважды логарифмическом масштабе, то он покажет, что при уменьшении длины шага *l* измеренная длина возрастает. На графике все точки выстраиваются вдоль прямой. Угловой коэффициент этой прямой равен 1 – D, где D – фрактальная размерность береговой линии.

Фрактальная размерность

Пусть d – обычная Евклидова размерность пространства, в котором находится фрактальный объект (d = 1 – линия, d = 2- плоскость, d = 3 – обычное трехмерное пространство). Покроем теперь этот объект целиком d-мерными «шарами» радиуса *l*. Предположим, что нам потребовалось для этого не менее чем N(*l*) шаров. Тогда, если при достаточно малых *l* величина N(*l*) меняется с *l* по степенному закону

$$N(l) \sim \frac{1}{l^D},$$

то D – называется хаусдорфовой или фрактальной размерностью этого объекта. Очевидно, что эта формула эквивалентна соотношению, использованному выше для определения длины береговой линии. Эту формулу можно переписать также в виде

$$D = -\lim_{l \to 0} \frac{\ln N(l)}{\ln l}.$$

Это и служит общим определением фрактальной размерности D. В соответствии с ним величина D является локальной характеристикой данного объекта.

Можно показать, что такое определение дает привычные целочисленные значения размерности для обычных хорошо известных множеств.

Так, для множества, состоящего из конечного числа изолированных точек, N, минимальное число d-мерных «шаров», с помощью которых мы можем покрыть это множество, при достаточно малом размере шаров совпадает с количеством точек, т.е. N(l) = N и не зависит от диаметра этих шаров l. Следовательно, фрактальная размерность этого множества D = 0. Она совпадает с обычной Евклидовой размерностью изолированной точки d = 0 (точка – нульмерный объект).

Для отрезка прямой линии длиной L минимальное число N(l) одномерных отрезков размера l, с помощью которых можно покрыть данный отрезок целиком, равно $N(l) = L/l$. Значит, D = 1.

Для области площадью S гладкой двумерной поверхности число необходимых для ее покрытия квадратов $N(l) = S/l^2$, поэтому D = 2.

Для покрытия некоторого конечного объема V необходимо $N(l) = V/l^3$ кубиков с ребром l, отсюда D=3.

Существуют регулярные фракталы, которые обладают свойством идеального самоподобия. Их покрытие можно осуществлять элементами, из которого состоит данный фрактал. Пусть на некотором этапе покрытия фрактала нам пришлось использовать как минимум N(l) таких элементов характерного размера l, а на другом N(l’) элементов размера l’. Тогда величина фрактальной размерности D может быть вычислена по формуле

$$D = -\frac{\ln\left(\dfrac{N(l)}{N(l')}\right)}{\ln\left(\dfrac{l}{l'}\right)}.$$

Эту формулу можно переписать в виде

$$\frac{N(l)}{N(l')} = \left(\frac{l'}{l}\right)^D.$$

Если $0<D<1$, то фрактальный объект имеет нулевую длину, если $1<D<2$ – то нулевую площадь, но бесконечную длину; $2<D<3$ – то нулевой объем, но бесконечную длину и площадь.

Построение фракталов не было бы возможно без существования комплексных чисел.

Комплексными числами называются выражения вида a+bi (где a и b – действительные числа, i – некоторый символ), если для этих выражений следующим образом определены понятия равенства и операции сложения и умножения:

1. Два комплексных числа a+bi и c+di считаются равными только тогда, когда a=c и b=d.
2. Суммой двух комплексных чисел a+bi и c+di называется комплексное число (a+c)+(b+d)i.
3. Произведением двух комплексных чисел a+bi и c+di называется комплексное число
(ac-bd)+(ad+bc)i.

Число a называется действительной частью комплексного числа Z=a+bi и обозначается символом Re Z (Re(a+bi)=a).
Число b называется мнимой частью комплексного числа Z=a+bi и обозначается символом Im Z (Im(a+bi)=a).
Символ i называется мнимой единицей.

Геометрический смысл комплексного числа можно понять из определения комплексного числа на плоскости:

Каждому комплексному числу Z=a+bi соответствует точка координатной плоскости с координатами (a, b), т.е. точка, абсцисса которой равна действительной части комплексного числа, а ордината – мнимой части. Каждой точке с координатами (a, b) соответствует комплексное число Z=a+bi.

Координатную плоскость называют комплексной плоскостью. Действительные числа изображаются точками оси абсцисс, которую называют действительной осью, а чисто мнимые числа – точками оси ординат, которую называют мнимой осью.

Каждой точке плоскости с координатами (a, b) соответствует один и только один вектор с началом в точке (0,0) и концом в точке (a, b), поэтому комплексное число a+bi изображается вектором с началом в точке Z=0 и концом в точке Z=a+bi.

Природные объекты часто имеют фрактальную форму. Для их моделирования могут применяться стохастические (случайные) фракталы. Примеры стохастических фракталов:

- траектория броуновского движения на плоскости и в пространстве;
- граница траектории броуновского движения на плоскости.
- эволюции Шрамма-Лёвнера — конформно-инвариантные фрактальные кривые, возникающие в критических двумерных моделях статистической механики.
- различные виды рандомизированных фракталов, то есть фракталов, полученных с помощью рекурсивной процедуры, в которую на каждом шаге введён случайный параметр. Плазма — пример использования такого фрактала в компьютерной графике.

Примерами фракталов в природе будут являться бронхиальное дерево, сеть кровеносных сосудов, деревья.

Фракталы широко применяются в компьютерной графике для построения изображений природных объектов, таких, как деревья, кусты, горные ландшафты, поверхности морей и так далее. Существует множество программ, служащих для генерации фрактальных изображений.

В физике фракталы естественным образом возникают при моделировании нелинейных процессов, таких, как турбулентное течение жидкости, сложные процессы диффузии-адсорбции, пламя, облака и т. п. Фракталы используются при моделировании пористых материалов, например, в нефтехимии. В биологии они применяются для моделирования популяций и для описания систем внутренних органов (система кровеносных сосудов).

Фракталы затрагивают все сферы математики: существуют геометрические, алгебраические и стохастические фракталы.

Все фрактальные задачи имеют многомерную обобщающую линию (например, фракталы Серпинского).

В последнее время фракталы все больше находят применение в анализе природы и жизни человека. Например, в г. Перми существует фрактальная методика расчета запасов и технология измерения изреженности границ (применяется при добыче нефти).

Последние лауреаты Филдсовской премии так или иначе связаны с фракталами.

Трудно найти такой раздел современной науки и обыденной жизни, где не могли бы применяться фракталы.