Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ учащихся
«Прикладные вопросы математики»

Математическое моделирование

Моделирование распространения заболевания без возможности повторного заражения

Лобачев Владимир Вячеславович,
МОУ «Лицей №1» г. Перми, 11 кл.
Шабрыкина Наталья Сергеевна,
к. ф.-м. н., доцент ПНИПУ

Введение

В мире существует множество болезней, которыми люди перебалевают один раз в жизни, к примеру: свинка, ветрянка и т.д. (не инфекционные заболевания), и в некоторых болезнях не всегда исход положителен. Вот и в данной работе расматривается процесс распространения экзотической болезни, исход которой либо выработаный иммунитет, который припятствует вторичному появлению болезни, либо, как бы это не прескорбно, смерть. Для предотвращения не желательного исхода нужно узнать поведени болезни, а именно нужно составить модель этого поведения, чтобы узнать, как быстро она передается и как быстро происходит «излечение». В работе будет показана данная модель.

Концептуальная постановка

Целью данной работы является построение модели процесса распространения заболевания без возможности повторного заражения. Рассматривается процесс распространения болезни среди изолированной группы людей фиксированного размера (за время распространения эпидемии дети не рождаются и из-за причин, не связанных с болезнью, люди не умирают), фиксированный размер является первым допущением в модели. Считается, что болезнь может передаваться только при непосредственном контакте с инфицированным человеком, а это и есть второе допущение. Тогда каждый человек из расматриваемой группы может быть отнесен к одной из следующих категорий, численность которых зависит от времени: подверженные инфекции (могут быть инфицированны), инфицированные, перенесшие заболевание (либо выробатавшие имуннитет, либо умершие от болезни). При этом изменение числа инфицированных увеличивается пропорционально количеству подверженных и инфицированных с коэффициентом передачи болезни и уменьшается пропорционально количеству инфицированных с коэффициентом «излечения». Количество подцерженных и перенесших болезнь изменяются таким образом, чтобы общая численность групы сохранялась. Параметрами, от которых зависит данный процесс являются скорость передачи вируса, скорость «излечения» от него, с летальным или нет исходом.

Математическая постановка задачи

Используя написанные выше допущения, и рассматривая параметры от которых зависит процесс, можно составить дифференциальные уравнения:

$$\frac{\mathrm{d}K(t)}{\mathrm{d}t} = \alpha K(t)S(t) - \beta K(t), \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = -\alpha K(t)S(t), \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t} = \beta K(t), \tag{3}$$

где $K(t)$ - зависимость числа инфицированных от времени, $S(t)$ - зависимость числа подверженных от времени, $R(t)$ - зависимость числа «излечившихся» от времени, α - коэффициент передачи болезни и β - коэффициент «излечения». $\alpha K(t)S(t)$ - Показывает на сколько увеличилось число инфицированных в заданный момент времени и показывает на сколько уменьшилось число подверженных в этот же момент. $\beta K(t)$ - Показывает на сколько уменьшилось число инфицированных в заданный момент времени и показывает на сколько увеличилось число «излечившихся» в этот же момент.

Для решения данных уравнений были взяты следующиее начальные условия и коэффициенты:

$$K(0) = k,$$
$$S(0) = s,$$
$$R(0) = r.$$

Методы решения

Методом решения был выбран метод численного решения дифферинциальных уровнений первого порядка, аналитическим метод данная задача не решается. Так как решение вручную слишком сложно, поэтому решение производилось с помощью математического пакета Maple. Для решения в уравнения были подставленные численные начальные условия и все коэффициенты.

Результаты решения

Из решений, проделанных в математическом пакете, были получены графики зависимости численности всех трех групп от времени. В различных решениях были взяты различные коэффициенты и начальные условия.
Первый случай был рассмотрен при коэффициентах $\alpha = 0{,}0002$ и $\beta = 0{,}05$, и при начальных условиях $S(0) = 1400,\ K(0) = 100$ и $R(0) = 0$.

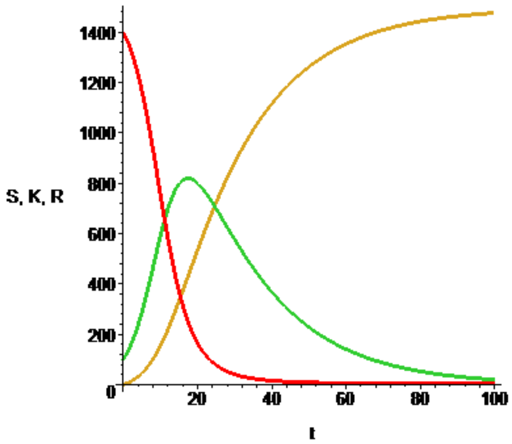

рис.1.1.Зависимость численности трех групп от времени,

где желтая линия R(t), красная S(t) и зеленая K(t)

На графике видно, что численность двух групп, а именно инфицированных и подверженных инфекции, к концу вся перейдет в одну группу – «излечившихся», случится это за 100, а именно численность подверженных инфекции будет равна нулю уже по истечению 50.
Теперь рассмотрим эту же ситуацию с другими коэфициентами передачи болезни и «излечения». За значения коэффициентов были взяты $\alpha = 0{,}0004$, $\beta = 0{,}5$.

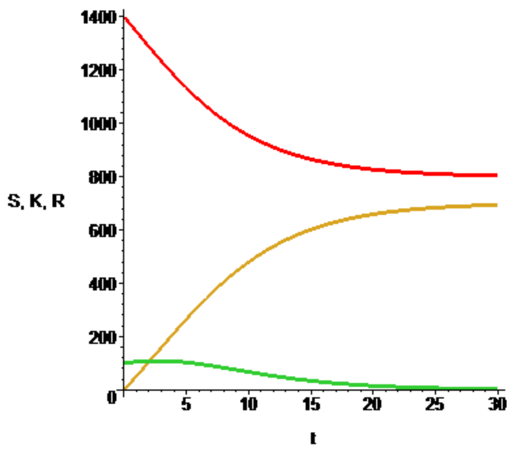

рис.1.2.Аналагичная зависимость, что и в рис.1.1,

только с другими значениями коэффициентов

На этом графике видно что численность инфицированных стала равна нулю по истечении 30, эффект был получен более значительным увеличением коэффициента «излечения» по отношению к коэффициенту передачи болезни. Если так же увеличить коэффициенты, но только коэффициент увеличить более значительно по отношению к коэффициенту «излечение», то количество подверженных упадет к нулю быстрее чем это было в первом случаи, так же и численность инфицированных будет быстрее приближаться к нулю, но менее значительно(рис.1.3).

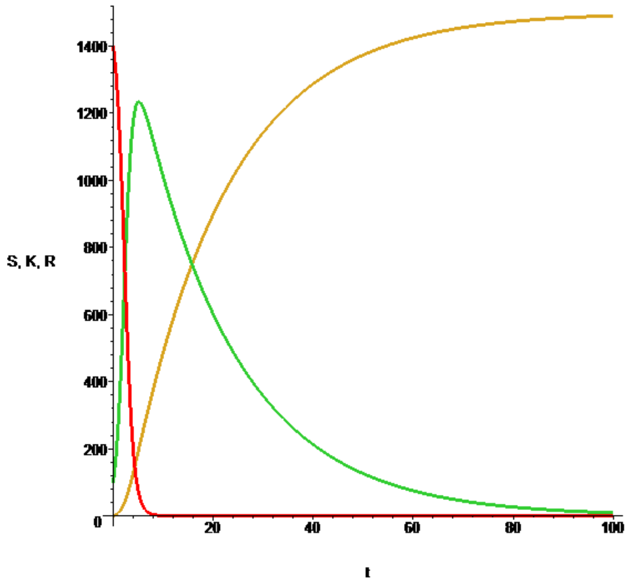

рис.1.3.

Меняя начальные условия, графики будут изменятся только числовыми значениями, а выглядить будут примерно так же (рис 1.4), поэтому дальнейшее расмотрение не обязательны.

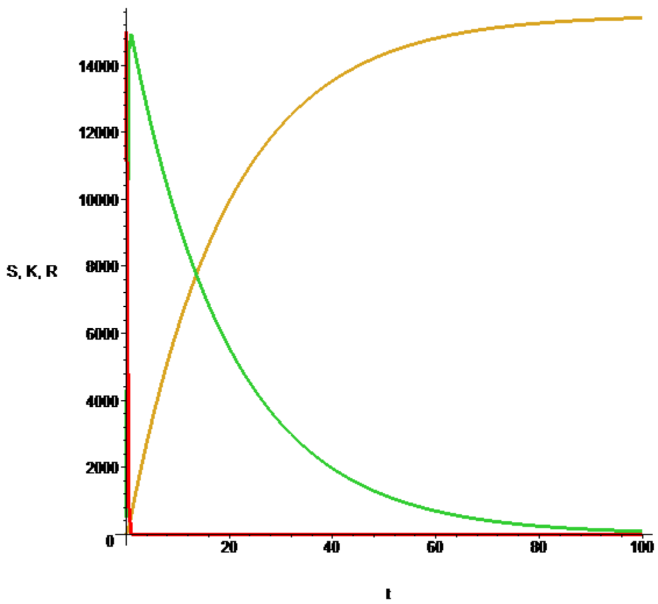

рис.1.4.

Maplet

Совместно с работой была сделана программа-Maplet на языке Maple (язык, с помощью которого и было построенно решение поставленной в работе задачи). Суть программы заключается в том, чтобы по трем заданным точкам построить треугольник и описать его окружностью (возможно нарисование каждой фигуры по отдельности), а так же нахождения радиуса данной окружности. Программный код можно найти в приложении.

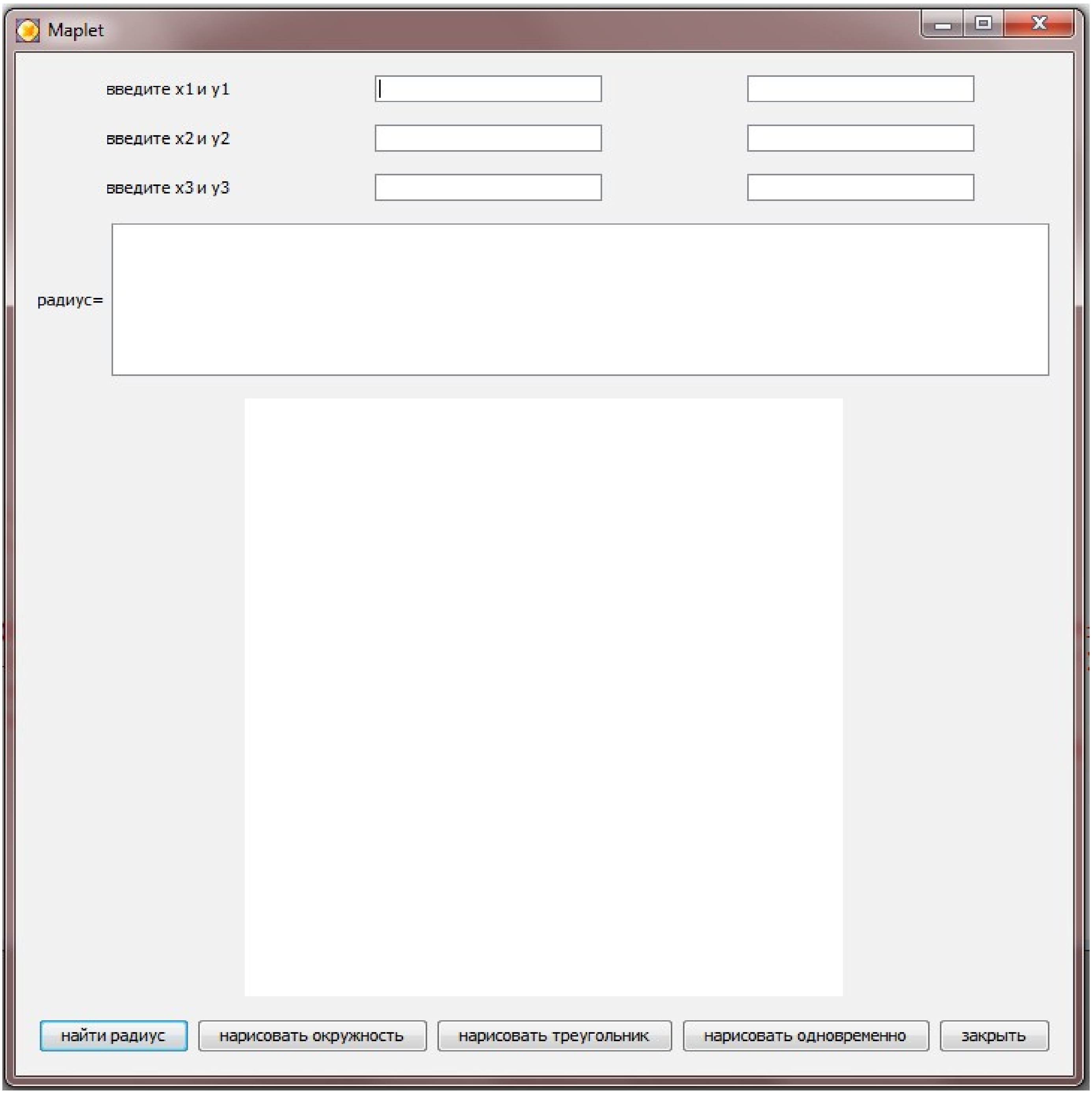

рис.2.1.Рабочее окно Maplet

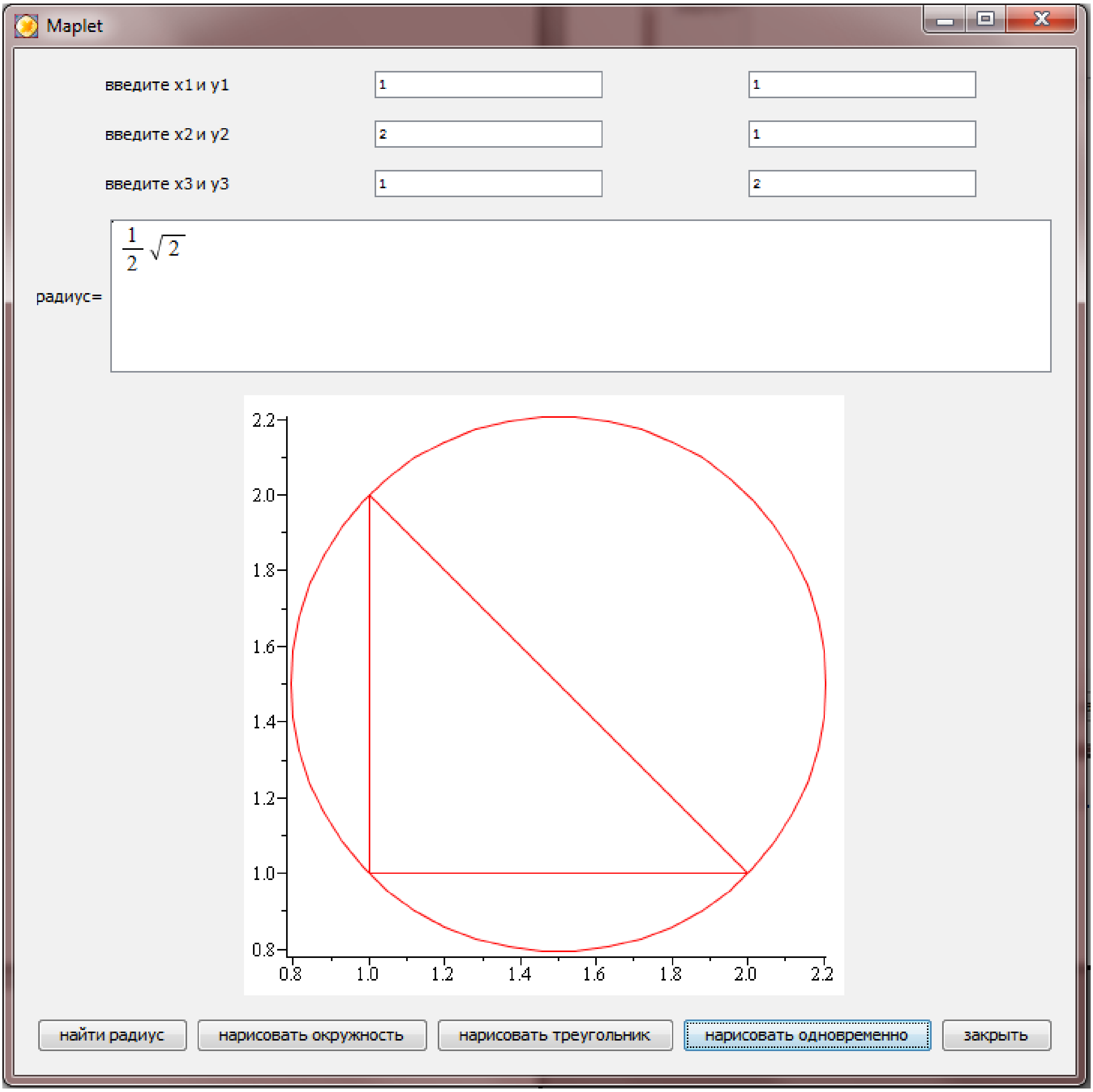

рис.2.2.Рабочее окно Maplet, с уже готовым решением

Заключение

В данной работе была построена математическая модель такого процесса, как распространение заболевания без возможности повторного заражение. При построении модели были полученны дифференциальные уравнения, которые были решены с помощью математического пакета – что задумывалось и удалось. В результате были построены графики зависимостей численности групп от времени, при разны коэффициентах. В результатах первого и третьего случаев было видно, что две группы просто исчезнут, и образуется одна большая. Во втором же случае было видно, что исчезнет одна группа, а численности двух других, после исчезновения третей, будут постоянны. Еще было выявленно, что при изменении начальных условий будут изменятся только численные значения, а графики оставаться поднобными тем что в первых 3 случаях.

Список литературы

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М., 1963.
2. Графика в системе Maple (http://www.mediaget.ru/referat/referat/25620/).
3. Компьютерная математика Maple 7 (электронный учебник) (http://clubmt.ru/Maple7/)

Приложение

Исходный код Maplet

```
> with(Maplets[Elements]):
> with(geometry):
> f1 := proc (x1, x2, y1, y2)
 ((x1-x2)^2+(y1-y2)^2)^(1/2);
 end proc;
> f2 := proc (a, b, c)
 (1/2)*a+(1/2)*b+(1/2)*c;
 end proc;
> f3 := proc (p, a, b, c)
 (p*(p-a)*(p-b)*(p-c))^(1/2);
 end proc;
> f4 := proc (a, b)
 point(A, a, b);
 end proc;
> f5 := proc (a, b)
 point(B, a, b);
 end proc;
> f6 := proc (a, b)
 point(C, a, b);
 end proc;
> f7 := proc (a, b, c)
 circle(q, [a, b, c]);
 end proc;
> f8 := proc (a, b, c)
 triangle(ABC, [a, b, c]);
 end proc;
> slozhniy := Maplet([
["введите x1 и y1", TextBox[TB1](), TextBox[TB2]()],
["введите x2 и y2", TextBox[TB3](), TextBox[TB4]()], ["введите x3
и y3", TextBox[TB5](), TextBox[TB6]()]
, ["радиус=", MathMLViewer[TB7]()],
[Plotter[PL1]()],
[Button("найти радиус", Evaluate('TB7' = 'simplify(f1(TB1, TB3,
TB2, TB4)*f1(TB3, TB5, TB4, TB6)*f1(TB1, TB5, TB2, TB6)/
(4*f3(f2(f1(TB1, TB3, TB2, TB4), f1(TB3, TB5, TB4, TB6), f1(TB1,
TB5, TB2, TB6)), f1(TB1, TB3, TB2, TB4), f1(TB3, TB5, TB4, TB6),
f1(TB1, TB5, TB2, TB6))))')),
 Button("нарисовать окружность", Evaluate('PL1' = 'draw(f7(f4(TB1,
TB2), f5(TB3, TB4), f6(TB5, TB6)), axes = FRAME)')),
Button("нарисовать треугольник", Evaluate('PL1' = 'draw(f8(f4(TB1,
TB2), f5(TB3, TB4), f6(TB5, TB6)), axes = FRAME)')),
Button("нарисовать одновременно", Evaluate('PL1' =
'draw([f7(f4(TB1, TB2), f5(TB3, TB4), f6(TB5, TB6)), f8(f4(TB1,
TB2), f5(TB3, TB4), f6(TB5, TB6))], axes = FRAME)')),
 Button("закрыть", Shutdown([TB1]))]]):
> Maplets[Display](slozhniy);
```