

Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ учащихся
«Прикладные вопросы математики»

Математический анализ

Комплексные числа и фракталы

Куркин Сергей Анатольевич
МОУ «Лицей №1» г. Перми, 11 кл.
Попова Надежда Петровна,
учитель высшей категории

Содержание

Комплексные числа:

Введение-5

История возникновения-6

Понятие и представление комплексных чисел-7

Геометрическое изображение комплексных чисел-8

Формы записи комплексного числа-9

Действия над комплексными числами-9

Уравнение с комплексной переменной-13

Задачи-16

Применение-21

Фракталы:

История появления-23

Фракталы и хаос-24

Классификация-25

Построение-31

Применение-39

Вывод-39

Литература-42

Введение

История развития числа уходит своими корнями в далекое прошлое. На заре цивилизации числа возникли из практических потребностей людей в счете. По мере развития общества развивалось и понятие о числе. Некоторые полагают, что о числах уже все изучено в древности, но сильно ошибаются, не зная о существовании комплексных чисел, позволяющих совершить такую операцию как извлечение корня из отрицательного числа. Комплексные числа и функции от комплексного переменного находят применение во многих вопросах науки и техники.

Цель моего реферата – знакомство с комплексными числами, их свойствами, действиями над ними, и их применение как в математике так и в других науках и в практике. А также познакомиться с удивительной структурой-фракталом.

История возникновения комплексных чисел

Древние греки использовали числа для подсчета предметов, поэтому действительными, настоящими они признавали только натуральные числа. Позже стали применять дроби-числа, составленные из целого числа долей единицы. В практических расчетах дроби применяли в III веке до н. э. в древнем Египте и древнем Вавилоне.

Долгое время полагали, что результат измерения всегда выражается или в виде натурального числа, или в виде отношения таких чисел, то есть дроби. Древнегреческий философ и математик Пифагор учил, что «... элементы чисел являются элементами всех вещей и весь мир в целом является гармонией и числом. Сильнейший удар по этому взгляду был нанесен открытием, сделанным одним из пифагорейцев. Он доказал, что диагональ квадрата несоизмерима со стороной. Отсюда следует, что натуральных чисел и дробей недостаточно, для того чтобы выразить длину диагонали квадрата со стороной 1. Есть основание утверждать, что именно с этого открытия начинается эра теоретической математики: открыть существование несоизмеримых величин с помощью опыта, не прибегая к абстрактному рассуждению, было невозможно.

Следующим важным этапом в развитии понятия о числе было введение отрицательных чисел – это было сделано китайскими математиками за два века до н. э. Отрицательные числа применяли в III веке древнегреческий математик Диофант и в VII веке эти числа уже подробно изучили индийские ученые. Уже в VIII веке было установлено, что квадратный корень из положительного числа имеет два значения – положительное и отрицательное, а из отрицательных чисел квадратный корень извлекать нельзя.

В XVI веке в связи с изучением кубических уравнений оказалось необходимым извлекать квадратные корни из отрицательных чисел. Формула решения кубических уравнений вида $x^3 + px + q = 0$ безотказно действует в случае, когда уравнение имеет один действительный корень ($x^3 + 3x - 4 = 0$), а если оно имеет три действительных корня ($x^3 - 7x + 6 = 0$), то под знаком квадратного корня оказывалось отрицательное число. Именно из-за этого противоречия появился термин «мнимое число, мнимая часть», а за ним и само «комплексное число».

Итальянский алгебраист Дж. Кардано в 1545 г. Предложил ввести числа новой природы. Он показал, что система уравнений $\begin{cases} x + y = 10 \\ x \cdot y = 40 \end{cases}$, не имеющая решений во множестве действительных чисел, имеет решения вида $x = 5 \pm \sqrt{-15}$, $y = 5 \mp \sqrt{-15}$, нужно только условиться действовать над такими выражениями по правилам обычной алгебры и считать что $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} = -a$. Кардано называл такие величины «чисто отрицательными».

и даже “софистически отрицательными”, считал их бесполезными и старался их не

употребить. В самом деле, с помощью таких чисел нельзя выразить ни результат измерения какой-нибудь величины, ни изменение какой-нибудь величины. Но уже в 1572 году вышла книга итальянского алгебраиста Р. Бомбелли, в которой были установлены первые правила арифметических операций над такими числами, вплоть до извлечения из них кубических корней. Название “*мнимые числа*” ввел в 1637 году французский математик и философ Р. Декарт, а в 1777 году один из крупнейших математиков XVIII века – Л. Эйлер предложил использовать первую букву французского слова *imaginaire* (мнимый) для обозначения числа $\sqrt{-1}$ (мнимой единицы). Этот символ вошел во всеобщее употребление благодаря К. Гауссу. Термин “*комплексные числа*” так же был введен Гауссом в 1831 году. Слово комплекс (от латинского *complexus*) означает связь, сочетание, совокупность понятий, предметов, явлений и т. Д. Образующих единое целое.

Понятие и представления комплексных чисел

Комплексным числом z называется выражение вида $z=a+ib$, где a и b – действительные числа, а i – мнимая единица, $i^2=-1$.

Если $a=0$, то число чисто мнимое, а если $b=0$ то число отождествляется с действительным числом x , а это значит, что множество R всех действительных чисел является подмножеством множества C всех комплексных чисел.

Число a называют действительной частью, а b – мнимой частью.

Два комплексных числа $z_1=a+ib$ и $z_2=a+ib$ равны тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны мнимые части.

Два комплексных числа $z=a+ib$ и $z'=a-ib$ называются сопряженными.

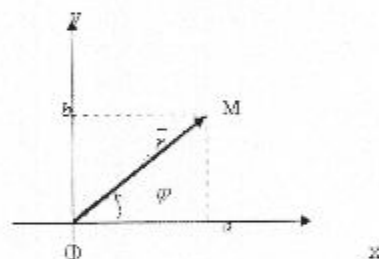
Геометрическое изображение комплексных чисел

Действительные числа можно изобразить точками прямой линии. Каждая точка S числовой прямой изображает некоторое действительное число.

Таким образом, на числовой прямой не остаётся места для комплексных чисел.

Но комплексные числа можно изобразить на числовой прямой. Для этого мы выбираем на плоскости прямоугольную систему координат с одним и тем же масштабом на обеих осях. Комплексное число $a + bi$ мы изображаем точкой M , у которой абсцисса x равна абсциссе a комплексного, а ордината y равна ординате b комплексного числа.

Такая координатная плоскость называется **комплексной плоскостью**. Ось абсцисс называется **действительной осью**, т.к. на ней расположены точки соответствующие действительным числам. Ось ординат называется **мнимой осью** — на ней лежат точки, соответствующие мнимым комплексным числам.



Модулем комплексного числа $z = a + ib$ называется длина вектора, соответствующего этому числу; $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$. *Аргументом* комплексного числа $z \neq 0$ называется величина угла φ между положительным направлением действительной оси и вектором $\vec{z}$.

$$\varphi = \arg z; \quad \text{Arg } z = \varphi + 2\pi k;$$

Формы записи комплексного числа

Запись числа z в виду $z=a+i*b$ называют *алгебраической* формой записи комплексного числа.

Модуль r и аргумент φ комплексного числа можно рассматривать как полярные координаты вектора $r=OM$, изображающего комплексное число $z=x+i*y$. Тогда получаем $a=r*\cos(\varphi)$, $b=r*\sin(\varphi)$. Следовательно, комплексное число $z=x+i*y$ можно записать в виде $z=r*\cos(\varphi)+i*r*\sin(\varphi)$.

$$Z=r(\cos(\varphi)+i*\sin(\varphi)).$$

Такая запись называется *тригонометрической*.

$$\text{Модуль } r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

Используя формулу Эйлера $e^{i*\varphi}=\cos\varphi+i*\sin\varphi$,

Комплексное число $Z=r(\cos(\varphi)+i*\sin(\varphi))$ можно записать в так называемой показательной форме:

$$Z=r*e^{i*\varphi}.$$

Сложение и умножение комплексных чисел

Суммой двух комплексных чисел $A+By\cdot I$ и $C+D\cdot I$ называется комплексное число $(A+C) + (B+D)\cdot I$, т.е. $(A+B\cdot i) + (C+D\cdot i)=(A+C) + (B+D)\cdot i$

Произведением двух комплексных чисел $A+B\cdot I$ и $C+D\cdot I$ называется комплексное число $(A\cdot C - B\cdot D)+(A\cdot D+B\cdot C)\cdot I$, т.е.

$$(A + B\cdot i)\cdot(C + D\cdot i)=(A\cdot C - B\cdot D) + (A\cdot D + B\cdot C)\cdot i$$

Из формул вытекает, что сложение и умножение можно выполнять по правилам действий с многочленами, считая $i^2=-1$. Операции сложения и умножения комплексных чисел обладают свойствами действительных чисел. Основные свойства:

Переместительное свойство:

$$Z_1+Z_2=Z_2+Z_1, \quad Z_1\cdot Z_2=Z_2\cdot Z_1$$

Сочетательное свойство:

$$(Z_1+Z_2)+Z_3=Z_1+(Z_2+Z_3), \quad (Z_1\cdot Z_2)\cdot Z_3=Z_1\cdot(Z_2\cdot Z_3)$$

Распределительное свойство:

$$Z_1\cdot(Z_2+Z_3)=Z_1\cdot Z_2+Z_1\cdot Z_3$$

Примеры:

$$(-2 + 5i) + (4 - 8i) = 2 - 3i$$

$$(3 + 0i) + (7 + 0i) = 10 + 0i$$

$$(0 + 3i) + (0 + 5i) = 0 + 8i = 8i$$

$$(-3 + 3i) + (-2 - 3i) = -5$$

$$(-21 + 3i) - (20 + 7i) = -41 - 4i$$

$$(12 + 5i) + (-12 - 5i) = 0$$

$$(-5 + 3i) \cdot (7i) = -35 + 21i$$

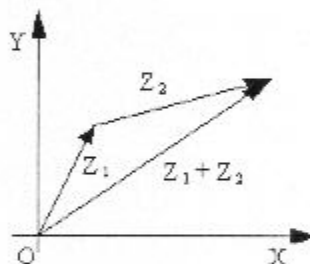
$$(-3 + 2i) \cdot (7 + i) = -23 + 11i$$

$$(4 + i) \cdot (4 - i) = 17$$

$$(4 + i) \cdot (-3) = -12 - 3i$$

Геометрическое изображение суммы комплексных чисел

Согласно определению сложения двух комплексных чисел, действительная часть суммы равна сумме действительных частей слагаемых, мнимая часть суммы равна сумме мнимых частей слагаемых. Точно также определяются координаты суммы векторов:



Сумма двух векторов с координатами $(A_1; B_1)$ и $(A_2; B_2)$ есть вектор с координатами $(A_1 + A_2; B_1 + B_2)$. Поэтому, чтобы найти вектор, соответствующий сумме комплексных чисел Z_1 и Z_2 нужно сложить векторы, соответствующие комплексным числам Z_1 и Z_2 .

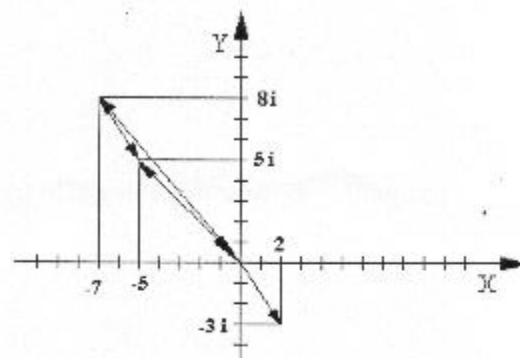
Пример: Найти сумму и произведение комплексных чисел $Z_1 = 2 - 3i$ и $Z_2 = -7 + 8i$.

1 Способ:

$$Z_1 + Z_2 = 2 - 7 + (-3 + 8)i = -5 + 5i$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (2 - 3i) \cdot (-7 + 8i) = -14 + 16i + 21i + 24 = 10 + 37i$$

2 Способ:



Вычитание и деление комплексных чисел

Вычитание комплексных чисел – это операция, обратная сложению: для любых комплексных чисел Z_1 и Z_2 существует, и притом только одно, число Z , такое, что:

$$Z + Z_2 = Z_1$$

Если к обеим частям равенства прибавить $(-Z_2)$ противоположное числу Z_2 :

$$Z + Z_2 + (-Z_2) = Z_1 + (-Z_2), \text{ откуда}$$

$$Z = Z_1 - Z_2$$

Число $Z = Z_1 - Z_2$ называют разностью чисел Z_1 и Z_2 .

Деление вводится как операция, обратная умножению:

$$Z \cdot Z_2 = Z_1$$

Разделив обе части на Z_2 , получим:

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2}$$

Из этого уравнения видно, что $Z_2 \neq 0$

Примеры:

$$(-4 + 2i) - (3 - 5i) = -7 + 7i$$

$$(3 + 2i) - (-4 + 2i) = 7 + 0i = 6$$

$$(2 + 3i) - (6 - 7i) = -4 + 10i$$

$$(2 + i) - (5 - 3i) = -3 + 4i$$

$$2i - (-4 + i) = 4 + i$$

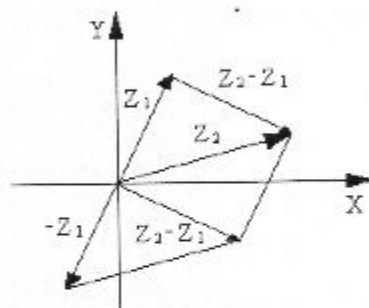
$$(2 + i) - (2 - 7i) = 8i$$

$$(-4 + i)/(1 - i) = (-4 + i) \cdot (1 + i) / (1 - i)(1 + i) = (-5 - 3i)/2 \quad (7 + 2i)/i = 2 - 7i$$

Геометрическое изображение разности комплексных чисел

Разности $Z_2 - Z_1$

комплексных чисел Z_1 и Z_2 , соответствует разность векторов, соответствующих числам Z_1 и Z_2 . Модуль $|Z_2 - Z_1|$ разности двух комплексных чисел Z_2 и Z_1 по определению модуля есть длина вектора $Z_2 - Z_1$. Построим этот вектор, как сумму векторов Z_2 и $(-Z_1)$. Таким образом, модуль разности двух комплексных чисел есть расстояние между точками комплексной плоскости, которые соответствуют этим числам.



Это важное геометрическое истолкование модуля разности двух комплексных чисел позволяет с успехом использовать простые геометрические факты.

Пример: Даны комплексные числа $Z_1 = 4 + 5i$ и $Z_2 = 3 + 4i$. Найти разность $Z_2 - Z_1$ и частное $\frac{Z_2}{Z_1}$

$$Z_2 - Z_1 = (3 + 4i) - (4 + 5i) = -1 - i$$

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{4 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{16 + 25} + i \frac{4 \cdot 4 - 3 \cdot 5}{16 + 25} = \frac{32}{41} + \frac{1}{41}i$$

Возведение в степень

$$z^n = r^n (\cos(n \cdot \varphi) + i \sin(n \cdot \varphi))$$

Квадратное уравнение с комплексной переменной

Рассмотрим уравнение $Z^2 = a$, где a – заданное действительное число,
 Z – неизвестное.

Это уравнение:

имеет один корень, если $a = 0$.

имеет два действительных корня $Z_{1,2} = \pm \sqrt{a}$, если $a > 0$.

не имеет действительных корней, если $a < 0$. Но имеет два комплексных
корня.

Запишем число a в виде $a = (-1) \cdot (-a) = i^2 \cdot |a| = i^2 \cdot (\sqrt{|a|})^2$. Тогда уравнение
 $Z^2 = a$ запишется в виде:

$$Z^2 - i^2 (\sqrt{|a|})^2 = 0$$

т.е.

$$(Z - i \sqrt{|a|})(Z + i \sqrt{|a|}) = 0$$

Следовательно, уравнение имеет два корня: $Z_{1,2} = \pm i \sqrt{|a|}$

Введенное понятие корня из отрицательного числа позволяет записать
корни любого квадратного уравнения с действительными коэффициентами

$$a \cdot Z^2 + b \cdot Z + c = 0$$

По общей формуле

$$Z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Итак, при любых действительных $a(a \neq 0)$, b , c корни уравнения можно
находить по формуле 10. При этом если дискриминант, т.е. подкоренное вы-
ражение в формуле 10

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

положителен, то уравнение $a \cdot Z^2 + b \cdot Z + c = 0$ два действительных раз-
личных корня. Если $D = 0$, то уравнение $a \cdot Z^2 + b \cdot Z + c = 0$ имеет один корень.

Если $D < 0$, то уравнение $a \cdot Z^2 + b \cdot Z + c = 0$ имеет два различных комплексных корня.

Комплексные корни квадратного уравнения обладают такими же свойствами, как и известные нам свойства действительных корней.

Сформулируем основные из них:

Пусть Z_1, Z_2 – корни квадратного уравнения $a \cdot Z^2 + b \cdot Z + c = 0$, $a \neq 0$. Тогда справедливы свойства:

Теорема Виета: $Z_1 + Z_2 = -\frac{b}{a}$

$$Z_1 \cdot Z_2 = \frac{c}{a}$$

При всех комплексных Z справедлива формула
 $a \cdot Z^2 + b \cdot Z + c = a \cdot (Z - Z_1) \cdot (Z - Z_2)$

Пример 1:

$$Z^2 - 6 \cdot Z + 10 = 0$$

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 10 = -4$$

$$-4 = i^2 \cdot 4$$

$$Z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a}$$

$$Z_{1,2} = \frac{6 \pm 2 \cdot i}{2} = 3 \pm i$$

Ответ: $Z_1 = Z_2 = 3 + i$

Пример 2:

$$3 \cdot Z^2 + 2 \cdot Z + 1 = 0$$

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$D = 4 - 12 = -8$$

$$D = -1 \cdot 8 = 8 \cdot i^2$$

$$Z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a} = \frac{-2 \pm i \cdot \sqrt{8}}{6} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2} \cdot i}{6}$$

$$Z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{2} \cdot i}{3}$$

$$Z_1 = -\left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot i\right)$$

$$Z_2 = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot i$$

$$\text{Ответ: } Z_1 = Z_2 = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot i$$

Пример 3:

$$Z^4 - 8 \cdot Z^2 - 9 = 0$$

$$Z^2 = t$$

$$t^2 - 8 \cdot t - 9 = 0$$

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 64 + 36 = 100$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a} = \frac{8 \pm 10}{2} = 4 \pm 5$$

$$t_1 = 9$$

$$Z^2 = 9$$

$$Z_{1,2} = \pm 3$$

$$t_2 = -1$$

$$Z^2 = -1$$

$$Z = \sqrt{i^2}$$

$$Z_{3,4} = \pm i$$

$$\text{Ответ: } Z_{1,2} = \pm 3, \quad Z_{3,4} = \pm i$$

Пример 4:

$$Z^4 + 2 \cdot Z^2 - 15 = 0$$

$$Z^2 = t$$

$$t^2 + 2 \cdot t - 15 = 0$$

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 4 + 60 = 64$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a} = \frac{-2 \pm 8}{2} = -1 \pm 4$$

$$t_1 = -5$$

$$Z^2 = -5$$

$$Z^2 = -1 \cdot 5$$

$$Z^2 = i^2 \cdot 5$$

$$Z_{1,2} = \pm i \cdot \sqrt{5}$$

$$t_2 = 3$$

$$Z^2 = 3$$

$$Z_{3,4} = \pm \sqrt{3}$$

$$\text{Ответ: } Z_{1,2} = \pm i \cdot \sqrt{5}, \quad Z_{3,4} = \pm \sqrt{3}$$

Пример 5:

$$Z^2 = 24 - 10 \cdot i$$

$$\text{Пусть } Z = X + Y \cdot i$$

$$(X + Y \cdot i)^2 = X^2 + 2 \cdot X \cdot Y \cdot i - Y^2$$

$$X^2 + 2 \cdot X \cdot Y \cdot i - Y^2 = 24 - 10 \cdot i$$

$$(X^2 - Y^2) + 2 \cdot X \cdot Y \cdot i = 24 - 10 \cdot i$$

$$\begin{cases} X^2 - Y^2 = 24 \\ 2 \cdot X \cdot Y = -10 \end{cases}$$

$$Y = -\frac{10}{2 \cdot X} = -\frac{5}{X}$$

$$X^2 - \frac{25}{X^2} = 24$$

$$\frac{X^4 - 24 \cdot X^2 - 25}{X^2} = 0 \text{ умножим на } X^2 \neq 0$$

$$X^4 - 24 \cdot X^2 - 25 = 0$$

$$X^2 = t$$

$$t^2 - 24t - 25 = 0$$

$$t_1 \cdot t_2 = -25$$

$$t_1 + t_2 = 24$$

$$t_1 = 25 \quad t_2 = -1$$

$$X^2 = 25 \quad X^2 = -1 \text{ — нет решений}$$

$$X_{1,2} = \pm 5$$

$$X_1 = 5$$

$$X_2 = -5$$

$$Y_1 = -\frac{5}{5}$$

$$Y_2 = \frac{-5}{-5}$$

$$Y_1 = -1$$

$$Y_2 = 1$$

Тогда:

$$Z_{1,2} = \pm(5 - i)$$

$$\text{Ответ: } Z_{1,2} = \pm(5 - i)$$

Задачи:

1) Запишите z в алгебраической форме, если

$$a) \quad z = \frac{(1-i)(2i-1) + 4i + 1}{(2i-1)(3-2i) + (1+i)^2}$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1-i)(2i-1) + 4i + 1}{(2i-1)(3-2i) + (1+i)^2} = \frac{2 - 1 + 2i + i + 4i + 1}{4 - 3 + 2i + 6i - 1 + 1 + 2i} = \frac{2 + 7i}{1 + 10i} = \\ &= \frac{(2 + 7i)(1 - 10i)}{(1 + 10i)(1 - 10i)} = \frac{70 + 2 - 20i + 7i}{1 + 100} = \frac{72 - 13i}{101} = \frac{72}{101} - \frac{13}{101}i \end{aligned}$$

$$b) \quad z = \frac{3-4i}{3+4i} - \frac{3+4i}{3-4i}$$

$$z = \frac{3-4i}{3+4i} - \frac{3+4i}{3-4i} = \frac{9 - 24i - 16 - (9 + 24i - 16)}{9 + 16} = \frac{9 - 24i - 16 - 9 - 24i + 16}{25} = -\frac{48}{25}i$$

2) Запишите решения системы в алгебраической форме.

$$a) \begin{cases} z_1 - 3z_2 = i, \\ 2z_1 + z_2 = 1. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{aligned} \begin{cases} z_1 - 3z_2 = i, \\ 2z_1 + z_2 = 1. \end{cases} & \quad + \begin{cases} z_1 - 3z_2 = i, \\ 6z_1 + 3z_2 = 3. \end{cases} \quad - \begin{cases} 2z_1 - 6z_2 = 2, \\ 2z_1 + z_2 = 1. \end{cases} \\ \begin{cases} z_1 - 3z_2 = i, \\ 2z_1 + z_2 = 1. \end{cases} & \quad \begin{cases} 7z_1 = 3 + i, \\ z_1 = \frac{3}{7} + \frac{1}{7}i. \end{cases} \quad \begin{cases} -7z_2 = -1 + 2i, \\ z_2 = \frac{1}{7} - \frac{2}{7}i. \end{cases} \end{aligned}$$

$$b) \begin{cases} z_1 + 2z_2 = 1 + i, \\ 3z_1 + iz_2 = 2 - 3i. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{aligned} \begin{cases} z_1 + 2z_2 = 1 + i, \\ 3z_1 + iz_2 = 2 - 3i. \end{cases} & \quad \begin{cases} 3z_1 + 6z_2 = 3 + 3i, \\ 3z_1 + iz_2 = 2 - 3i. \end{cases} \quad z_2 = \frac{(1+6i)(6+i)}{(6-i)(6+i)} = \frac{6+36i+i-6}{36+1} = \frac{37}{37}i = i; \\ & \quad (6-i)z_2 = 1+6i, \quad z_1 = 1+i-2z_2 = 1+i-2i = 1-i. \end{aligned}$$

$$3) \begin{cases} X^2 + 3 \cdot X \cdot Y + Y^2 = 6 \\ X + Y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X^2 + 3 \cdot X \cdot Y + Y^2 = 6 \\ X = 2 - Y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (2-Y)^2 + 3 \cdot (2-Y) \cdot Y + Y^2 &= 6 \\ 4 - 4Y + Y^2 + 6Y - 3Y^2 + Y^2 &= 6 \\ -Y^2 + 2Y - 2 &= 0 \quad / \cdot (-1) \\ Y^2 - 2Y + 2 &= 0 \\ D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 4 - 8 &= -4 \\ -4 = -1 \cdot 4 = 4 \cdot i^2 \end{aligned}$$

$$Y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a} = \frac{2 \pm 2 \cdot i}{2} = 1 \pm i$$

$$Y_1 = 1 - i$$

$$Y_2 = 1 + i$$

$$X_1 = 1 + i$$

$$X_2 = 1 - i$$

Ответ: $\begin{bmatrix} 1 + i; 1 - i \\ 1 - i; 1 + i \end{bmatrix}$

4) Доказать, что сумма двух комплексных чисел не превосходит сумму модулей этих чисел.

1 СПОСОБ:

Пусть $Z_1 = X + Y \cdot i$ и $Z_2 = U + V \cdot i$

Доказать что:

$$(X + U) + (Y + V) \cdot i \leq |X + Y \cdot i| + |U + V \cdot i|$$

$$|Z| = |A + B \cdot i| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

Докажем методом от противного:

$\sqrt{(X + U)^2 + (Y + V)^2} > \sqrt{X^2 + Y^2} + \sqrt{U^2 + V^2}$ / т.к. корень существует только из неотрицательного числа, то можно возвести в квадрат обе части неравенства.

$$X^2 + 2 \cdot X \cdot U + U^2 + Y^2 + 2 \cdot Y \cdot V + V^2 > X^2 + Y^2 + U^2 + V^2 + 2 \cdot \sqrt{(X^2 + Y^2) \cdot (U^2 + V^2)}$$

$$2 \cdot (X \cdot U + Y \cdot V) > 2 \cdot \sqrt{(X^2 + Y^2) \cdot (U^2 + V^2)}$$

Если мы предположили верно, то $X \cdot U + Y \cdot V > 0$, а поэтому возведем в квадрат:

$$X^2 \cdot U^2 + 2 \cdot X \cdot U \cdot Y \cdot V + Y^2 \cdot V^2 > X^2 \cdot U^2 + X^2 \cdot V^2 + Y^2 \cdot U^2 + Y^2 \cdot V^2$$

$$2 \cdot X \cdot Y \cdot V \cdot U > X^2 \cdot V^2 + Y^2 \cdot U^2$$

$$X^2 \cdot V^2 + Y^2 \cdot U^2 + 2 \cdot X \cdot Y \cdot V \cdot U < 0$$

$$(X \cdot V + Y \cdot U)^2 < 0$$

Это невозможно, т.к. $A^2 \geq 0$, значит полученное нами неравенство неверно.

$$(X + U) + (Y + V) \cdot i \leq |X + Y \cdot i| + |U + V \cdot i|$$

что и требовалось доказать

2 СПОСОБ:

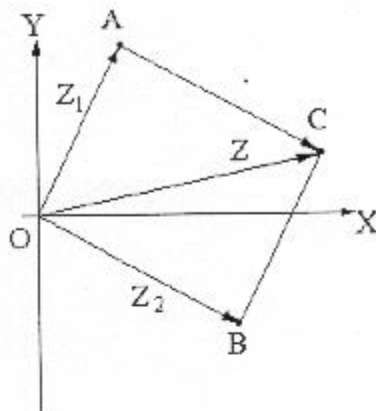
Пусть Z_1 и Z_2 — два произвольных комплексных числа. Z_1 — соответствует точке A, Z_2 — соответствует точке B.

В силу неравенства треугольника

$$\vec{OC} \leq \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OA} + \vec{OB} \quad \text{т.е.}$$

$$|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$$

Что и требовалось доказать.



5) Пусть $|z| = 0,5$, $\arg z = \frac{\pi}{4}$. Найдите модуль и один из аргументов числа $32z^4 + 2\sqrt{3}i$.

Решение

$$z = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$32z^4 = 32 \cdot \frac{1}{16} (\cos \pi + i \sin \pi) = -2$$

$$32z^4 + 2\sqrt{3}i = -2 + 2\sqrt{3}i$$

$$r = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

$$\alpha = \arctg \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}, \varphi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

Ответ: $r = 4, \varphi = \frac{2\pi}{3}$

6) решить

$$\left| \frac{2z + \bar{z}}{z + 2} \right| = 1$$

$$z = x + yi$$

$$|2z + \bar{z}| = |z + 2\bar{z}|$$

$$|2(x + yi) + x - yi| = |x + yi + 2\bar{z}|$$

$$|3x + yi| = |x + (y + 2)\bar{z}|$$

$$9x^2 + y^2 = x^2 + (y + 2)^2$$

$$9x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 4y + 4$$

$$8x^2 - 4y - 4 = 0$$

$$2x^2 - y - 1 = 0$$

$$y = 2x^2 - 1$$

7) Множество E состоит из всех комплексных чисел z , таких, что, $3|\bar{z}| = |z - 8 + 4i|$. Найдите все такие числа z_0 , что для любых z_1 и z_2 из E $|z_1 - z_0| = |z_2 - z_0|$

Решение

$$z = x + yi$$

$$3|x - yi| = |x + yi - 8 + 4i|$$

$$3\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x + 4)^2 + (y - 8)^2}$$

$$9x^2 + 9y^2 = (x + 4)^2 + (y - 8)^2$$

$$9x^2 - x^2 - 8x - 16 + 9y^2 - y^2 + 16y - 64 = 0$$

$$8x^2 - 8x - 16 + 8y^2 + 16y - 64 = 0$$

$$x^2 - x - 2 + y^2 + 2y - 8 = 0$$

$$(x - \frac{1}{2} \cdot 2x + \frac{1}{4}) + \frac{1}{4} + (y^2 + 2y + 1) - 9 - 2 = 0$$

$$(x - 0,5)^2 + (y + 1)^2 = 11,25$$

Окружность с центром (0,5; -1)

Ответ: $z_0 = 0,5 - i$

$$8) |z - 2i| \leq 1$$

Решение

$$z = x + yi$$

$$|x + yi - 2i| \leq 1$$

$$|x + (y - 2)i| \leq 1$$

Круг с центром (0;2) R=1

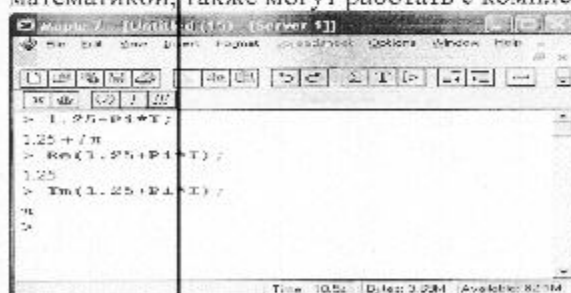
Для чего нужны комплексные числа.

Сегодня сложно себе представить ряд наук, обходящихся без применения комплексных чисел. Такие области, как самолётостроение и радиотехника, электротехника и электромеханика, компьютерное программирование и экономика невозможны без применения моделей в виде комплексных чисел. Комплексные числа, несмотря на их "лживость" и недействительность, имеют очень широкое применение. Они играют значительную роль не только в математике, а также в таких науках, как физика, химия. В настоящее время комплексные числа активно используются в электромеханике, компьютерной и космической индустрии.

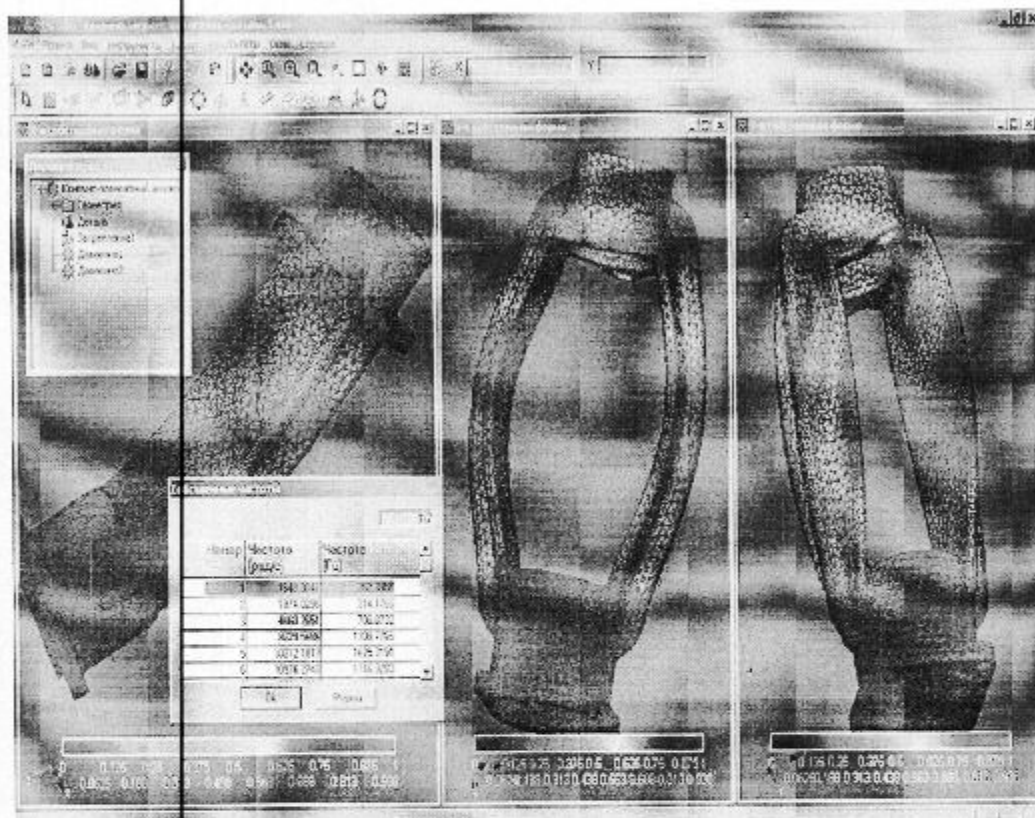
Комплексные числа сами по себе являются мощным инструментом в решении многих математических задач, справиться с которыми посредством действительных чисел слишком сложно.

В настоящее время на путях обобщения понятия числа пришли к понятию гиперкомплексных чисел. Понятие гиперкомплексного числа шире, чем понятие комплексных чисел. Простейшим примером гиперкомплексных чисел являются кватернионы, которые дали толчок развитию алгебры векторов, применяемой в современной физике и технике, в частности, в теории электричества и электротехники, в динамике, аэродинамике и теории упругости.

Электронные математические системы, такие как Maple, используемые серьезными лабораториями или кафедрами вузов для работы с символьной математикой, также могут работать с комплексными числами:



Использование комплексных чисел в описании физических свойств создаваемого 3D объект



Комплексные числа очень связаны с фракталами, о которых написано ниже. Например, с помощью математических выражений, содержащих комплексные числа, можно описать структуру фракталов.

Фракталы

Фракталы вокруг нас

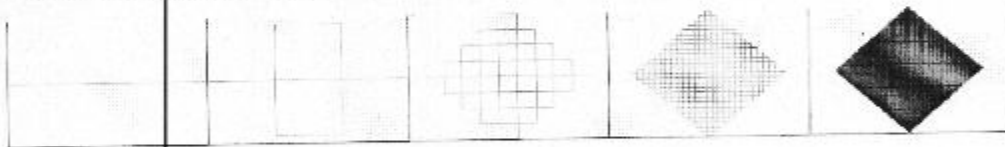
*Математика,
если на нее правильно по-
смотреть,
отражает не только истину,
но и несравненную красоту.*

Берtrand Рассел.

Горы, облака, кора дерева - все это выходит за рамки привычной евклидовой геометрии. Мы не можем описать камень или границы острова с помощью прямых, кружков и треугольников. И здесь нам приходят на помощь фракталы.

ИСТОРИЯ ПОЯВЛЕНИЯ

Первые идеи фрактальной геометрии возникли в 19 веке. Кантор с помощью простой рекурсивной (повторяющейся) процедуры превратил линию в набор несвязанных точек (так называемая Пыль Кантора). Он брал линию и удалял центральную треть и после этого повторял то же самое с оставшимися отрезками. Пеано нарисовал особый вид линии (рисунок 1). Для ее рисования Пеано использовал следующий алгоритм.



На первом шаге он брал прямую линию и заменял ее на 9 отрезков длиной в 3 раза меньшей, чем длина исходной линии (Часть 1 и 2 рисунка 1). Далее он делал то же самое с каждым отрезком получившейся линии. И так до бесконечности. Ее уникальность в том, что она заполняет всю плоскость. Доказано, что для каждой точки на плоскости можно найти точку, принадлежащую линии Пеано. Кривая Пеано и пыль Кантора выходили за рамки обычных геометрических объектов. Они не имели четкой размерности. Пыль Кантора строилась вроде бы на основании одномерной прямой, но состояла из точек (размерность 0). А кривая Пеано строилась на основании одномерной линии, а в результате получалась плоскость. Во многих других областях науки появлялись задачи, решение которых приводило к странным результатам, на подобие описанных выше (Броуновское движение, цены на акции).

БЕНУА МАНДЕЛЬБРОТ - ОТЕЦ ФРАКТАЛОВ

Вплоть до 20 века шло накопление данных о таких странных объектах, без какой либо попытки их систематизировать. Так было, пока за них не

взялся Бенуа Мандельброт - отец современной фрактальной геометрии и слова фрактал. Работая в IBM математическим аналитиком, он изучал шумы в электронных схемах, которые невозможно было описать с помощью статистики. Постепенно сопоставив факты, он пришел к открытию нового направления в математике - фрактальной геометрии.

Что же такое фрактал. Сам Мандельброт вывел слово *Fractal* от латинского слова *fractus*, что означает разбитый (поделенный на части). И одно из определений фрактала - это геометрическая фигура, состоящая из частей и которая может быть поделена на части, каждая из которых будет представлять уменьшенную копию целого (по крайней мере, приблизительно).

Чтобы представить себе фрактал понаглядней рассмотрим пример: "Какова длина берега Британии?". Ответ на этот вопрос не так прост, как кажется. Все зависит от длины инструмента, которым мы будем пользоваться. Померив, берег с помощью километровой линейки, мы получим какую-то длину. Однако мы пропустим много небольших заливчиков и полуостровов, которые по размеру намного меньше нашей линейки. Уменьшив размер линейки до, скажем, 1 метра - мы учтем эти детали ландшафта и, соответственно длина берега станет больше. Пойдем дальше и измерим длину берега с помощью миллиметровой линейки, мы тут учтем детали, которые больше миллиметра, длина будет еще больше. В итоге ответ на такой, казалось бы, простой вопрос может поставить в тупик кого угодно - длина берега Британии бесконечна.

ФРАКТАЛЫ И ХАОС

Фракталы всегда ассоциируются со словом хаос. Я лично, определил бы фракталы, как частички хаоса. Фракталы проявляют хаотическое поведение, благодаря которому они кажутся такими беспорядочными и случайными. Но если взглянуть достаточно близко, можно увидеть много аспектов самоподобия внутри фрактала. Например, посмотрите на дерево, затем выберите определенную ветку и изучите ее поближе. Теперь выберите связку из нескольких листьев. Для ученых, занимающихся фракталами, все эти три объекта представляются идентичными.

Слово хаос паводит большинство людей на мысли о чем-то беспорядочном и непредсказуемом. На самом деле, это не совсем так. Хаос, в действительности, достаточно упорядочен и подчиняется определенным законам. Проблема состоит в том, что отыскание этих законов может быть очень сложным. Цель изучения хаоса и фракталов — предсказать закономерность в системах, которые могут казаться непредсказуемыми и абсолютно хаотическими.

Система — это набор вещей, или область изучения, причем некоторые из обычных систем, которые хаологи любят изучать включают облачные образования, погода, движение водных потоков, миграции животных, и множест-

во других аспектов из жизни матери природы. Так что, в конце концов, может быть, весь мир вокруг нас фрактален!

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И КЛАССИФИКАЦИЯ ФРАКТАЛОВ

Так вот, когда размерность фигуры получасмой из каких-то простейших объектов (отрезков) больше размерности этих объектов - мы имеем дело с фракталом.

Фракталы делятся на группы. Самые большие группы это:

- геометрические фракталы
- алгебраические фракталы
- системы итерируемых функций
- стохастические фракталы.

Видно, что фрактал Мандельброта и Кривая Коха разные типы фракталов. У них есть общее - рекурсивная процедура при генерации, но есть отличия. Поэтому для их изучения следует разделить их на определенные классы. Одной из общепринятых классификаций является классификация фракталов на геометрические, алгебраические и стохастические (см. таблицу).



ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФРАКТАЛЫ

Именно с них началась история фракталов. Это и есть те функции-монстры, которых так называли за недифференцируемость в каждой точке. Геометрические фракталы являются также самыми наглядными, т.к. сразу видна самоподобность. Вообще все геометрические фракталы обладают самоподобностью, не изменяющейся при изменении масштаба. Для построения геометрических фракталов характерно задание "основы" и "фрагмента", повторяющегося при каждом уменьшении масштаба. Поэтому эти фракталы иногда называют конструктивными или автомоделными.

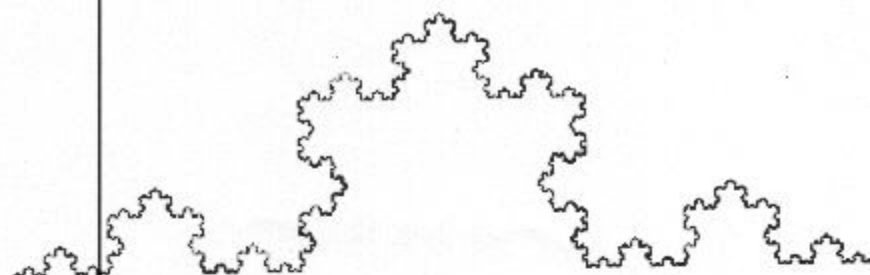


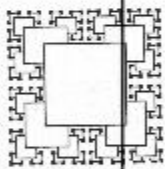
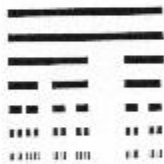
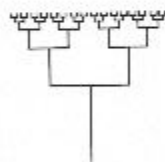
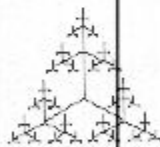
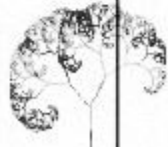
Рис. 2.

Примерами таких фракталов являются Треугольник Серпинского, Снежинка Коха, Кривые Леви и Минковского и многие другие.

В графике геометрические фракталы применяются для получения изображений деревьев, кустов, береговых линий и т.д.

Конструктивные фракталы строятся с помощью рекурсивных процедур, систем итерированных функций, L-систем, и др.

Геометрические фракталы - Рекурсивные процедуры

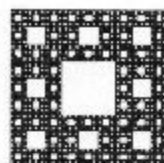
Двумерное множество Кантора	Треугольник Серпинского	Одномерное множество Кантора	Двоичное дерево
			
Троичное дерево	Драконы	Н-дерево	V-дерево
			
Дерево Пифагора	Фрактал Минковского	Прямоугольники	Кривая Гилберта
			
Целующиеся круги	Звездный фрактал	Ковер Серпинского	Треугольное дву-



Паноротник



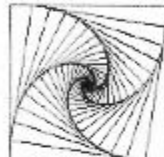
Ветки



Кинескоп



м-мерное множество
Кантора



АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФРАКТАЛЫ

Вторая большая группа фракталов - алгебраические. Свое название они получили, за то, что их строят, используя простые алгебраические формулы. Получают их с помощью нелинейных процессов в n -мерных пространствах. Известно, что нелинейные динамические системы обладают несколькими устойчивыми состояниями. Состояние, в котором окажется динамическая система после некоторого числа итераций, зависит от начальных условий. Поэтому каждое устойчивое состояние (аттрактор) обладает некоторой областью начальных состояний, при которых система обязательно перейдет в рассматриваемые конечные состояния. Таким образом, фазовое пространство разбивается на области притяжения аттракторов.

Самыми известными из них являются множества Мандельброта и Жю-лиа, Бассейны Ньютона и т.д.

Алгебраические фракталы

Множество Ман-
дельброта

Бассейны Ньютона

Паук

Биоморфы



Grothy



Множество Жюлиа



Barnsley Fractal



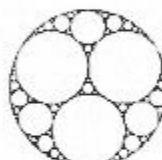
Нелинейные преобразования, Аттракторы

Крест

Дерево

Множество Аполлона

Вихри

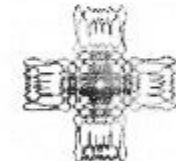
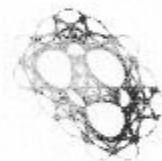


Gingerbreadman

Martin

Hopalong

Chip

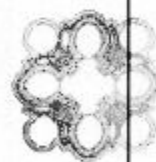


QuadrupTwo

Threeply

Модели ограниченного роста популяции

Аттрактор Лоренца



СТОХАСТИЧЕСКИЕ ФРАКТАЛЫ

Кривая Коха как бы не была похожа на границу берега и не может выступать в качестве ее модели из-за того, что она всюду одинакова, самопо-

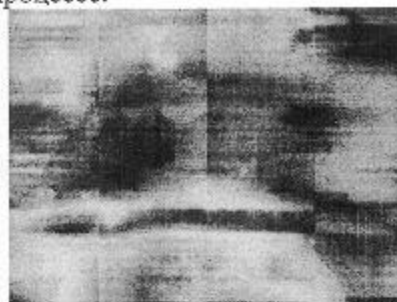
добна, а в действительности это не так. Все природные объекты создаются по капризу природы, и есть случайность в этом процессе.

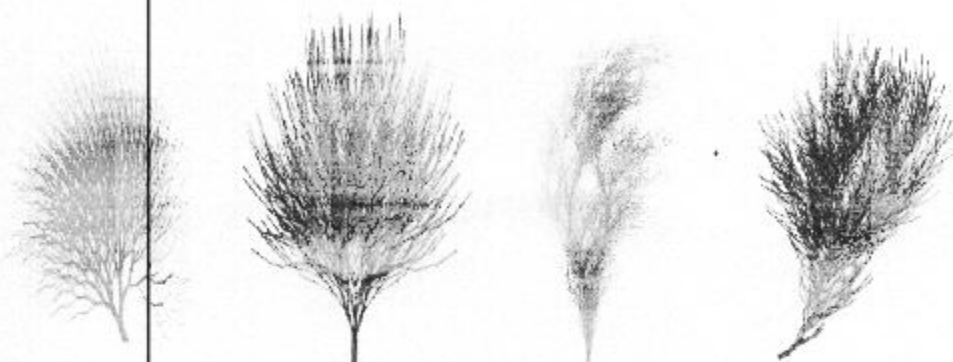
Фракталы, при построении которых в итеративной системе случайным образом изменяются какие-либо параметры, называются стохастическими. Термин "стохастичность" происходит от греческого слова, обозначающего "предположение".

Также примером случайности в природе является броуновское движение. С помощью компьютера такие процессы строить достаточно просто, т.к. он позволяет генерировать последовательности случайных чисел. Эти фракталы используются при моделировании рельефов местности и поверхности морей, процесса электролиза.

Типичный представитель данного класса фракталов "Плазма".

Для ее построения возьмем прямоугольник и для каждого его угла определим цвет. Далее находим центральную точку прямоугольника и раскрашиваем ее в цвет равный среднему арифметическому цветов по углам прямоугольника плюс некоторое случайное число. Чем больше случайное число - тем более "рваным" будет рисунок. Если мы теперь скажем, что цвет точки это высота над уровнем моря - получим вместо плазмы - горный массив. Именно на этом принципе моделируются горы в большинстве программ. С помощью алгоритма, похожего на плазму строится карта высот, к ней применяются различные фильтры, накладываем текстуру и, пожалуйста, фотореалистичные горы готовы.





СИСТЕМЫ ИТЕРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Эта группа фракталов получила широкое распространение благодаря работам Майкла Барнсли из технологического института штата Джорджия.

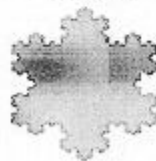
Он пытался кодировать изображения с помощью фракталов. Запатентовав несколько идей по кодированию изображений с помощью фракталов, он основал фирму "Iterated Systems", которая через некоторое время выпустила первый продукт "Images Incorporated", в котором можно было изображения переводить из растровой формы во фрактальную GIF. Это позволяло добиться высоких степеней сжатия. При низких степенях сжатия качество рисунков уступало качеству формата JPEG, но при высоких картинки получались более качественными. В любом случае этот формат не прижился, но работы по его усовершенствованию ведутся до сих пор. Ведь этот формат не зависит от разрешения изображения. Так как изображение закодировано с помощью формул, то его можно увеличить до любых размеров и при этом будут появляться новые детали, а не просто увеличится размер пикселей. Хуже это или лучше - решать надо в каждом отдельном случае.

Простые СИФ – фракталы

Папоротник



Кривая и Острова Коха



Фрактал Леви



Треугольник Серпинского



Если в I-systems (алгебраических фракталах) речь шла о замене прямой линии неким полигоном, то в IFS мы в ходе каждой итерации заменяем некий полигон (квадрат, треугольник, круг) на набор полигонов, каждый из которых подвергнут аффинным преобразованиям. При аффинных преобразованиях

ях исходное изображение меняет масштаб, параллельно переносится вдоль каждой из осей и вращается на некоторый угол.

В результате можно получить потрясающие коэффициенты сжатия. Например, рисунок панорамника кодируется с помощью 28!!! цифр и один и тот же рисунок получается в не зависимости оттого, что взяли за основу - прямоугольник, круг, треугольник или что-либо еще. К сожалению, процесс создания набора коэффициентов для произвольного изображения очень трудоемок и занимает очень много времени.

ПОСТРОЕНИЕ ФРАКТАЛОВ

«Фракталы вокруг нас повсюду, и в очертаниях гор, и в извилистой линии морского берега. Некоторые из фракталов непрерывно меняются, подобно движущимся облакам или мерцающему пламени, в то время как другие, подобно деревьям или нашим сосудистым системам, сохраняют структуру, приобретенную в процессе эволюции»

Х.О. Пайген, П.Х. Рихтер

«Красота фракталов»

САМОПОДОБИЕ

Разделим отрезок прямой на N равных частей. Тогда каждую часть можно считать копией всего отрезка, уменьшенного в $1/r$ раз. Очевидно, N и r связаны отношением $Nr = 1$. Если квадрат разбить на N равных квадратов (с площадью, в $1/r^2$ раз меньше площади исходного), то соотношение запишется как $Nr^2 = 1$. Соответственно, общая формула соотношения запишется в виде: $Nr^d = 1$. (1)

Множества, построенные выше, обладают целой размерностью. Зададимся вопросом, возможно ли такое построение, при котором показатель d в равенстве (1) НЕ является целым, то есть такое, что при разбиении исходного множества на N непересекающихся подмножеств, полученных масштабированием оригинала с коэффициентом r , значение d не будет выражаться целым числом. Ответ – решительное да! Такое множество называется *самоподобным фракталом*. Величину d называют *фрактальной (дробной) размерностью* или *размерностью подобия*. Явное выражение для d через N и r находится логарифмированием обеих частей:

$$d = \frac{\log N}{\log 1/r} \quad (2.)$$

Логарифм можно взять по любому основанию, отличному от единицы, например по основанию 10 или по основанию $e \sim 2,7183$.

СПЕЖИНКА КОХА

Граница снежинки, придуманной Гельгом фон Кохом в 1904 году (рис.1), описывается кривой, составленной из трех одинаковых фракталов размерности $d \sim 1,2618$. Каждая треть снежинки строится итеративно, начиная с одной из сторон равностороннего треугольника. Пусть K_0 — начальный отрезок. Уберем среднюю треть и добавим два новых отрезка такой же длины, как показано на рис.2. Назовем полученное множество K_1 . Повторим данную процедуру многократно, на каждом шаге заменяя среднюю треть двумя новыми отрезками. Обозначим через K_n фигуру, полученную после n -го шага.

Интуитивно ясно, что последовательность кривых K_n при n стремящемся к бесконечности сходится к некоторой предельной кривой K . Рассмотрим некоторые свойства этой кривой.

Если взять копию K , уменьшенную в три раза ($r = 1/3$). То всё множество K можно составить из $N = 4$ таких копий. Следовательно, отношение самоподобия (1) выполняется при указанных N и r , а размерность фрактала будет: $d = \log(4)/\log(3) \sim 1,2618$

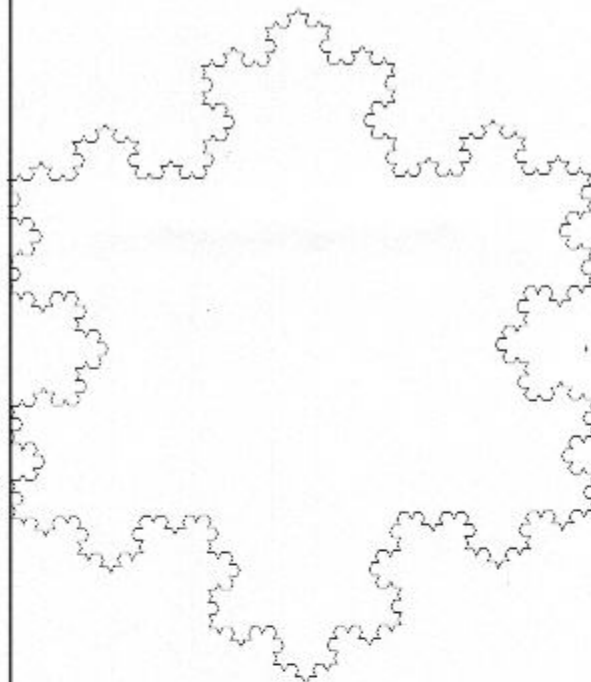
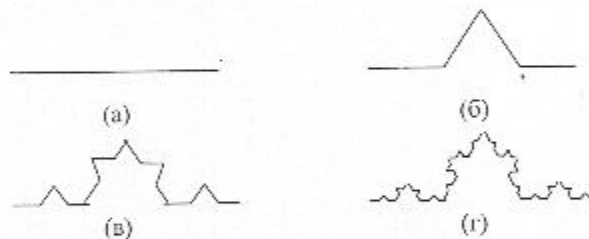


Рис.2 Построение снежинки Коха.

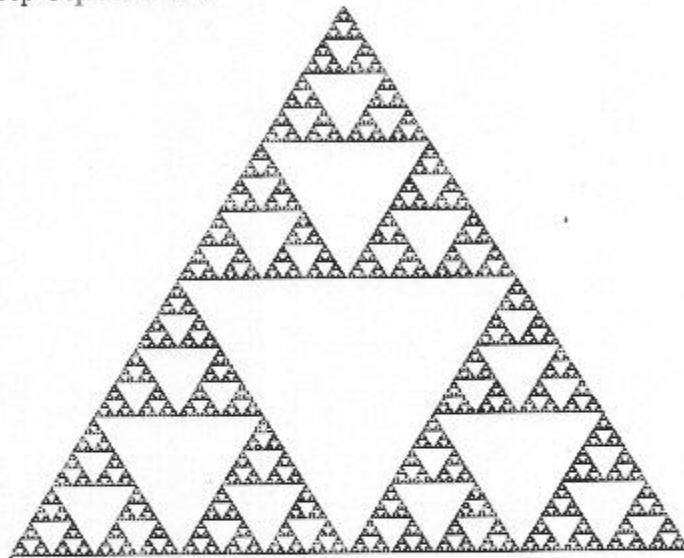


Еще одно важное свойство, которым обладает граница снежинки Коха - ее бесконечная длина. Это может показаться удивительным, потому что мы привыкли иметь дело с кривыми из курса математического анализа. Обычно гладкие или хотя бы кусочно-гладкие кривые всегда имеют конечную длину (в чем можно убедиться интегрированием). Мандельброт в этой связи опубликовал ряд увлекательных работ, в которых исследуется вопрос об измерении длины береговой линии Великобритании. В качестве модели он использовал фрактальную кривую, напоминающую границу снежинки за тем исключением, что в нее введен элемент случайности, учитывающий случайность в природе. В результате оказалось, что кривая, описывающая береговую линию, имеет бесконечную длину.

КОВЕР СЕРПИНСКОГО

Еще один пример простого самоподобного фрактала --- *ковер Серпинского* (рис.3), придуманный польским математиком Вацлавом Серпинским в 1915 году. Сам термин *ковер* (gasket) принадлежит Мандельброту. В способе построения, следующем ниже, мы начинаем с некоторой области и последовательно выбрасываем внутренние подобласти. Позднее мы рассмотрим и другие способы, в частности с использованием L-систем, а также на основе итерированных функций.

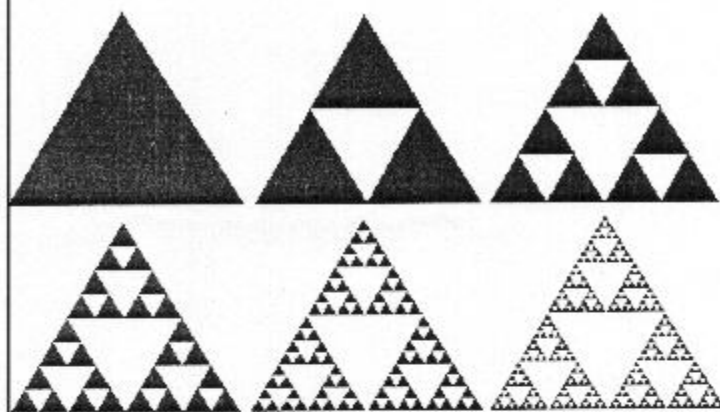
Рис.3 Ковер Серпинского



Пусть начальное множество S_0 --- равносторонний треугольник вместе с областью, которую он замыкает. Разобьем S_0 на четыре меньшие треугольные области, соединив отрезками середины сторон исходного треугольника. Удалим внутренность маленькой центральной треугольной области. Назовем оставшееся множество S_1 (рис.4). Затем повторим процесс для каждого из трех оставшихся маленьких треугольников и получим следующее приближение S_2 . Продолжая таким образом, получим последовательность вложенных множеств S_n , чье пересечение образует ковер S . Из построения видно, что весь ковер представляет собой объединение $N = 3$ существенно не пересекающихся уменьшенных в два раза копий; коэффициент подобия $r = 1/2$ (как по горизонтали, так и по вертикали). Следовательно, S --- самоподобный фрактал с размерностью:

$$d = \log(3)/\log(2) \sim 1,5850.$$

Рис.4 Построение ковра Серпинского



Очевидно, что суммарная площадь частей, выкинутых при построении, в точности равна площади исходного треугольника. На первом шаге мы выбросили $\frac{1}{4}$ часть площади. На следующем шаге мы выбросили три треугольника, причем площадь каждого равна $\frac{1}{4}^2$ площади исходного. Рассуждая, таким образом, мы убеждаемся, что полная доля выкинутой площади составила: $\frac{1}{4} + 3 \cdot (\frac{1}{4}^2) + 3^2 \cdot (\frac{1}{4}^3) + \dots + 3^{n-1} \cdot (\frac{1}{4}^n) + \dots$.

Эта сумма равна 1. Следовательно, мы можем утверждать, что оставшееся множество S , то есть ковер, имеет площадь меры нуль. Это выделяет множество S в разряд «совершенного», в том смысле, что оно разбивает свое дополнение на бесконечное число треугольных областей, обладая при этом нулевой толщиной.

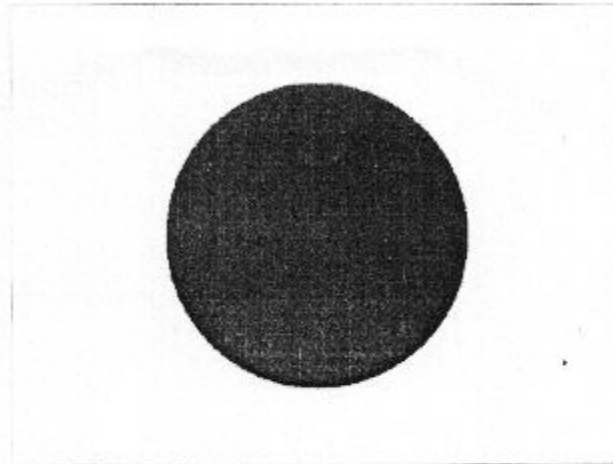
МНОЖЕСТВА МАНДЕЛЬБРОТА И ЖЮЛИА.

Обозначим через $\mathbb{C}$ плоскость комплексных чисел, а через $\overline{\mathbb{C}}$ - риманову сферу $\mathbb{C} \cup \infty$. Рассмотрим процесс $z_{n+1} = z_n^2 + c$, где $z_n \in \overline{\mathbb{C}}$ и $c \in \mathbb{C}$. Выбрав произвольное число z_0 , возведем его в квадрат и прибавим константу c для того, чтобы получить z_1 ; затем повторим вычисления для того, чтобы получить z_2, z_3 , и т.д.

Давайте начнем с простейшего из возможных значений константы c , а именно $c = 0$. Тогда при каждой итерации вычисляется точный квадрат числа: $z_0 \rightarrow z_0^2 \rightarrow z_0^4 \rightarrow K$. В зависимости от значения z_0 имеются три возможности:

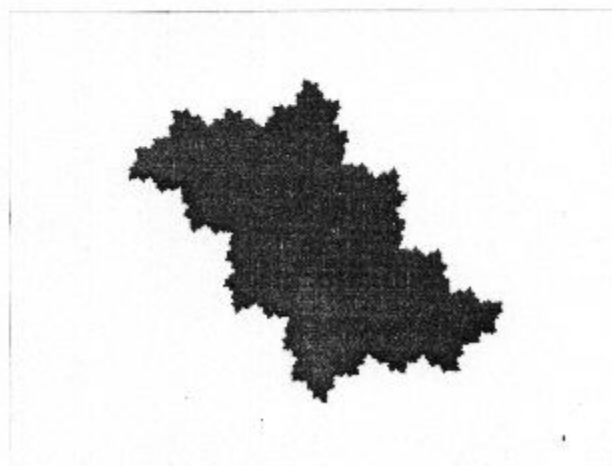
1. Если $|z_0| < 1$, то числа становятся все меньшими и меньшими, их последовательность приближается к нулю.
2. Если $|z_0| > 1$, то числа становятся все большими и большими, стремясь к бесконечности.

3. Если $|z_0| = 1$, то точки продолжают оставаться на расстоянии 1 от нуля. Их последовательности лежат на границе двух областей притяжения, в данном случае на окружности единичного радиуса с центром в нуле.



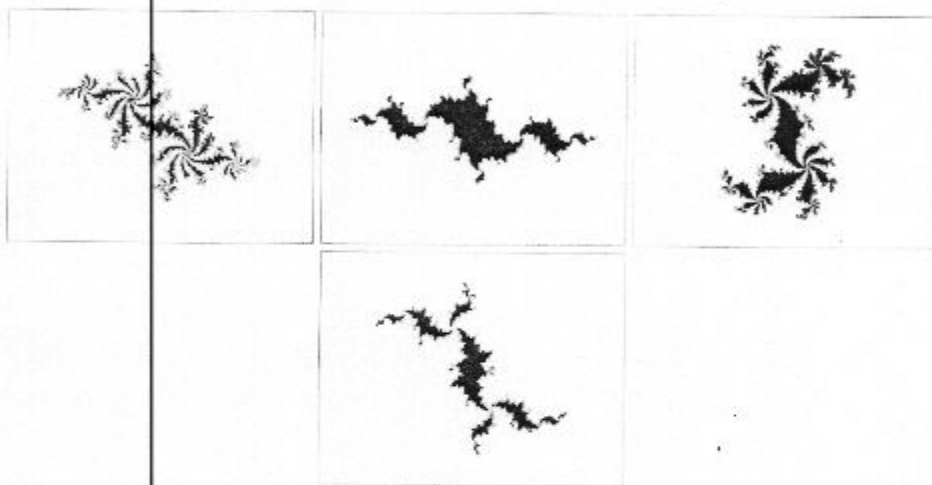
Ситуация ясна: плоскость делится на две зоны влияния, а границей между ними является просто окружность.

Сюрпризы начинаются, когда мы выберем ненулевое значение параметра c , например, $c = -0.1237 + 0.5607i$. Здесь для последовательности имеются также три вышеперечисленные возможности, но внутренняя точка, к которой стремится последовательность, уже не является нулем, а граница уже не является гладкой, она сильно изломана. Именно это Б. Мандельброт назвал фрактальной структурой такой границы.

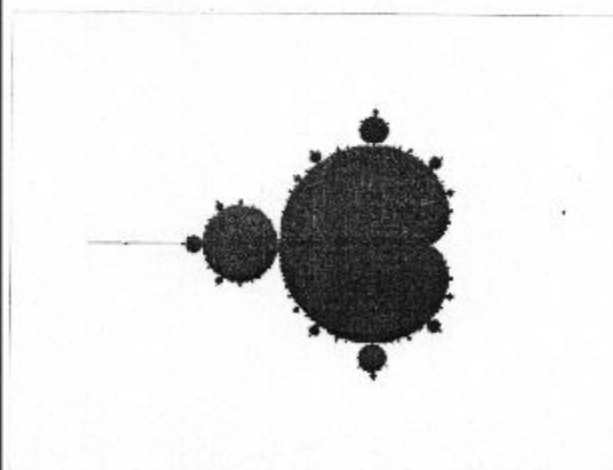


Одной из характерных особенностей такой границы является ее самоподобие. Если взять любую часть границы, то можно обнаружить, что она встречается в разных местах границы и имеет разные размеры. Границы такого рода в математике называют множествами Жюлиа.

Различные значения параметра c могут порождать разнообразные множества Жюлиа, причем малейшее изменение этого параметра нередко приводит к существенным метаморфозам. Некоторые множества Жюлиа связны, другие представляют собой «пылевидные» канторовы множества.

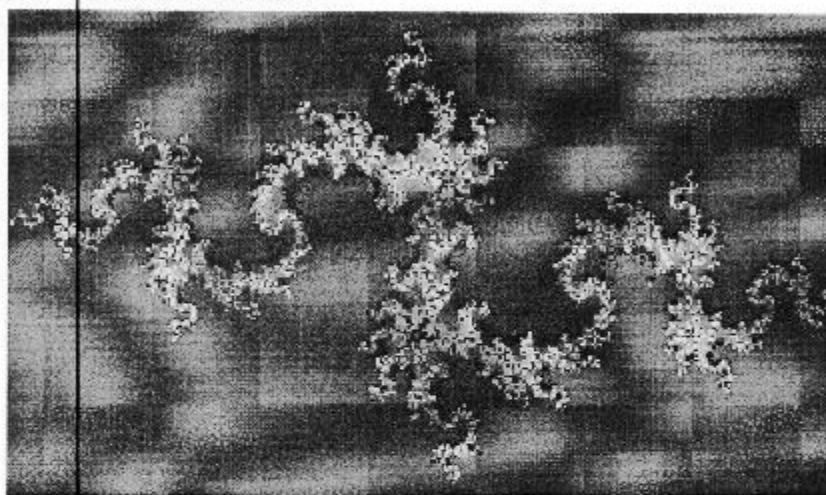


Существует правило, определяющее вид множества Жюлиа. Оно зависит от параметра c и связано с изображением множества Мандельброта. Множество всех точек c , для которых итерации $z_{n+1} = z_n^2 + c$ ($z_0 = 0$) остаются ограниченными при $n \rightarrow \infty$, называется множеством Мандельброта.



Интересно, что все значения c , при которых множества Жюлиа связны, принадлежат множеству Мандельброта, поэтому последнее может быть определено и как множество всех значений параметра c , при которых множество Жюлиа связно.

Рис. 7. Множество Жюлиа



3. ПРИМЕНЕНИЯ ФРАКТАЛОВ

*Фракталы - уникальные объекты,
порожденные непредсказуемыми
движениями хаотического мира.
Их находят в местах таких малых,
как клеточная мембрана, и таких
огромных, как Солнечная система...*

Одни из наиболее мощных приложений фракталов лежат в **компьютерной графике**. Во-первых, это фрактальное сжатие изображений, и, во-вторых, построение ландшафтов, деревьев, растений и генерирование фрактальных текстур. Склонность фракталов походить на горы, цветы и деревья эксплуатируется некоторыми **графическими редакторами**, например фрактальные облака из 3D studio MAX, фрактальные горы в World Builder. Дере-

вья, горы и целые пейзажи задаются простыми формулами, легко программируются и не распадаются на отдельные треугольники и кубики при увеличении деталей.

Фракталы находят все большее и большее применение в науке. Основная причина этого заключается в том, что они описывают реальный мир иногда даже лучше, чем традиционная физика или математика. Вот несколько примеров:

Наиболее полезным использованием фракталов в компьютерной науке является фрактальное сжатие данных. В основе этого вида сжатия лежит тот факт, что реальный мир хорошо описывается фрактальной геометрией. При этом картинки сжимаются гораздо лучше, чем это делается обычными методами (такими как jpeg или gif). Другое преимущество фрактального сжатия в том, что при увеличении картинки, не наблюдается эффекта пикселизации (увеличения размеров точек до размеров, искажающих изображение). При фрактальном же сжатии, после увеличения, картинка часто выглядит даже лучше, чем до него.

При помощи фракталов также можно смоделировать языки пламени.

Пористые материалы хорошо представляются во фрактальной форме в связи с тем, что они имеют очень сложную геометрию. Это используется в нефтяной науке.

Для передачи данных на расстояния используются антенны, имеющие фрактальные формы, что сильно уменьшает их размеры и вес.

Фракталы используются для описания кривизны поверхностей. Неровная поверхность характеризуется комбинацией из двух разных фракталов.

Биекция сердца

Моделирование хаотических процессов, в частности при описании моделей популяций.

Онтогенез (индивидуальное развитие организма) есть краткое и частное повторение филогенеза (историческое развитие вида) этого вида – то есть, жизнь человека и существование человечества вообще – это тоже фрактал.

Экономика

Анализ рынков

Последнее время фракталы стали популярным инструментом у трейдеров для анализа состояния биржевых рынков.

Естественные науки

В физике фракталы естественным образом возникают при моделировании нелинейных процессов, таких, как турбулентное течение жидкости, сложные процессы диффузии-адсорбции, пламя, облака и т. п. Фракталы используются при моделировании пористых материалов, например, в нефтехимии. В биологии они применяются для моделирования популяций и для описания систем внутренних органов (система кровеносных сосудов).

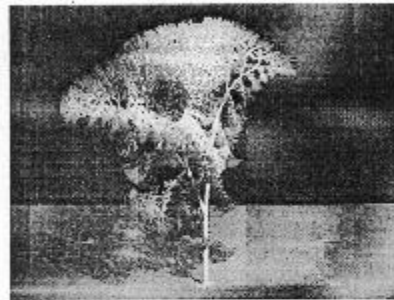
Радиотехника

Фрактальные антенны

Для передачи данных на расстояния используются антенны, имеющие фрактальные формы, что сильно уменьшает их размеры и вес

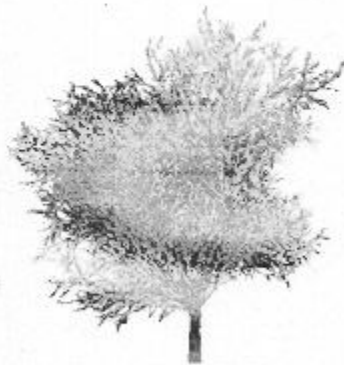
Информатика

Сжатие изображений



Существуют алгоритмы сжатия изображения с помощью фракталов. Они основаны на идее о том, что вместо самого изображения можно хранить сжимающее отображение, для которого это изображение (или некоторое близкое к нему) является неподвижной точкой. Один из вариантов данного алгоритма был использован фирмой Microsoft при издании своей энциклопедии, но большого распространения эти алгоритмы не получили.

Компьютерная графика



Ещё одно фрактальное дерево



Фракталы широко применяются в компьютерной графике для построения изображений природных объектов, таких, как деревья, кусты, горные

ландшафты, поверхности морей и так далее. Существует множество программ, служащих для генерации фрактальных изображений.

Децентрализованные сети

Система назначения IP-адресов в сети Netsukuku использует принцип фрактального сжатия информации для компактного сохранения информации об узлах сети. Каждый узел сети Netsukuku хранит всего 4 Кб информации о состоянии соседних узлов, при этом любой новый узел подключается к общей сети без необходимости в центральном регулировании раздачи IP-адресов, что, например, характерно для сети Интернет. Таким образом, принцип фрактального сжатия информации гарантирует полностью децентрализованную, а следовательно, максимально устойчивую работу всей сети.

ВЫВОД: Фрактальная теория сформировалась сравнительно недавно. Поэтому, в настоящее время фракталы редко находят своё применение: частично в дизайне, в компьютерной графике и в некоторых областях математики и механики, так как фрактальная теория не достаточно хорошо исследована. Фрактальная наука еще очень молода, и ей предстоит большое будущее. Красота фракталов далеко не исчерпана и еще подарит нам немало шедевров - тех, которые улаждают глаз, и тех, которые доставляют истинное наслаждение разуму.

Список литературы

- И.М. Яглом - Комплексные числа
- Б. Мандельброт - фрактальная геометрия
- Атасва П. П-фрактальные множества
- Понтрягин Л. Комплексные числа
- Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах.