

Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ учащихся  
«Прикладные вопросы математики»

Математическое моделирование

**Малые колебательные системы на основе сил поверхностного  
натяжения. Решение кривой ПАВ**

Старцева Екатерина,

Ларионов Константин,

МОУ «Лицей №1» г. Перми, 11 кл.

Имакаев Виктор Раульевич,

д.ф.н., профессор

## Актуальность работы

### 1. Научный аспект

- Обобщение собственных знаний о явлении поверхностного натяжения;
- Подтверждение теории малых колебаний для систем, действующих на основе сил поверхностного натяжения
- Постановка новой, ранее практически неисследованной проблемы: решение аналитическим и численным методом кривой поверхности ПАВа, как составляющей колебательной системы. Возможно привлечение внимания ученых и практиков к новой проблеме с последующими совместными изысканиями в данной области

### 2. Прикладной аспект

- Полученные в процессе исследования результаты могут быть использованы как в качестве материала для дальнейшей самостоятельной научной работы, так и для продолжения исследований в данной области последующим поколением учащихся
- Явление поверхностного натяжения (как объект исследования) широко применяется в различных отраслях промышленности:
  - 1) Определение критического поверхностного натяжения клеток и бактерий. Смачивание поверхности растений с помощью пестицидов и фунгицидов (биология, производство пестицидов),
  - 2) Исследование различных составов ПАВ для повышения эффективности моющих, чистящих, красящих средств (косметика, бытовая химия),
  - 3) Применение ПАВ при производстве мороженого, шоколада, взбитых сливок, соусов для салатов и других блюд (кулинария)
  - 4) Катионные и анионные ПАВ применяют в хирургии в качестве антисептиков

б) *Цель исследования.* Теоретический расчет периода малых колебаний тела на поверхности мыльной пленки и получение зависимости  $u(x)$  для пространственного описания полученной в ходе эксперимента фигуры, близкой к форме усеченного конуса.

в) *Формулировку предмета и объекта исследования.*

Объект исследования – явление поверхностного натяжения.

Предмет исследования – поведение пленки ПАВ при ее вынужденном провисании под воздействием лежащего на ней груза.

г) *Задачи исследования*

1) Теоретическое получение формулы для периода малых колебаний груза на поверхности ПАВ, ограниченной окружностью. Сравнение теоретического значения периода с экспериментальным.

2) Теоретическое решение кривой поверхности, образованной на пленке ПАВ под воздействием силы тяжести груза. Анализ формулы. Сравнение теоретической зависимости с полученной экспериментальной.

д) Метод исследования: теоретико-экспериментальная работа.

Эксперименту предшествует теоретический расчет, который призван подтвердить или опровергнуть полученные опытным путем результаты.

## План работы:

1. Вычисление теоретического значения периода малых колебаний

a) Получение формулы для коэффициента поверхностного натяжения ПАВ ( $\sigma$ )

b) Нахождение  $\ddot{z}$  (ускорения) посредством второго закона Ньютона

c) Применение гармонического закона. Выведение формулы для периода колебания через заданные величины

d) Подстановка экспериментальных начальных данных в расчетную формулу. Получение теоретического значения периода колебаний в условиях данного эксперимента.

2. Вычисление практического значения периода (эксперимент):

a) Постановка эксперимента

b) Фото- и видеосъемка эксперимента для всех вариантов исходных данных

c) Вычисление периода посредством обработки данных с фото- и видеоматериалов

d) Нахождение среднего значения периода

e) Определение погрешностей

3. Сравнение практического и теоретического значений. Анализ полученного результата.

4. Теоретическое решение кривой поверхности ПАВ:

a) Решение задачи при условии равновесия для элементарной поверхности  
ПАВ

b) Интегрирование значений для каждой элементарной поверхности.  
Вычисление кривой поверхности:  $y(x)$

5. Экспериментальное решение кривой поверхности ПАВ:

a) Постановка эксперимента

b) Фото- и видеосъемка эксперимента для различных исходных данных

c) Вычисление кривой поверхности посредством обработки данных с фото- и видеоматериалов

d) Определение погрешностей

6. Сравнение практического и теоретического значений. Анализ полученного результата.

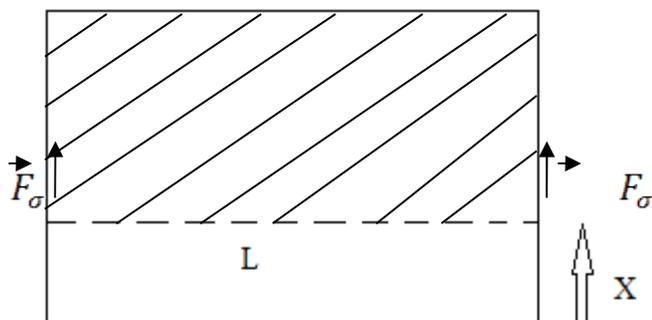
## Введение в теорию

С точки зрения механики, поверхностное натяжение — это сила, действующая на единицу длины линии, которая ограничивает поверхность жидкости.

Сила поверхностного натяжения возникает из-за того, что молекулы на поверхности имеют большую энергию, чем молекула внутри жидкости.

$W = \sigma S$ , где  $W$  - энергия поверх-го натяжения жидкости,  $S$  – площадь свободной поверхности жидкости,  $\sigma$  - коэффициент поверхностного натяжения.

Рассмотрим раму, внутри которой натянута мыльная пленка. Пусть под действием сил поверхностного натяжения стержень длиной  $L$  сместится вверх на расстояние  $x$ ;



$$\Delta W = W_k - W_0 = 2\sigma S_k - 2\sigma S_0 = -2\sigma Lx$$

$$\Delta W + \Delta K = 0; \Delta K = 2\sigma Lx;$$

$$A_\sigma = \Delta K = 2\sigma Lx \rightarrow F_\sigma = \sigma L$$

- 1) Сила направлена по касательной к поверхности жидкости
- 2) Сила направлена перпендикулярно к участку контура, на который она действует.
- 3) Сила пропорциональна длине того участка контура  $L$ , на который она действует.
- 4)  $\sigma$  — сила, приходящаяся на единицу длины контура — называется коэффициентом поверхностного натяжения. Он измеряется в ньютонах на метр.
- 5) Сила стремится уменьшить свободную поверхность жидкости.

## Гармонические колебания

Колебание – движение, при котором система приходит в положение равновесия, поочередно меняя направление смещения.

Смещение – величина, характеризующая отклонение системы от положения равновесия.

Закон гармонических колебаний гласит:

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0); \quad 2\pi = \omega T; \quad T = \frac{2\pi}{\omega};$$

$$U_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t) = x_m(-\sin(\omega t + \varphi_0))\omega;$$

$$U_x = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$a_x = U_x'(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Получаем,  $a = -\omega^2 x$ ;

Или  $\ddot{x} = -\omega^2 x$ ; Отсюда можно найти период (T);

$$T = \frac{1}{\omega};$$

---

На протяжении всего исследования мы считаем известными (посредством измерений) следующие величины:

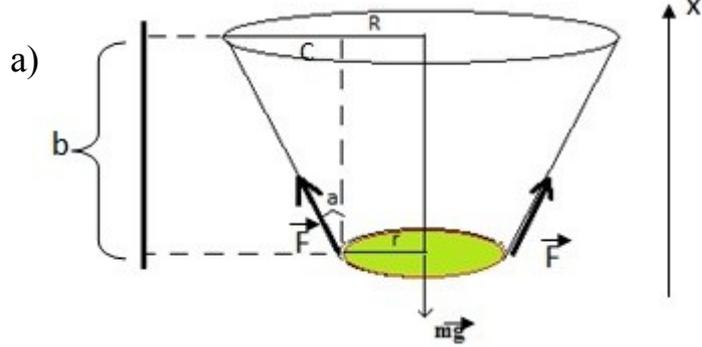
R- радиус большого кольца

r- радиус груза

m- масса груза

b – высота провиса груза в положении равновесия

1.



$$C=R-r;$$

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + m\vec{g}$$

$x: 0 = 2F_{\sigma} \cos \alpha - mg$  (т.к. система находится в положении равновесия)

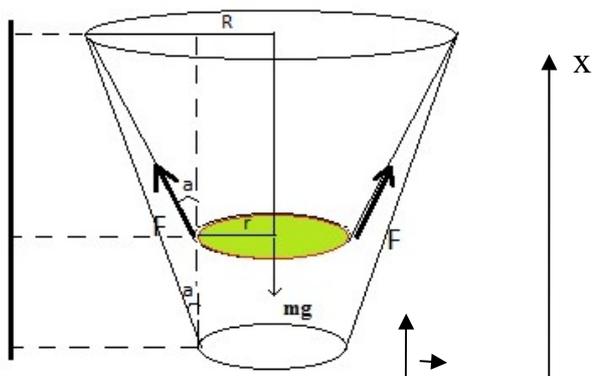
$$2F_{\sigma} \cos \alpha = mg$$

$$2 \cdot 2\pi r \cdot \sigma \cdot \cos \alpha = mg; \cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 + C^2}}$$

$$\sigma = \frac{mg}{4\pi r \cdot \cos \alpha} = \frac{mg\sqrt{b^2 + L^2}}{4\pi r b} = \frac{mg\sqrt{b^2 + (R-r)^2}}{4\pi r b} - \text{формула для нахождения}$$

коэффициента поверхностного натяжения

b)



а

х:  $m\ddot{x} = 2F\cos a' - mg$ ;  $mg = 2F\cos a$  (из условия равновесия, см. 1. а.);

$$m\ddot{x} = 2F(\cos a - \cos a') = -4F\sin\frac{a+a'}{2}\sin\frac{a-a'}{2};$$

Т.к. мы исследуем малые колебания, то угол  $a'$  стремится к  $a$ , и  $\frac{a+a'}{2} = a$ ;

Обозначим  $a - a' = \varphi$ , тогда

$$m\ddot{x} = -4F \cdot \sin a \cdot \sin\frac{\varphi}{2};$$

Рассмотрим треугольник АВМ, полученный при смещении груза на пленке.

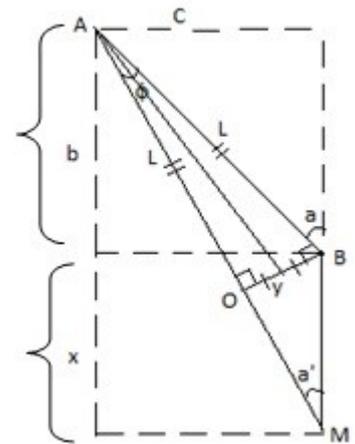
Пусть отрезок ВО отсекает на стороне АМ Отрезок АО=АВ.

Т.к. угол  $\varphi$  очень мал, то угол АОВ=угол АВО=90°;

$$y = L \cdot \sin\frac{\varphi}{2}; \text{ Или } y = \frac{x \cdot \sin a}{2};$$

$$\sqrt{b^2 + c^2} \cdot \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{x \cdot \sin a}{2};$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{x \cdot \sin a}{2 \cdot \sqrt{b^2 + c^2}}$$



Получаем итоговую формулу для  $\ddot{x}$ ;

$$\ddot{x} = \frac{-4F \cdot \sin a \cdot x \cdot \sin a}{2m\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{-2F \cdot \sin^2 a}{m\sqrt{b^2 + c^2}} \cdot x;$$

с) Т.к.  $\ddot{x} = -\omega^2 x$ , то  $\omega = \sqrt{\frac{2F \sin^2 a}{m\sqrt{b^2 + c^2}}}$ ;

$$\text{Получаем } T = 2\pi \sqrt{\frac{m\sqrt{b^2 + c^2}}{2F \sin^2 a}} = 2\pi \sqrt{\frac{m\sqrt{b^2 + c^2}}{2F}} \cdot \frac{1}{\sin a};$$

**d)** Перепишем выражения для  $T$ , используя известные величины ( $R, r, m, b$ );

Дано:

$$c = R - r;$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + (R-r)^2}};$$

$$\sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{b^2 + (R-r)^2}} = \frac{R-r}{\sqrt{b^2 + (R-r)^2}};$$

$$F = \frac{mg}{2 \cos \alpha} = \frac{mg}{2 \frac{b}{\sqrt{b^2 + (R-r)^2}}} = \frac{mg \sqrt{b^2 + (R-r)^2}}{2b}$$

---

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m \sqrt{b^2 + c^2}}{2F}} \cdot \frac{1}{\sin \alpha} = 2\pi \sqrt{\frac{m \sqrt{b^2 + (R-r)^2}}{2 \cdot \frac{mg \sqrt{b^2 + (R-r)^2}}{2b}}} \cdot \frac{\sqrt{b^2 + (R-r)^2}}{R-r} =$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{b}{g}} \cdot \frac{\sqrt{b^2 + (R-r)^2}}{R-r} - \text{формула для нахождения периода малых колебаний}$$

представленной в данном эксперименте колебательной системы

**e)** Экспериментальные значения заданных параметров с учетом возможных погрешностей:

$$\varepsilon_R = \frac{0,05}{3,2} = 1,5 \cdot 10^{-2}$$

$$\varepsilon_r = \frac{0,05}{0,75} = 6,7 \cdot 10^{-2}$$

$$\varepsilon_h = \frac{0,05}{1,3} = 3,8 \cdot 10^{-2}$$

Подставляем исходные данные в формулу для периода:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{b}{g}} \cdot \frac{\sqrt{b^2 + (R-r)^2}}{R-r} = 2 \cdot 3,14 \sqrt{\frac{1,3 \cdot 10^{-2}}{10} \left( 1 + \frac{1,3^2 \cdot 10^{-4}}{(3,2 - 0,75)^2 \cdot 10^{-4}} \right)} = 0,25 (\text{сек})$$

– теоретическое значения периода.

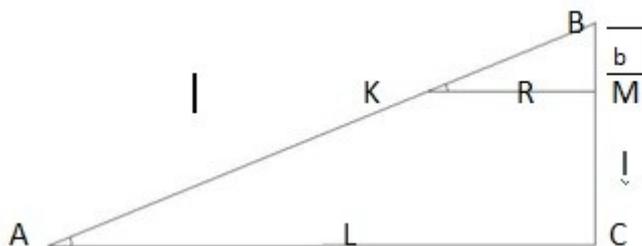
2.

а) **Необходимые оборудование и материалы:**

- 1) ПАВ (поверхностно активное вещество). Состав: 180 мл воды, 36 мл геля для душа «Assorty» , 63 мл глицерина ( $C_3H_5(OH)_3$ ).
- 2) Емкость для ПАВ
- 3) Проволочное кольцо
- 4) Груз (вырезанный из пластиковой карты кружок)
- 5) Линейка (для измерения радиусов и высоты провиса)
- 6) Фотокамера Canon 12.1 mega pixels

**Ход эксперимента** (см.приложение 1): фиксированное проволочное кольцо окунается в ПАВ. Снизу к мыльной пленке подносится груз, так чтобы он смог остаться на ее поверхности. Воздействием на груз снизу он отклоняется от положения равновесия, а затем отпускается. Вследствие воздействия на груз сил тяжести и поверхностного натяжения наблюдаются колебания. Со временем они прекращаются.

Измерим провис плёнки, когда груз находится в равновесии. Установим фотокамеру на расстоянии 20см от доски на уровне груза. Чтобы исключить ошибку параллакса, высчитаем настоящий провис.



Треугольники ABC и KMB подобны, тогда  $\frac{b}{l} = \frac{R}{L}$ ,  $b = \frac{LR}{L}$

$l = 1,5\text{см}, R = 3,2\text{см}, L = 20\text{см}$ , тогда  $b = 0,2\text{см}$

$$h = l - b, h = 1,3\text{см}$$

б) Видеосъемка: приложение 1 – стоп-кадры в положении равновесия и во время колебания. Приложение 2 – график зависимости смещения груза (от положения равновесия) от времени (1 кадр  $\approx 0,03$  сек). Из приложения 2 мы можем убедиться, что наблюдаемые колебания близки к гармоническим.

с-е) Ниже представлена таблица со средними значениями периода для каждого из пяти экспериментов, среднее значение для всего эксперимента в целом а также получившиеся погрешности (исходя из среднего значения) для каждого эксперимента.

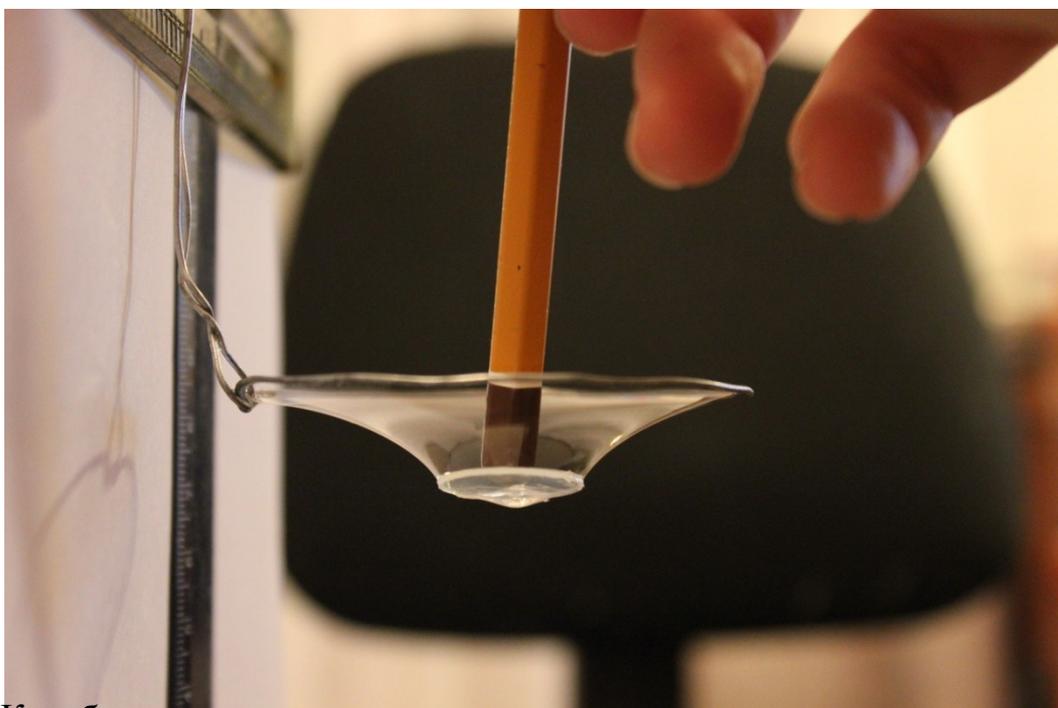
№	1	2	3	4	5	
1	0,23	0,24	0,27	0,27	0,26	
2	0,23	0,26	0,23	0,26	0,27	
3	0,24	0,27	0,23	0,24	0,27	
4	0,26	0,23	0,24	0,23	0,26	
5	0,24	0,27	0,26	0,27	0,27	
6	0,23	0,23	0,24	0,26	0,27	
Среднее	0,24	0,25	0,25	0,26	0,26	<b>Ито го: 0,25 2</b>
Погрешнос ть	0,012	0,002	0,002	0,008	0,008	

3. Полученное практическое значение отличается от теоретического на величину порядка  $10^{-2}$  секунд, что, несомненно, является достаточно точным результатом, учитывая возможные погрешности при измерении массы груза ( $m$ ), радиусов груза ( $r$ ) и кольца ( $R$ ) а также высоты провиса ( $b$ ). В итоге, цель летней практики я считаю достигнутой как в теоретической, так и в экспериментальной составляющей.

## Приложение 1.



Положение равновесия



Колебание

## Приложение 2

График зависимости  $x(t)$  – смещения от времени (1 кадр  $\approx 0,03$  сек)

