

Краевой конкурс творческих работ учащихся
«Математическое эссе»

Прикладные вопросы математики

Пифагорова гамма

Мишенкова Ирина Николаевна,
МОУ «Лицей №1» г. Перми, 10 кл.
Чудинова Елена Борисовна,
преподаватель математики
МОУ «Лицей №1»

"Раздумывая об искусстве и науке,
об их взаимных связях и противоречиях,
я пришел к выводу, что математика
и музыка находятся
на крайних полюсах человеческого
духа, что этими двумя антиподами
ограничивается и определяется вся
творческая духовная деятельность человека
и, что между ними размещается все,
что человечество создало
в области науки и искусства."

Г. Нейгауз

Исследованию музыки посвящали свои работы многие величайшие математики: Рене Декарт, Готфрид Лейбниц, Христиан Гольдбах, Жан д'Аламбер, Леонард Эйлер, Даниил Бернулли. Первый труд Рене Декарта - "Compendium Musicae" ("Трактат о музыке"); первая крупная работа Леонарда Эйлера - "Диссертация о звуке". Эта работа 1727 года начиналась словами: "Моей конечной целью в этом труде было то, что я стремился представить музыку как часть математики и вывести в надлежащем порядке из правильных оснований все, что может сделать приятным объединение и смешивание звуков". Лейбниц в письме Гольдбаху пишет: "Музыка есть скрытое арифметическое упражнение души, не умеющей считать". И Гольдбах ему отвечает: "Музыка - это проявление скрытой математики".

Почему же скрытой? Ведь в Древней Греции музыка прямо считалась частью математики, а еще точнее, разделом теории чисел. Первым, кто попытался выразить красоту музыки с помощью чисел, был Пифагор - тот самый, чьим именем названа знаменитая теорема. Пифагора считают основателем школы, ставившей во главу угла математические соотношения между звуками. Его же признают создателем первой музыкальной теории.

Суть открытия Пифагора в музыке в том, что сочетание звуков, издаваемых струнами, наиболее благозвучно, если длины струн

музыкального инструмента находятся в правильном численном отношении друг к другу.

Вообще говоря, высота звука, издаваемого струной, определяется несколькими параметрами - длиной и толщиной струны, плотностью материала, из которого она изготовлена, натяжением и т.д. Когда свойства звука изучаются на монохорде, то толщина струны, ее натяжение и плотность материала остаются неизменными. Высота извлекаемого звука изменяется простым смещением подставки.

Пифагор проводил свои исследования с помощью монохорда – одного из первых однострунных музыкальных инструментов древних греков. Это длинный ящик, необходимый для усиления звука, над которым натягивалась струна. Снизу струна поджималась передвижной подставкой для деления струны на две отдельно звучащие части. На деревянном ящике под струной имелась шкала делений, позволяющая точно установить, какая часть струны звучит.

Долгое время не было единого мнения о том, что определяет приятное для слуха звучание струны (в музыке это явление называют консонансом). Ясность в этот вопрос внес Архит (IV в. до н.э.), который сущность высоты тона видел не в длине струны и не в силе натяжения, а в скорости ее движения, т.е. скорости удара струны по частичкам воздуха.

Сегодня эта "скорость движения" носит название частоты колебания струны. Архит установил, что высота тона (или частота колебания струны) обратно пропорциональна ее длине.

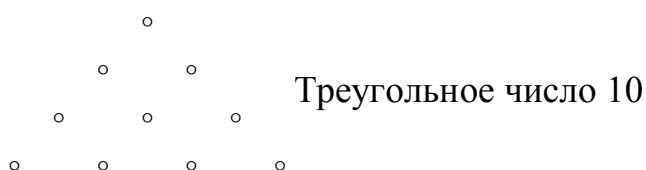
«Законы Пифагора – Архита», на которых основывалась вся пифагорейская теория музыки можно сформулировать так:

1. Высота тона (частота колебаний f) звучащей струны обратно пропорциональна ее длине l :

$$f = \frac{a}{l}$$

где a - коэффициент, характеризующий физические свойства струны.

2. Две звучащие струны определяют консонанс, если их длины относятся как целые числа, образующие треугольное число $10=1+2+3+4$, т.е. как $1:2$, $2:3$, $3:4$



Эти интервалы – «совершенные консонансы», и их интервальные коэффициенты позже получили латинские названия:

$$\text{Октава } \frac{l_2}{l_1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Квинта } \frac{l}{l_1} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Кварта } \frac{l}{l_1} = \frac{3}{4}$$

Было замечено также, что наиболее полное слияние тонов дает октава ($1/2$), затем идут квинта ($3/2$) и кварта ($4/3$), т.е. чем меньше число n в отношении вида $\frac{n+1}{n}$ ($m=1,2,3$), тем созвучнее интервал.

Второй закон и сегодня кажется удивительным, а пифагорейцев в свое время он привел в восторг: целые числа правят всем, даже музыкой!

Итак, если в качестве цены деления шкалы монохорда взять отрезок l , равный $1/12$ струны монохорда l_1 , то вместе со всей струной монохорда длины $l_1=12l$ будут созвучны ее части длины $l_2=6l$ – звук на октаву выше ($l_2/l_1=1/2$), $l_3=9l$ – звук на квинту выше ($l_3/l_2=2/3$) и $l_4=8l$ – звук на кварту выше ($l_4/l_1=3/4$). Это созвучие и определяющие его числа 6,8,10,12 назывались *тетрада* (четверка). Пифагорейцы считали, что тетрада – это «та гамма, по которой поют сирены». При настройке античной лиры, ставшей символом музыки, ее четыре струны обязательно настраивались по правилу тетрады, а настройка остальных струн зависела от лада, в котором предстояло на ней играть.

Но для античного мыслителя было мало установить численные значения изучаемых величин. Пифагорейский глаз и ум привыкли не только измерять, но и соизмерять, то есть устанавливая пропорциональные отношения:

1. Квинта есть среднее гармоническое длин струн основного тона l_1 и октавы l_2 , а кварта – среднее арифметическое l_1 и l_2 .

2. Октава есть произведение квинты на кварту.

3. Октава так относится к квинте, как кварта к основному тону.

4. Октава делится на два неравных консонансных интервала - квинту и кварту.

5. Квинта делится на делится на консонанс кварту и диссонанс тон.

6. Тон-интервал равен отношению квинты к кварте.

Тон-интервал и был принят за интервал между соседними по высоте звуками при построении пифагоровой гаммы. Здесь находится ключ к построению лада. По мнению русского музыковеда Л. А Мазеля, интервал квинты, разделенный на кварту и тон, является основным музыкальным элементом. Выбрав тон в качестве основной ладообразующей ступеньки, античным теоретикам осталось только отложить от основного звука тон, затем – еще один тон, а оставшийся интервал между вторым тоном и тоном кварты назвать полутон.

Так была получена основа всей древнегреческой музыки – тетрахорд – четырехструнный звукоряд в пределах кварты.

Имеется всего три возможности положения полутона в пределах тетрахорда:

Дорийский: полутон – тон – тон

Фригийский: тон – полутон – тон

Лидийский: тон – тон – полутон

Названия тетрахордов указывают на соответствующие области Греции и Малой Азии, каждая из которых пела на своем ладу.

Конечно, четырех струн в пределах кварты было мало для ведения мелодии, поэтому тетрахорды соединялись. Октава состоит из двух кварт и тона; следовательно, в пределах октавы можно расположить два тетрахорда, разделенных интервалом в тон. Объединенная с помощью разделительного тона два одноименных тетрахорда, получили октаву, которую греки называли «гармония». Именно в античной теории музыки слово «гармония» обрело свое современное значение – согласие разногласного. Таких основных видов гармонии по числу тетрахордов получалось три:

Дорийская: полутон – тон – тон – тон – полутон – тон – тон

Фригийская: тон – полутон – тон – тон – тон – полутон – тон

Лидийский: тон – тон – полутон – тон – тон – тон – полутон

Эти античные гармонии сопоставимы с современными гаммами. Современный школьник, знакомый с азами музыкальной грамоты, узнает в лидийской гармонии обычный натуральный мажор (2 тона – полутон, 3 тона – полутон), а в дорийской и фригийской – почти натуральный минор (тон – полутон – 2 тона - полутон – 2 тона).

Зная размеры интервалов, образующих, например лидийскую гармонию и правила действия с ними, легко получить математическое выражение этой гаммы.

$$1 \qquad \frac{9}{8} \qquad \frac{81}{64} \qquad \frac{4}{3} \qquad \frac{3}{2} \qquad \frac{27}{16} \qquad \frac{243}{128} \qquad 2$$

До Ре Ми Фа Соль Ля Си До

Это и есть канон Пифагора. По преданию, канон Пифагора впервые нашел практическое применение при настройке лиры легендарного Орфея.

Каждый музыкальный лад греки наполняли определенным этико-эстетическим содержанием, устанавливая ясную связь между музыкальными образами и состояниями души. Музыка приписывались магические и даже лечебные функции, но особенное значение придавалось музыке как средству воспитания.

Так, развивая в работе «Государство» теорию идеального государства, Платон исключительное значение придает воспитательной роли музыки:

Дорийский лад	Предназначен для мирной жизни, является подлинно греческим, мужественным деятельным
Фригийский лад	Предназначен для чрезвычайного события, например, войны; является наиболее страстным.
Лидийский лад	Неуместен в идеальном государстве, так как является печальным, погребальным, соответствующим женской, а не мужской психике.

В оценке лидийского лада с Платоном не соглашался уже Аристотель, находя в лидийском ладу наивную детскость и прелесть и относя его к ладу, вызывающему психическое равновесие. Современный мажорный лад отличается более светлыми и радостными тонами, что зависит от массы других факторов (темпа, ритма, мелодического рисунка).

Таким образом, вопрос об этико-эстетическом содержании ладов не решается однозначно и во многом определяется традицией применения того или иного лада. В современной музыке есть много веселых, энергичных произведений в миноре и грустных и задумчивых – в мажоре.

В заключение отметим, что открытие математических закономерностей в музыкальных созвучиях, послужило первым «экспериментальным» подтверждением пифагорейской философии числа. Пифагорейцы называли математику и музыку родными сестрами. С тех пор дороги математики и музыки разошлись настолько, что их сопоставление сейчас многим покажется просто недоразумением. А ведь музыка пронизана математикой, как и математика полна поэзии и музыки! По мнению Плутарха, «почтенный Пифагор отвергал оценку музыки, основанную на свидетельстве чувств. Он утверждал, что достоинства ее должны восприниматься умом, и потому судил о музыке не по слуху, а на основании математической гармонии и находил достаточным ограничить изучение музыки пределами одной октавы».

Литература

1. <http://exsolver.narod.ru>: Гейн А.Г., Касымов А.О. Математика и музыка
2. <http://festival.1september.ru>: Кюне М. И. История построения музыкальной гаммы
3. Вахромеев В. А. Элементарная теория музыки: Учебник. – Москва, музыка, 1983.
4. Волошинов А. В. Математика и искусство. – Москва: Просвещение, 1992.