Краевой конкурс творческих работ учащихся

«Математическое эссе»

Прикладные вопросы математики

Золотое сечение, числа Фибоначчи

Микрюкова Ирина Романовна,

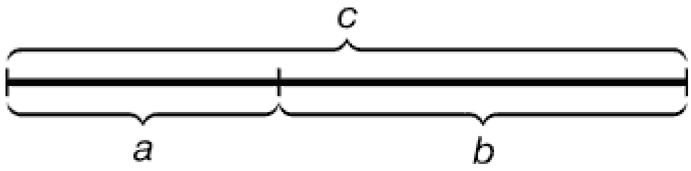
МОУ «Лицей №1» г. Перми, 10 кл.

Чудинова Елена Борисовна,

преподаватель математики

МОУ «Лицей №1»

Золотое сечение (золотая пропорция, деление в крайнем и среднем отношении) — это такое пропорциональное деление отрезка на неравные части, при котором весь отрезок так относится к большей части, как сама большая часть относится к меньшей; или другими словами, меньший отрезок так относится к большему, как больший ко всему.



Отношение большей части к меньшей в этой пропорции выражается квадратичной иррациональностью

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}6180339887\ldots$$

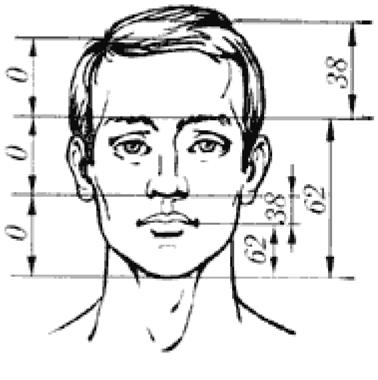
и, наоборот, отношение меньшей части к большей

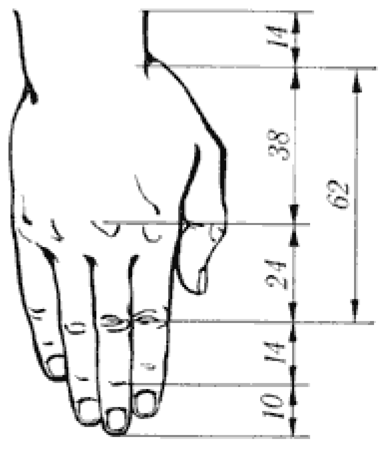
$$\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}6180339887\ldots$$

В дошедшей до нас античной литературе деление отрезка в крайнем и среднем отношении впервые встречается в «Началах» Евклида (ок. 300 лет до н. э.), где оно применяется для построения правильного пятиугольника. Во 2-й книге «Начал» дается геометрическое построение золотого деления. После Евклида исследованием золотого деления занимались Гипсикл (II в. до н.э.), Папп (III в. н.э.) и др.

В средневековой Европе с золотым делением познакомились по арабским переводам «Начал» Евклида. Переводчик Дж. Кампано из Наварры (III в.) сделал к переводу комментарии. Секреты золотого деления ревностно оберегались, хранились в строгой тайне. Они были известны только посвященным.Лука Пачоли, современник и друг Леонардо да Винчи, называл это отношение «божественной пропорцией». Термин «золотое сечение» (*goldener Schnitt*) был введён в обиход Мартином Омом в 1835 году.

Альбрехт Дюрер подробно разрабатывает теорию пропорций человеческого тела. Важное место в своей системе соотношений Дюрер отводил золотому сечению. Рост человека делится в золотых пропорциях линией пояса, а также линией, проведенной через кончики средних пальцев опущенных

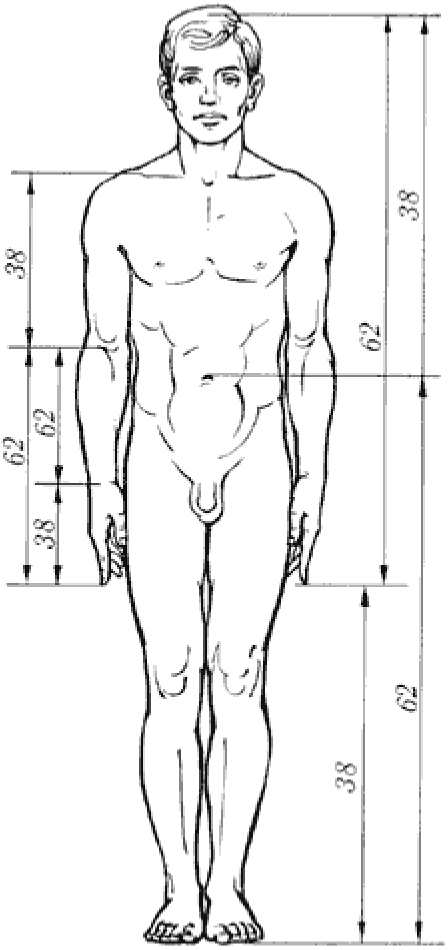




рук, нижняя часть лица – ртом и т.д.

Великий астроном XVI в. Иоган Кеплер назвал золотое сечение одним из сокровищ геометрии. Он первый обращает внимание на значение золотой пропорции для ботаники (рост растений и их строение).

В последующие века правило золотой пропорции превратилось в академический канон и, когда со временем в искусстве началась борьба с академической рутиной, в пылу борьбы «вместе с водой выплеснули и ребенка». Вновь «открыто» золотое сечение было в середине XIX в. В 1855 г. немецкий исследователь золотого сечения профессор Цейзинг опубликовал свой труд «Эстетические исследования». С Цейзингом произошло именно то, что и должно было неминуемо произойти с исследователем, который рассматривает явление как таковое, без связи с другими явлениями. Он абсолютизировал пропорцию золотого сечения, объявив ее универсальной для всех явлений природы и искусства. У Цейзинга были многочисленные последователи, но были и противники, которые объявили его учение о пропорциях «математической эстетикой».



Цейзинг проделал колоссальную работу. Он измерил около двух тысяч человеческих тел и пришел к выводу, что золотое сечение выражает средний статистический закон. Деление тела точкой пупа – важнейший показатель золотого сечения. Пропорции мужского тела колеблются в пределах среднего отношения 13 : 8 = 1,625 и несколько ближе подходят к золотому сечению, чем пропорции женского тела, в отношении которого среднее значение пропорции выражается в соотношении 8 : 5 = 1,6. У новорожденного пропорция составляет отношение 1 : 1, к 13 годам она равна 1,6, а к 21 году равняется мужской. Пропорции золотого сечения проявляются и в отношении других частей тела – длина плеча, предплечья и кисти, кисти и пальцев и т.д.

Справедливость своей теории Цейзинг проверял на греческих статуях. Наиболее подробно он разработал пропорции Аполлона Бельведерского.

Подверглись исследованию греческие вазы, архитектурные сооружения различных эпох, растения, животные, птичьи яйца, музыкальные тона, стихотворные размеры. Цейзинг дал определение золотому сечению, показал, как оно выражается в отрезках прямой и в цифрах. Когда цифры, выражающие длины отрезков, были получены, Цейзинг увидел, что они составляют ряд Фибоначчи, который можно продолжать до бесконечности в одну и в другую сторону. Следующая его книга имела название «Золотое деление как основной морфологический закон в природе и искусстве.

Математические свойства

φ — иррациональное алгебраическое число, положительное решение квадратного уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, откуда, в частности, следуют соотношения:

$$\varphi^2 = \varphi + 1,$$

$$\varphi \cdot (\varphi - 1) = 1,$$

$$\varphi = \frac{1}{\varphi} + 1.$$

φ — представляется через тригонометрические функции:

$$\varphi = 2 \cdot \cos\frac{\pi}{5}.$$

φ представляется в виде бесконечной цепочки квадратных корней:

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}.$$

φ представляется в виде бесконечной цепной дроби

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}},$$

подходящими дробями которой служат отношения последовательных чисел Фибоначчи $\frac{F_{n+1}}{F_n}$. Таким образом,

- $$\varphi = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}.$$

Числа Фибоначчи

Числа Фибоначчи — элементы числовой последовательности в которой каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел. Название по имени средневекового математика Леонардо Пизанского (известного как Фибоначчи). Иногда число 0 не рассматривается, как член последовательности.

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946,… (последовательность A000045 вOEIS)

Более формально, последовательность чисел Фибоначчи $\{F_n\}$ задается линейным рекуррентным соотношением:

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geqslant 2.$$

Иногда числа Фибоначчи рассматривают и для отрицательных номеров *n* как двусторонне бесконечную последовательность, удовлетворяющую тому же рекуррентному соотношению. Члены с такими номерами легко получить с помощью формулы: $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$:

n	−10	−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	−55	34	−21	13	−8	5	−3	2	−1	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Легко заметить, что $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$.

Происхождение

Последовательность Фибоначчи была хорошо известна в древней Индии, где она применялась в стихосложении, намного раньше, чем стала известна в Европе.

Образец длиной *n* может быть построен путём добавления *S* к образцу длиной *n*-1, либо *L* к образцу длиной *n*-2; и просодицисты показали, что число образцов длиною *n* является суммой двух предыдущих чисел в последовательности. Дональд Кнутрассматривает этот эффект в книге «Искусство программирования».

На Западе эта последовательность была исследована Леонардо Пизанским, известным как Фибоначчи, в его труде «Liber Abaci» (1202). Он рассматривает развитие идеализированной (биологически нереальной) популяции кроликов, предполагая что:

- В «нулевом» месяце имеется пара кроликов (1 новая пара).
- В первом месяце первая пара производит на свет другую пару (1 новая пара).
- Во втором месяце обе пары кроликов порождают другие пары и первая пара погибает (2 новые пары).
- В третьем месяце вторая пара и две новые пары порождают в общем три новые пары, а старая вторая пара погибает (3 новые пары).

Закономерным является тот факт, что каждая пара кроликов порождает ещё две пары на протяжении жизни, а затем погибает.

Пусть популяция за месяц n будет равна $F(n)$. В это время только те кролики, которые жили в месяце n-2, являются способными к размножению и производят потомков, тогда $F(n\text{-}2)$ пар прибавится к текущей популяции $F(n\text{-}1)$. Таким образом общее количество пар будет равно $F(n) = F(n\text{-}1) + F(n\text{-}2)$.

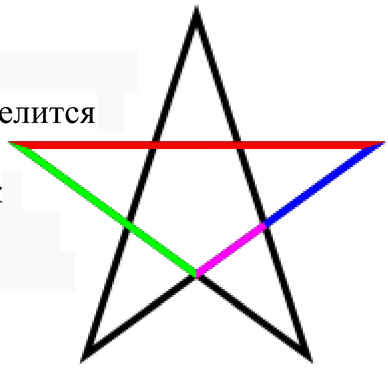
В других областях

В природе:

- Филлотаксис (листорасположение) у растений описывается последовательностью Фибоначчи. Зерна подсолнуха, сосновые шишки, лепестки цветков, ячейки ананаса также располагаются согласно последовательности Фибоначчи.
- Длины фаланг пальцев человека относятся примерно как числа Фибоначчи.
- Молекулу ДНК составляют две вертикально переплетенные спирали длиной 34 ангстрема и шириной 21 ангстрема. Числа 21 и 34 следуют друг за другом в последовательности Фибоначчи.

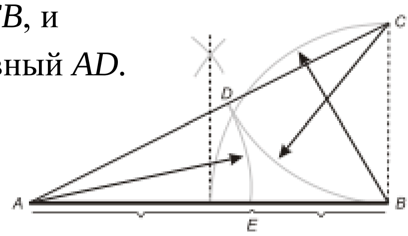
В культуре

- Американский писатель-фантаст Дэн Браун в книге «Код да Винчи» описал последовательность Фибоначчи как «лжешифр».
- Светящиеся числа Фибоначчи от 1 до 55 прикреплены на дымовой трубе Turku Energia в Турку и главном вокзале Цюриха.



В правильной пятиконечной звезде каждый отрезок делится пересекающим его отрезком в золотом сечении (на рисунке отношение красного отрезка к зелёному, так же как зелёного к синему и синего к фиолетовому, равны φ).

Геометрическое построение. Золотое сечение отрезка AB можно построить следующим образом: в точке B восстанавливают перпендикуляр к AB, откладывают на нём отрезок BC, равный половине AB, на отрезке AC откладывают отрезок AD, равный $AC - CB$, и наконец, на отрезке AB откладывают отрезок AE, равный AD. Тогда



$$\varphi = \frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|AE|}{|EB|}.$$

Под «правилом золотого сечения» в архитектуре и искусстве обычно понимаются асимметричные композиции, не обязательно содержащие золотое сечение математически.

Многие утверждают, что объекты, содержащие в себе «золотое сечение», воспринимаются людьми как наиболее гармоничные. Обычно такие исследования не выдерживают строгой критики. Тем не менее, утверждается, что:

- Понятие о золотом делении ввел в научный обиход Пифагор, древнегреческий философ и математик (VI в. до н.э.). Есть предположение, что Пифагор свое знание золотого деления позаимствовал у египтян и вавилонян.
- Пропорции пирамиды Хеопса, храмов, барельефов, предметов быта и украшений из гробницы Тутанхамона свидетельствуют, что египетские мастера пользовались соотношениями золотого сечения при их создании.
- Платон (427...347 гг. до н.э.) также знал о золотом делении. Его диалог «Тимей» посвящен математическим и эстетическим воззрениям школы Пифагора и, в частности, вопросам золотого деления.
- В фасаде древнегреческого храма Парфенона присутствуют золотые пропорции. При его раскопках обнаружены циркули, которыми пользовались архитекторы и скульпторы античного мира. В Помпейском циркуле (музей в Неаполе) также заложены пропорции золотого деления.
- Согласно Ле Корбюзье, в рельефе из храма фараона Сети I в Абидосе и в рельефе, изображающем фараона Рамзеса, пропорции фигур соответствуют золотому сечению.
- Результаты исследования золотого сечения в музыке впервые изложены в докладе Эмилия Розенова (1903) и позднее развиты в его статье «Закон золотого сечения в поэзии и музыке» (1925). Розенов показал действие данной пропорции в музыкальных формах эпохи Барокко и классицизма на примере произведений Баха, Моцарта, Бетховена.

При обсуждении оптимальных соотношений сторон прямоугольников (размеры листов бумаги A0 и кратные, размеры фотопластинок (6:9, 9:12) или кадров фотоплёнки (часто 2:3), размеры кино- и телевизионных экранов — например, 3:4 или 9:16) были испытаны самые разные варианты. Оказалось, что большинство людей не воспринимает золотое сечение как оптимальное и считает его пропорции «слишком вытянутыми».

Правило третей — это принцип построения композиции, основанный на упрощенном правиле золотого сечения. Правило третей в основном используется фотографами.

При определении зрительных центров кадр, как правило, делится линиями, параллельными его сторонам, в пропорциях 3:5, 2:3 или 1:2 (берутся последовательно идущие числа Фибоначчи). Последний вариант дает деление кадра на три равные части (трети) вдоль каждой из сторон.

Несмотря на заметное отличие положения центров внимания, полученных по правилу третей, от золотого сечения, технологическая простота и наглядность сделали эту схему композиции популярной.

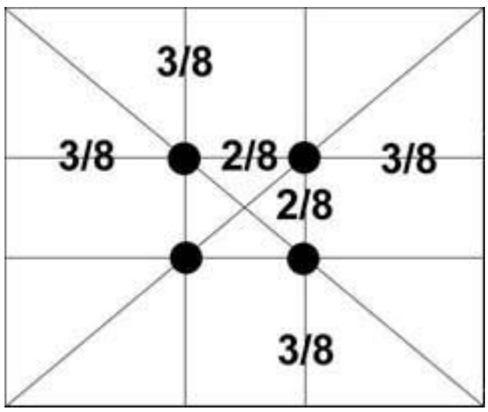
Сетка, построенная по правилу третей, используется в видоискателях некоторых фотоаппаратов для облегчения компоновки кадра.

При съёмке морских пейзажей линия горизонта обычно располагается так, что делит кадр в соотношении 1:2, то есть две трети кадра должно занимать море или небо.

Правило третей было впервые сформулировано в 1797 году и изначально применялось в пейзажных картинах. Начиная с Леонардо да Винчи, многие художники сознательно использовали пропорции «золотого сечения». Российский зодчий Жолтовский также использовал золотое сечение в своих проектах.

Известно, что Сергей Эйзенштейн искусственно построил фильм «Броненосец Потёмкин» по правилам золотого сечения. Он разбил ленту на пять частей. В первых трёх действие развивается на корабле. В двух последних — в Одессе, где разворачивается восстание. Этот переход в город происходит точно в точке золотого сечения. Да и в каждой части есть свой перелом, происходящий по закону золотого сечения. В кадре, сцене, эпизоде происходит некий скачок в развитии темы: сюжета, настроения. Эйзенштейн считал, что, так как такой переход близок к точке золотого сечения, он воспринимается как наиболее закономерный и естественный.

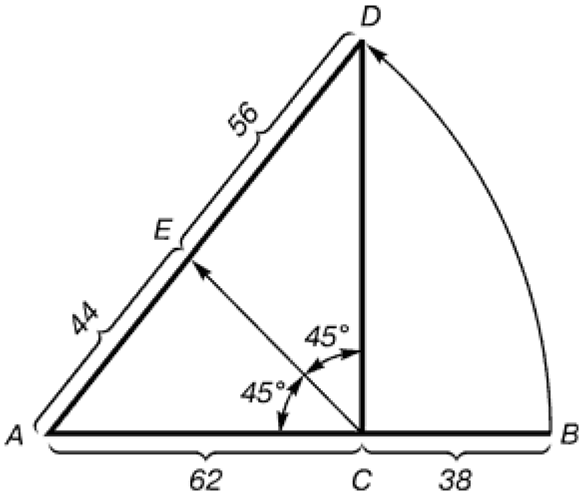
Другим примером использования правила «золотого сечения» в киноискусстве служит расположение основных компонентов кадра в особых точках — «зрительных центрах». Часто используются четыре точки, расположенные на расстоянии 3/8 и 5/8 от соответствующих краёв плоскости.



Второе золотое сечение

Болгарский журнал «Отечество» опубликовал статью Цветана Цекова-Карандаша «О втором золотом сечении», которое вытекает из основного сечения и дает другое отношение 44 : 56.

Такая пропорция обнаружена в архитектуре, а также имеет место при построении композиций изображений удлиненного горизонтального формата.



Деление осуществляется следующим образом.
Отрезок *AB*делится в пропорции золотого сечения. Из точки *C* восставляется перпендикуляр *CD*.
Радиусом *AB*находится точка *D*, которая соединяется линией с точкой *A*. Прямой угол *ACD* делится пополам. Из точки *C* проводится линия до пересечения с линией *AD*.
Точка *E*делит отрезок *AD* в отношении 56 : 44.

Список литературы:

1. *Бендукидзе А. Д.* Золотое сечение «Квант» № 8, 1973.
2. *Васютинский Н. А.* Золотая пропорция. — М.: Молодая гвардия, 1990. — 238[2]с. — (Эврика).
3. *Шмигевский Н. В.* Формула совершенства // Страна знаний. — 2010. — № 4. — С.2-7.
4. *Н. Н. Воробьёв* Числа Фибоначчи — Наука, 1978. — Т. 39. — (Популярные лекции по математике).
5. *А. И. Маркушевич* Возвратные последовательности — Гос. Издательство Технико-Теоретической Литературы, 1950. — Т. 1. — (Популярные лекции по математике).
6. *А. Н. Рудаков* Числа Фибоначчи и простота числа 2^{127}-1 // *Математическое Просвещение, третья серия*. — 2000. — Т. 4.
7. *Дональд Кнут* Искусство программирования, том 1. Основные алгоритмы = The Art of Computer Programming, vol.1. Fundamental Algorithms — 3-е изд. — М.: «Вильямс», 2006. — С. 720. — ISBN 0-201-89683-4.
8. *Дональд Кнут, Роналд Грэхем, Орен Паташник* Конкретная математика. Основание информатики = Concrete Mathematics. A Foundation for Computer Science — М.: Мир; Бином. Лаборатория знаний, 2006. — С. 703. — ISBN 5-94774-560-7.
9. *Цветан Цеков-Карандаш.* «О втором золотом сечении», журнал «Отечество» (№10, 1983 г.)
10. *Ф.В. Ковалев* Золотое сечение в живописи. К.: Выща школа, 1989.
11. *И. Кеплер* О шестиугольных снежинках. – М., 1982.
12. *А. Дюрер* Дневники, письма, трактаты – Л., М., 1957.
13. *А. Стахов* Коды золотой пропорции.
14. http://ru.wikipedia.org/wiki/Числа_Фибоначчи
15. http://ru.wikipedia.org/wiki/Золотое_сечение
16. http://ru.wikipedia.org/wiki/Правило_третей
17. http://www.abc-people.com/data/leonardov/zolot_sech-txt.htm