

Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ
учащихся «Прикладные вопросы математики»

Прикладные вопросы математики

Гироскопические эффекты в спорте

Лебедев Александр Романович,
Мартемьянов Данил Сергеевич,
МОУ «Лицей №1» г. Перми, 11 кл.
Шабрыкина Наталья Сергеевна,
к. ф.-м. н., доцент ПНИПУ

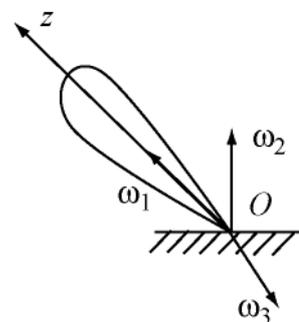
Введение

Во многих видах спорта возникают гироскопические эффекты, например, при вращении в фигурном катании или езде на велосипеде, метании дисков, гироскопическом тренажере и многом другом. Гироскопические эффекты заключаются в том, что тело стремится сохранить свою ось вращения, и при воздействии момента внешней силы вокруг оси, перпендикулярной оси вращения ротора, тело начинает поворачиваться вокруг оси прецессии. Чтобы лучше понять природу гироскопических эффектов и улучшить упражнения, основанные на этих эффектах, мы будем использовать приближенную теорию гироскопов для описания вращения гироскопического тренажера и вращения фигуриста.

Приближенная теория гироскопа

В кинематике под гироскопом понимают твердое тело, имеющее одну неподвижную точку. В динамике гироскопом называют твердое тело, имеющее ось материальной симметрии, быстро вращающееся вокруг этой оси. Сама эта ось так же движется, но одна ее точка при этом остается неподвижной.

Если обозначить за ω_1 угловую скорость собственного вращения, ω_2 - угловую скорость прецессии, ω_3 - угловую скорость нутации, то должны выполняться условия $\omega_1 \gg \omega_2$, $\omega_1 \gg \omega_3$.



Описание гироскопического тренажера

Конструкция

Представляет собой небольшой предмет шаровидной формы, который может прочно обхватываться ладонью и удерживаться пальцами одной руки взрослого человека. Корпус содержит в себе устройство гироскопа. В корпусе, как правило, имеется отверстие с открытой частью ротора для того, чтобы через него можно было его раскрутить. Основную массу тренажёра составляет массивный ротор, ось которого может двигаться по кольцевой канавке внутри корпуса

Использование

Сначала необходимо придать ротору некоторый минимальный момент вращения. Это производится путём резкого и скользящего касания выступающей части ротора каким-либо пальцем (как правило, большим) по направлению вращения. Для облегчения запуска используется стартёр в виде шнурка, который вставляется в небольшое отверстие в роторе и наматывается на него по жёлобу (как на катушку), после чего он выдёргивается за оставшуюся часть.

Когда ротор раскручивается до 2—3 тысяч оборотов в минуту, человек, удерживающий тренажёр в руке, может разогнать его до значительно более высоких скоростей путём совершения круговых движений кистью.

Во время приложения постоянной внешней силы к гироскопу, он начинает поворачиваться вокруг некоторой оси, не совпадающей по направлению с основной осью вращающегося ротора, то есть прецессировать. При этом вращение происходит не в соответствии с направлением воздействия внешней силы. Величина прецессии пропорциональна величине действующей силы. В случае прекращения внешнего воздействия прецессия мгновенно заканчивается, но ротор продолжает вращаться.

Как только ротор запущен, наклон устройства заставит один конец оси двигаться по верхней стороне канавки, а другой — по нижней. Когда ось вращающегося ротора соприкасается с верхней и нижней поверхностью канавки, это вызывает прецессию и ось ротора начнёт кольцевое движение по ней. Сила трения между осью и поверхностью канавки может либо ускорять, либо замедлять вращение гироскопа. Наибольшее ускорение достигается тогда, когда ось ротора начинает «скользить» по поверхности канавки максимально ровно. Поскольку сила трения очень важна для подобного эффекта, устройство ни в коем случае нельзя смазывать. Максимальная скорость вращения ротора достигается

при удерживании сферы в руке и постоянном поддержании вращения движением кисти.

Принцип работы



Рис. 1 Внешний вид

На рисунке 1 показан вид компьютерной модели гиротренажёра. На примере этой модели построены все последующие рисунки, поясняющие устройство и его механику.

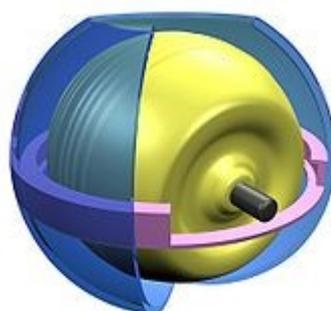


Рис. 2. Характерный внешний вид гироскопического тренажёра.

На рисунке 2 показаны детали внутреннего строения гиротренажёра. Основные его составляющие это корпус, круговая канавка, по которой скользит ось гироскопа, ротор наглухо насаженный на ось, представляющую собой цилиндр длины $2R$ и диаметра $2r$. Круговая канавка жёстко соединена с корпусом гиротренажёра. Ротор представляет собой однородное тело цилиндрической симметрии. На рисунке 2 для большей наглядности часть корпуса «приоткрыта», так чтобы были видны внутренние элементы. Также удалена часть стенки круговой канавки. Ширина паза круговой канавки немного превышает диаметр оси. Ротор гироскопа может приводиться в быстрое вращение вокруг оси, которая может свободно скользить в пазах круговой канавки.

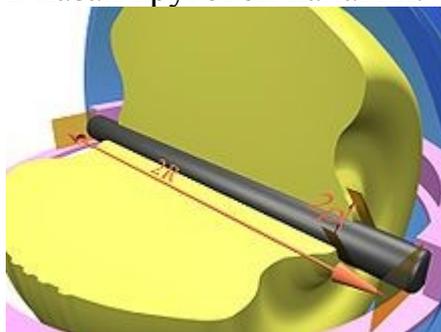


Рис. 3. Основные составляющие гиротренажёра.

На рисунке 3 приведены обозначения наиболее важных размеров гироскопа. (Часть ротора удалена, так чтобы была видна ось.) Это длина оси гироскопа $2R$ (точнее — расстояние между точками опоры оси на горизонтальные поверхности круговой канавки) и диаметр оси $2r$. При скольжении оси гироскопа по канавке на ось действуют силы трения, которые обычно приводят к уменьшению скорости вращения ротора. Но если определённым образом действовать на ось гироскопа, то те же силы трения будут ускорять вращение ротора.

Рассмотрим мгновенную ситуацию движения гироскопа. Кроме сил трения на ось гироскопа со стороны боковых поверхностей круговой канавки действуют силы реакции опоры. Если ось гироскопа покоится и оба конца оси опираются на нижнюю грань канавки, то на них действуют одинаковые силы реакции опоры, в сумме момент этих сил равен нулю. Поэтому, если разогнать ротор гироскопа до угловой скорости ω и никак не двигать его корпус, то ось гироскопа не будет менять своего направления, а скорость вращения постепенно будет убывать из-за сил трения, действующих между осью гироскопа и поверхностями круговой канавки. Если после предварительного разгона ротора определённым образом поворачивать гироскоп, то один конец оси будет упираться на верхнюю грань, а другой — на нижнюю грань круговой канавки. Если один конец оси упирается в верхнюю грань круговой канавки, а другой — в нижнюю, то есть мгновенные направления действий реакции опоры противоположны и, допустим для простоты, равны по модулю N (Рис. 4), то существует ненулевой момент внешних сил, действующий на ось гироскопа, вызывающий его прецессию.

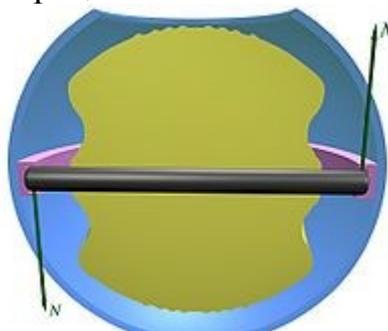


Рис. 5. Ориентация оси относительно опор канавки и действие сил реакции опоры на ось гироскопа.

На рисунке 5 показаны вектора сил и скоростей описывающих прецессионное движение одного из концов оси. Для противоположного конца оси ситуация аналогична

Приближённая теория гироскопа даёт хорошее приближение при условии, что полный момент импульса ротора связан только с движением ротора вокруг своей оси, то есть при условии, что частью момента импульса ротора связанного с прецессией можно пренебречь. Такое условие выполняется если частота прецессии значительно меньше частоты вращения ротора и если главные моменты инерции ротора примерно

одного порядка величины. Как будет показано ниже эти условия можно считать выполненными.

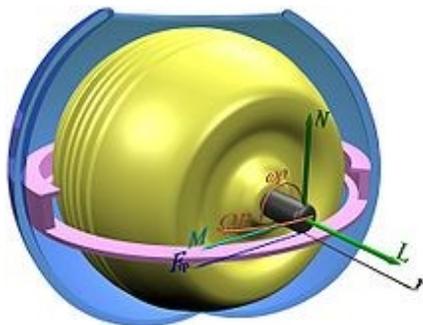


Рис. 6. Обозначения и направления векторов.

Линейная скорость центра оси $\Omega \cdot R$, а линейная скорость боковой грани оси относительно центра оси: $\omega \cdot p$. (см. рисунки 5 и 6)

Если $V > 0$, то сила трения, действующая всегда против направления скорости, будет направлена так, как показано на рисунке 5, то есть будет тормозить вращение ротора вокруг своей оси. Сила трения также как и сила реакции опоры имеет некоторый момент — момент силы трения. При этом момент силы трения будет стремиться инициировать прецессию в вертикальной плоскости, но из-за наличия опоры в виде круговой канавки такая прецессия невозможна. Такое действие момента силы трения приведёт лишь к усилению давления концов оси на опоры, вследствие чего возрастёт сила реакции \vec{N} . Большая сила реакции опоры должна привести к более высокой частоте прецессии. Критическое значение частоты прецессии определяется условием $V = 0$.

Отношение p/R можно считать, по крайней мере, не превышающем 0.1, следовательно, описание режимов при которых имеет значения вблизи нуля с помощью приближённой теории гироскопа корректно.

При $V = 0$ сила трения может принимать любое направление и любое значение в диапазоне от нуля до своего максимального значения, определяемого коэффициентом трения $\mu : F_{fr.max} = \mu \cdot N$. В самосогласованном режиме, когда $V = 0$, скольжения нет, но сила трения, тем не менее, имеет ненулевое значение меньше $F_{fr.max}$, которое обеспечивает, в конечном итоге, необходимую для частоты прецессии Ω силу реакции N . Такое движение можно рассматривать как периметрическое (по периметру) движение оси гироскопа[1]. Потери энергии в таком режиме связаны в основном с трением качения и, в меньшей степени, с трением о воздух, что и приводит к постепенной остановке ротора.

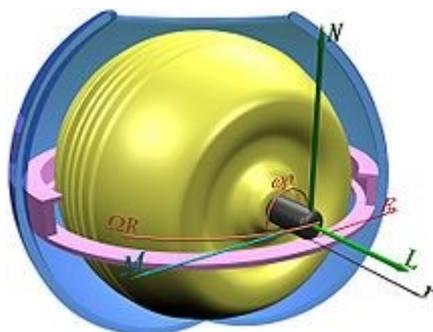


Рис. 7. Обозначения и направления векторов.

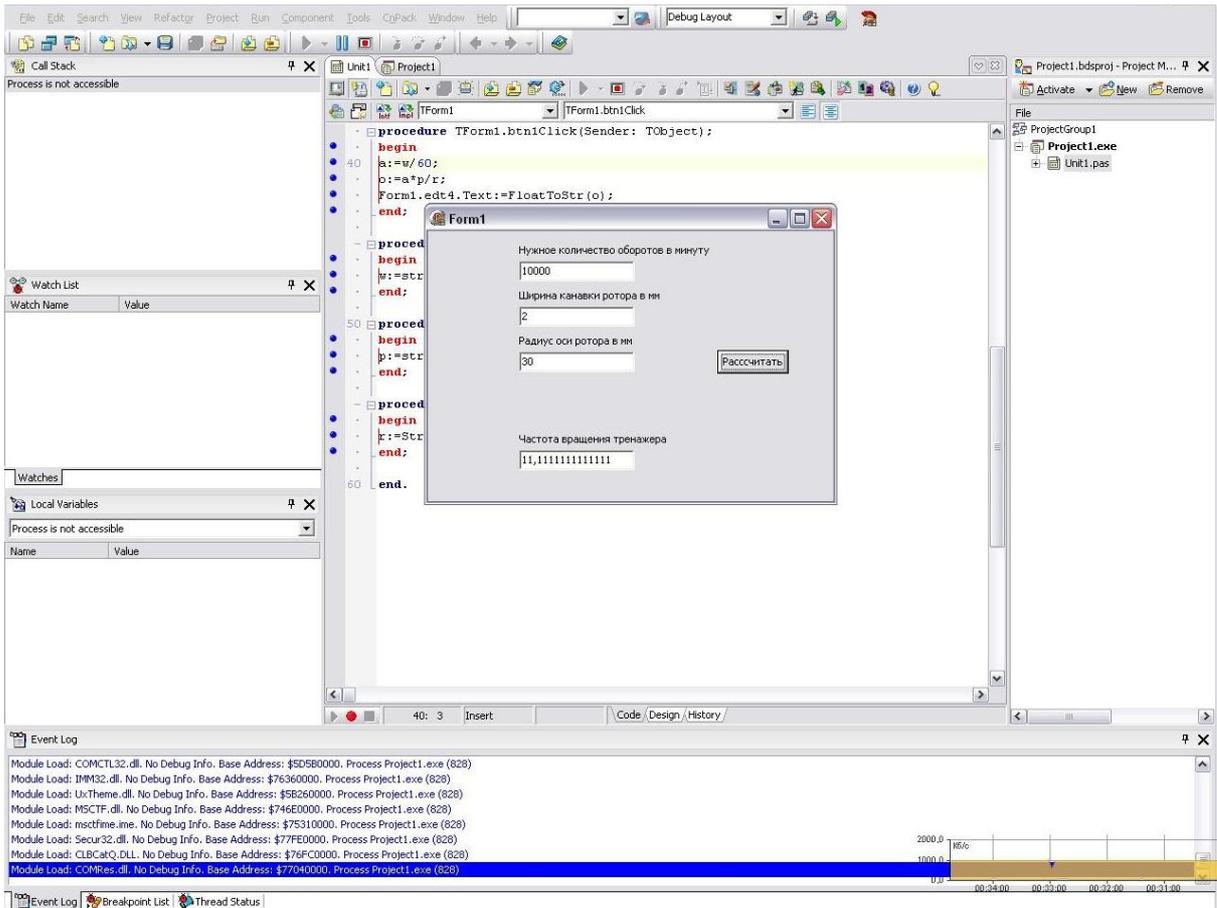
Если же сторонними силами поддерживается такая сила реакции опоры, что выполняется условие $V < 0$, то сила трения будет направлена в противоположную сторону, как показано на рисунке 6. При этом сила трения будет ускорять вращение ротора вокруг своей оси, и, кроме того, уменьшать силу реакции опоры. Таким образом, для поддержания режима ускорения требуется приложение внешних сил, таких чтобы обеспечить достаточно большое значение силы реакции опоры.

На практике, человек держа в руке гиротренажёр с предварительно разогнанным ротором, начинает совершать кистью круговые движения. При этом плоскость круговой канавки совершает движения подобные движениям монеты, которые она совершает в промежутке между качанием по столу и окончательным успокоением на нём. Также можно провести аналогию с бегущей, замкнутой по кругу, поперечной волной, так что на длине окружности уместается только одна длина волны. «Отслеживать» положение оси помогает момент эффект прецессии, воспринимаемый кистью как сопротивление к вращению в задаваемом направлении. Частота круговых движений кисти должна совпадать с частотой прецессии Ω . При росте частоты вращения ротора ω , минимальное требование к частоте прецессии растёт линейно с ω ($\Omega > \omega \cdot \frac{4p}{R}$). Поэтому на больших частотах ω необходимо не только обеспечить высокое значение силы реакции опоры, но и быстрое изменение точки приложения и направления этой силы. В силу этих двух причин, при больших частотах ω дальнейший разгон становится очень затруднительным.

Описание программы

Эта программа позволяет рассчитать зависимость скорости прецессии от угловой скорости вращения ротора гироскопического тренажера.

Для программы необходимы следующие параметры: P - диаметр оси вращения ротора гироскопического тренажера, R - радиус оси вращения ротора гироскопического тренажера, ω - угловая скорость вращения ротора гироскопического тренажера



Математическая постановка

Будем рассматривать переменную $\Omega(\omega)$ - зависимость скорости прецессии гироскопического тренажера от угловой скорости вращения и напишем уравнение зависимости скорости прецессии от перечисленных параметров:

Обозначим P - диаметр оси вращения ротора гироскопического тренажера, R - радиус оси вращения ротора гироскопического тренажера, также введем угловую скорость вращения ротора гироскопического тренажера

$$\Omega = \frac{P}{R} \omega, \quad (1)$$

Суммарный момент внешних сил равен:

$$\vec{I} = [\vec{R} \times \vec{N}] + [-\vec{R} \times -\vec{N}] = 2[\vec{R} \times \vec{N}] \quad (2),$$

откуда для скалярных величин, в силу перпендикулярности векторов: R и N

$$M = 2RN \quad (3).$$

Двойка возникает из-за действия сил реакции опоры на обоих концах оси (Рис. 4). Обозначим момент инерции гироскопа относительно оси вращения через I_z тогда момент импульса вращающегося гироскопа:

$$\vec{L} = I_z \vec{\omega} \quad (4),$$

(Ось вращения совпадает с главной осью тензора инерции ротора). Действие момента сил вызывает прецессию оси гироскопа с угловой скоростью Ω , равной в соответствии с приближённой теорией гироскопа [1][2]:

$$\Omega = \frac{M}{N} = \frac{2RN}{I_z \omega} \quad (5)$$

Линейная скорость центра оси $\Omega \cdot R$, а линейная скорость боковой грани оси относительно центра оси: $\omega \cdot P$. (см. рисунки 5 и 6) Суммарная скорость элемента боковой грани в месте её контакта с поверхностью круговой канавки

$$V = \omega \rho - \Omega R \quad (6)$$

Условие для мгновенного значения силы реакции опоры в режиме ускорения вытекает из требования $V < 0$, то есть: $\Omega \cdot R > \omega \cdot P$ и $\Omega > \frac{\omega \cdot P}{R}$, откуда с учётом (4) получаем:

$$2N = \frac{\rho I_z \omega^2}{R^2} \quad (7)$$

Как показывает условие (7) требования к значению силы реакции опоры растут квадратично по отношению к частоте вращения ротора. Также можно отметить пропорциональность требуемой силы реакции радиусу оси гироскопа P и обратную пропорциональность квадрату длины оси R . Сложность поддержания режима ускорения при высоких угловых скоростях ω также связана с тем, что направление внешних сил должно «отслеживать» мгновенное положение концов оси гироскопа.

Выводы

В данной работе была представлена модель зависимости скорости прецессии от угловой скорости гироскопического тренажера. Исходя из полученных результатов, можно осуществить некоторые заключения. Вы можете менять различные параметры гироскопического тренажера для достижения наилучшего результата.

Список литературы

1. Гироскопический тренажер, Википедия