Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ учащихся «Прикладные вопросы математики»

Геометрия

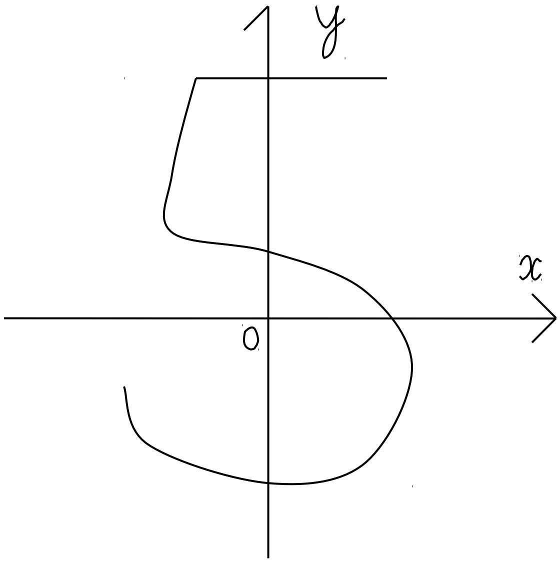
Кривые второго порядка на плоскости в различных системах координат

Мунтьянова Александра,
МОУ «Лицей №1» г. Перми, 11 кл.
Сидорова Елена Борисовна,
преподаватель математики
МОУ «Лицей №1» г. Перми

1. Введение

Несомненно, каждый слышал о таких понятиях как график функции, система координат, парабола и т.п. Всё это является составляющими темы «Функции», с которой знакомятся в российских школах ещё в среднем звене.

Функция - это «закон», по которому каждому элементу одного множества X (называемому областью определения) ставится в соответствие некоторый единственный элемент другого множества (называемого областью значений) Y, т.е. зависимость, при которой значению аргумента X соответствует единственное значение функции Y. Этот закон определяется уравнением $y=f(x)$, и на основе него строится график в плоской системе координат, задаваемой двумя осями X и Y. Двигаясь от 6 до 11 класса, мы усложняли уравнения и графики, вводили новые понятия (например, касательная, производная), но никогда не выходили за рамки основного определения функции и принципа построения графиков: «иксу» - только один «игрек». То есть нами не рассматривалась возможность построения, например, такой кривой:



Или график синусоиды относительно оси Оу.

Единственным, наверное, примером кривой (не функции) была окружность, которая встречалась нам в тригонометрии.

И вот классу к 10-11 я начала задумываться над тем, чтобы расширить область преподаваемого нам материала, заглянуть за рамки заданных ограничений. В этом и заключается одна из целей, поставленных в данной работе - расширить знания по теме графики, попрактиковаться в области их построения. Таким образом, объектом моего исследования стали кривые II порядка - графики, в уравнениях которых нет такой строгой зависимости Y от X, как в функциях.

Другим предметом моего исследования являются системы координат прямоугольная и полярная, а именно вид различных графиков в этих системах: будут ли они отличаться. Вот главная цель работы: сравнить способы построения кривых II порядка в различных системах координат, а также выяснить, как различаются их графики.

Для достижения целей работы было поставлено несколько задач:

- научиться строить стандартные (невырожденные) кривые II порядка: эллипс, параболу, гиперболу; находить их основные элементы;
- рассмотреть нестандартные кривые II порядка;
- познакомиться с полярной системой координат и сопоставить с декартовой, уже изучавшейся в школе;
- научиться переводить график из одной системы в другую.

Процесс решения каждой из задач был разбит на 2 этапа:

- изучение и разбор теоретического материала, знакомство с новыми понятиями;
- применение полученных знаний на практике, решение задач.

2. Исследование кривых второго порядка

2.1 Стандартные кривые II порядка

Немного истории. Впервые кривые второго порядка изучались одним из учеников Платона. Его работа заключалась в следующем: если взять две пересекающиеся прямые и вращать их вокруг биссектрисы угла, ими образованного, то получится конусная поверхность. Если же пересечь эту поверхность плоскостью, то в сечении получаются различные геометрические фигуры, а именно эллипс, окружность, парабола, гипербола и несколько вырожденных фигур (см. ниже).

Однако эти научные знания нашли применение лишь в XVII, когда стало известно, что планеты движутся по эллиптическим траекториям, а пушечный снаряд летит по параболической. Ещё позже стало известно, что если придать телу первую космическую скорость, то оно будет двигаться по окружности вокруг Земли, при увеличении этой скорости — по эллипсу, а при достижении второй космической скорости тело по параболе покинет поле притяжения Земли.

Алгебраической кривой второго порядка называется кривая Г, уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид

$$\mathbf{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,}$$

где не все коэффициенты *A*, *B* и *C* равны одновременно нулю (в противном случае Г - прямая, т.е. алгебраическая кривая первого порядка).

Кривые второго порядка делятся на ***вырожденные*** и ***невырожденные.***

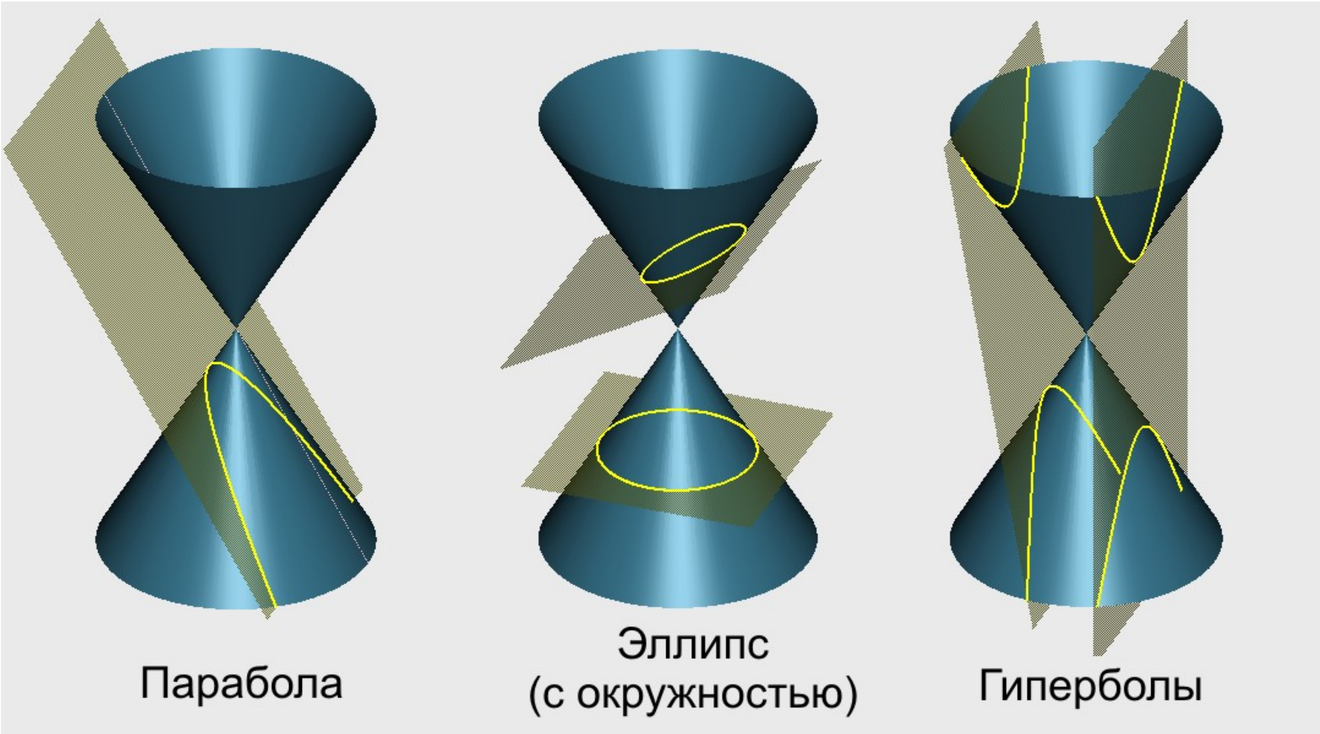
Вырожденные кривые второго порядка это прямые и точки, которые задаются уравнением второй степени. Если уравнению второго порядка не удовлетворяет ни одна точка плоскости, то тоже говорят, что уравнение определяет вырожденную кривую (мнимую кривую второго порядка).

Если же кривая Г невырожденная, то для неё найдётся такая декартова прямоугольная система координат, в которой уравнение этой кривой имеет один из следующих трёх видов:

- $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0$;
- $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0$;
- $y^2 = 2px, \quad p > 0$.

При этом кривая Г будет называться соответственно эллипсом, гиперболой или параболой, а сама система координат, в которой её уравнение будет иметь один из 3 вышеперечисленных видов, называется канонической системой координат.

Невырожденные кривые являются тремя основными видами конического сечения:



(рис. 2)

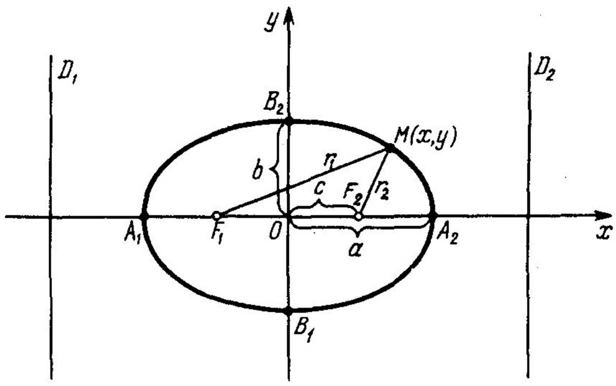
2.1.1. Эллипс

(др.-греч. ἔλλειψις — опущение, недостаток, в смысле недостатка эксцентриситета до 1)

Эллипсом называется геометрическое место точек на плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек той же плоскости, называемых фокусами эллипса, есть величина постоянная.

Каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \;\; a \geq b > 0$.

Рассмотрим его график в прямоугольной системе координат и основные элементы (рис. 3).



(рис. 3)

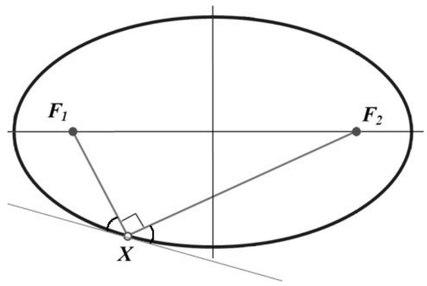
<u>В эллипсе можно выделить следующие элементы:</u>

- **главные оси** - оси симметрии **Ox** и **Oy**;
- **большая ось** - отрезок $\mathbf{A_1A_2}$, проходящий через фокусы эллипса и концы которого лежат на эллипсе, - и **малая ось** - отрезок $\mathbf{B_1B_2}$, перпендикулярный большой оси эллипса, проходящий через центральную точку большой оси и концы которого лежат на эллипсе;
- **большая** и **малая полуоси** - отрезки **a** и **b**, проведённые из центра эллипса к вершинам на большой и малой осях;
- **вершины** - точки пересечения эллипса с осями (точки $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$);
- **центр** - точка пересечения большой и малой полуосей;
- **фокусы** - точки $\mathbf{F_1}$(-c; 0) и $\mathbf{F_2}$(c; 0), где $c = \sqrt{a^2 - b^2} \geq 0$;
- **фокальные радиусы** - расстояния $r_1 = |\overline{F_1M}|$ и $r_2 = |\overline{F_2M}|$ от каждого из фокусов до данной точки (т. M);
- **фокальные радиус-векторы** - векторы $\overline{F_1M}$ и $\overline{F_2M}$;
- **фокальное расстояние** - расстояние $c = \dfrac{|F_1F_2|}{2}$ от центра эллипса до одного из фокусов;
- **фокальный параметр** $p = \dfrac{b^2}{a}$ - половина длины хорды, проходящей через фокус и перпендикулярной большой оси эллипса;
- **диаметр** - произвольная хорда, проходящая через центр эллипса;
- **директрисы** D_1: $x = -\dfrac{a}{e}$ и D_2: $x = \dfrac{a}{e}$ - прямые, перпендикулярные главной оси и проходящие на расстоянии $\dfrac{a}{e}$ от центра;

Вот некоторые свойства эллипса и его элементов:

- $k = \frac{b}{a}$ - **коэффициент сжатия, или эллиптичность**, - отношение длин малой и большой полуосей.
- $(1-k) = \frac{a-b}{a}$ ($k = \frac{2a-b}{a}$) - **сжатие** эллипса.
- $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$ $(0 \le e < 1)$ - **эксцентриситет** - мера вытянутости эллипса.

  Чем эксцентриситет ближе к нулю, тем эллипс больше напоминает окружность и наоборот, чем эксцентриситет ближе к единице, тем он более вытянут.
- Коэффициент и эксцентриситет эллипса связаны соотношением $k^2 = 1 - e^2$.
- Сумма расстояний от любой точки эллипса до его фокусов есть величина постоянная и равная удвоенной большей полуоси.
- Центр эллипса является его центром симметрии.
- И самое интересное, на мой взгляд, свойство - зеркальное: касательная к эллипсу имеет равные углы с фокальными радиусами точки касания, т.е. луч света, выпущенный из фокуса эллипса, после отражения от зеркала эллипса проходит через другой фокус эллипса (рис. 4).



(*рис. 4)*

Это свойство активно и успешно применяется, например, при лечении камней в почках, когда их разрушают с помощью ультразвука.

Эллипс может превратиться в *окружность*. Тогда его каноническое уравнение будет выглядеть так: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ (*), или $x^2 + y^2 = a^2$, центр в начале координат и радиус равен a.

При этом изменятся некоторые параметры, характерные эллипсу:

- как заметно из уравнения (*), полуоси a и b равны;
- эксцентриситет e равен 0, т.е. эллипс не сплюснутый;
- коэффициент сжатия k равен 1;
- сжатие (1-k) равно 0.

Ниже приведены несколько задач, которые помогли мне усвоить исследуемый материал.

Задача №1.

Построить эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти его a) полуоси; b) координаты фокусов; c) эксцентриситет; d) уравнения директрис.

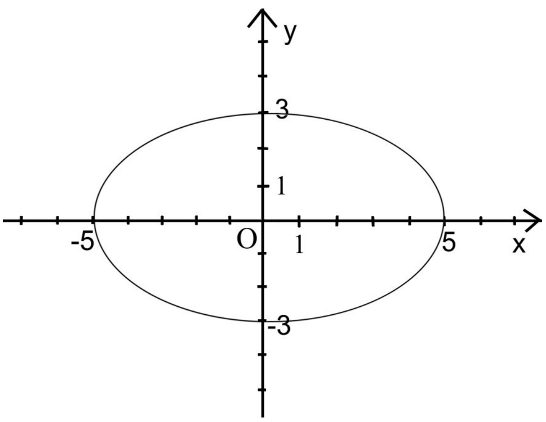
Решение.

Приведём уравнение к каноническому виду: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Получим: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Для построения графика необходимо знать координаты его центра т. O и длины полуосей a и b.

Из получившегося уравнения: т. O (0;0), a=5, b=3.

Таким образом, эллипс будет выглядеть так:



(рис. 5)

a) полуоси: a=5, b=3;

b) координаты фокусов: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4 \rightarrow$ $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$;

c) эксцентриситет: $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0{,}8$;

d) уравнения директрис: D_1: $x = -\frac{a}{e} = -\frac{5}{4} = -1{,}25$; D_2: $x = \frac{a}{e} = \frac{5}{4} = 1{,}25$.

Задача №2.

Написать каноническое уравнение эллипса, если: a) a=5, c=4; b) c=3, e=3/5; c) e=1/2, расстояние между директрисами равно 32.

Решение:

a) для написания уравнения нужно найти b^2, что можно сделать из формулы эксцентриситета: $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$.

$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$, значит $\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{4}{5} \longrightarrow 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{16}{25} \longrightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{9}{25}$. Подставим a: $\frac{b^2}{25} = \frac{9}{25}$. Нетрудно заметить, что $b^2=9$.

Отсюда каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

b) нам не известны ни a^2 ни b^2 но зная a, можно найти b^2 по формуле $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

$e = \frac{c}{a} \to \frac{3}{5} = \frac{3}{a} \to a = 5$; $c = \sqrt{a^2 - b^2} \longrightarrow 3 = \sqrt{25 - b^2} \Rightarrow 25 - b^2 = 9 \Rightarrow b^2 = 16$.

Уравнение будет выглядеть следующим образом: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

c) уравнения директрис: D_1: $x = -\frac{a}{e}$ и D_2: $x = \frac{a}{e}$, каждая находится на расстоянии $\frac{a}{e}$ от центра, а значит расстояние между ними - $\frac{2a}{e} = 32$. Подставляем значение e и с помощью простейших вычислений находим a: $\frac{4a}{1} = 32 \Rightarrow a = 8$.

Осталось найти b^2: $e = \frac{c}{a} \to \frac{1}{2} = \frac{c}{8} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{c}{8} \Rightarrow c = 4$;

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \longrightarrow 16 = 64 - b^2 \Rightarrow b^2 = 48.$$

Получаем уравнение: $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$.

Задача №3.

Установить, что уравнение $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$ определяет эллипс; найти его центр C, полуоси, эксцентриситет и уравнения директрис; построить график этого эллипса.

Решение:

1. Сначала нужно привести уравнение к каноническому виду. Для этого выделим 2 квадрата суммы:

$(5x^2 - 30x + 45) + (9y^2 + 18y + 9) - 45 = 0$

$5(x-3)^2 + 9(y+1)^2 = 45 \;|:45$

$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{5} = 1$. Получили каноническое уравнение эллипса.

2. Центра эллипса находится в точке С (3;-1);

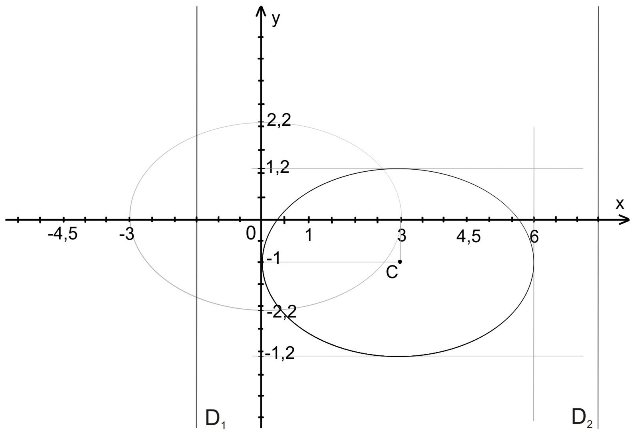
   полуоси: a=3, b=$\sqrt{5}$;

   эксцентриситет:

   $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{5}{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$;

   уравнения директрис: D_1: $x = -4{,}5$;

   D_2: $x = 4{,}5$.



(рис. 6)

3. Построим график. При этом нужно учитывать сдвиг на 3 пункта вправо и на 1 вниз, $\sqrt{5} \approx 2{,}2$ (рис. 6).

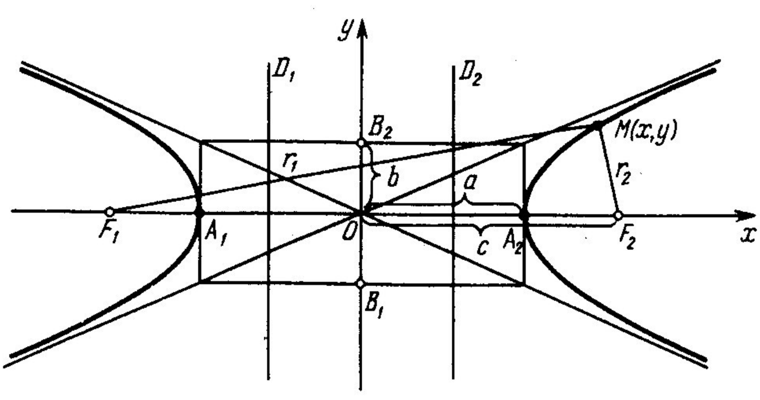
2.1.2. **Гипербола**

(др.-греч. ὑπερβολή, от др.-греч. βαλειν — «бросать», ὑπερ — «сверх»)

Гиперболой называется геометрическое место точек на плоскости, для каждой из которых абсолютное значение разности расстояний до двух данных точек, называемых фокусам, одинаково и равно 2a.

Каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$.

Рассмотрим её график в прямоугольной системе координат и основные элементы (рис. 7).



(рис. 7)

В гиперболе можно выделить следующие элементы:

- **действительная, или поперечная, ось** - прямая, содержащая большую ось гиперболы - ось симметрии Ox;
- **мнимая, или сопряжённая, ось** - прямая, перпендикулярная действительной оси и проходящая через её центр, - ось симметрии Oy;
- **ветви** - две отдельные кривые, из которых, собственно, и состоит гипербола;
- **вершины** - ближайшие друг к другу точки ветвей;
- **большая ось** - кратчайшее расстояние между ветвями гиперболы;
- **центр** - середина большой оси;
- **большая** и **малая полуоси** - отрезки **a** и **b** (см. рис. 7);
- **фокусы** - точки $\mathbf{F_1}$(-c; 0) и $\mathbf{F_2}$(c; 0), где $c = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$;
- **фокальные радиусы** - расстояния $r_1 = |\overline{F_1M}|$ и $r_2 = |\overline{F_2M}|$ от каждого из фокусов до данной точки (т. М); вычисляются по формулам: $r(M) = \pm a + ex$ (для точки на правой ветви) и $r(M) = \pm a - ex$ (для точки на левой);
- **фокальные радиус-векторы** - векторы $\overline{F_1M}$ и $\overline{F_2M}$;
- **фокальное расстояние** - расстояние $c = \dfrac{|F_1F_2|}{2}$ от центра гиперболы до одного из фокусов;
- **фокальный параметр** $p = \dfrac{b^2}{a}$ - отрезок между фокусом гиперболы и гиперболой, перпендикулярный её действительной оси;
- **асимптоты - прямые** $y = \pm \dfrac{b}{a}x$**;**
- **прицельный параметр** - расстояние от фокуса до асимптоты гиперболы (численно равен b);
- **диаметр** - прямая, проходящая через середины параллельных хорд; **главные диаметры** - действительная и мнимая оси;
- **директрисы** D_1: $x = -\dfrac{a}{e}$ и D_2: $x = \dfrac{a}{e}$ - прямые, перпендикулярные действительной оси и проходящие на расстоянии $\dfrac{a}{e}$ от центра;

Некоторые свойства гиперболы и её элементов:

- $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ $(e > 1)$ - **эксцентриситет** - мера вытянутости гиперболы.
- Частный случай гиперболы - равносторонняя гипербола; при этом $a = b$, $e = \sqrt{2}$, угол α (угол между асимптотами) равен 90º.
- Для любой точки, лежащей на гиперболе, отношение расстояния от этой точки до фокуса к расстоянию от этой же точки до директрисы есть величина постоянная.
- Гипербола обладает зеркальной симметрией относительно действительной и мнимой осей, а также вращательной симметрией при повороте на угол 180° вокруг центра гиперболы.
- Каждая гипербола имеет *сопряженную гиперболу*, для которой действительная и мнимая оси меняются местами, но асимптоты остаются прежними. Это соответствует замене a и b друг на друга в формуле, описывающей гиперболу. Сопряженная гипербола не является результатом поворота начальной гиперболы на угол 90°; обе гиперболы различаются формой.
- *Зеркальное свойство:* касательная к гиперболе является биссектрисой угла, образованного фокальными радиусами точки касания, т.е. луч света, выпущенный из фокуса гиперболы, после отражения от зеркала гиперболы, кажется наблюдателю идущим из другого фокуса гиперболы.

Далее приведены несколько примеров практических задач.

Задача №1.

Построить гиперболу $16x^2 - 9y^2 = 144$. Найти: а) полуоси; b) координаты фокусов; с) эксцентриситет; d) уравнения асимптот; е) уравнения директрис.

Решение:

Сначала приведём уравнение к каноническому виду: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

a) полуоси: a=3, b=4;

b) $c = \sqrt{a^2 + b^2} \longrightarrow c = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \rightarrow$

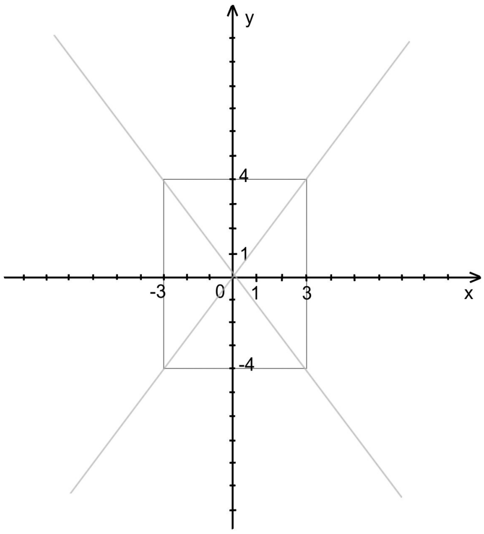
координаты фокусов: $F_1(-5; 0)$ и $F_2(5; 0)$;

c) эксцентриситет: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$;

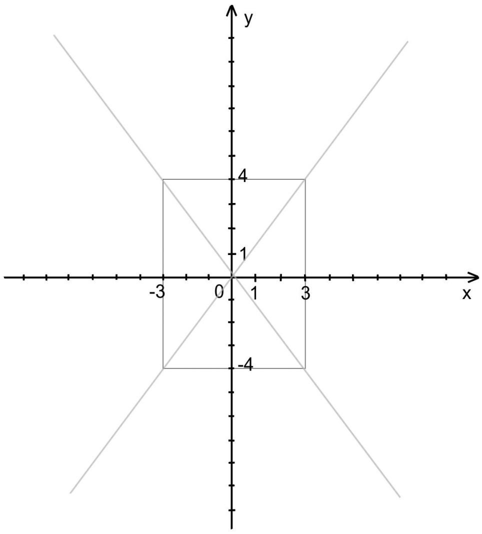
d) уравнения асимптот: $y_1 = -\frac{4}{3}x$, $y_2 = \frac{4}{3}x$;

е) уравнения директрис: D_1: $x = -\frac{3}{5} = -0{,}6$, D_2: $x = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

График будет выглядеть следующим образом (рис. 8):



(рис. 8)



(рис. 9)

<u>Задача №2.</u>

Построить гиперболу $16x^2 - 9y^2 = -144$ (сопряжённую к гиперболе из задачи №1).

<u>Решение:</u>

Для сопряжённой гиперболы действительная и мнимая оси меняются местами. Звучит это просто, но при построении могут возникнуть трудности. Чтобы этого не случилось, нужно знать что, во-первых, асимптоты для обеих гипербол - оригинала и сопряжённой - одинаковы, а во-вторых, в уравнении второй a меняется на b.

Таким образом, чтобы построить сопряжённую к данной в задаче №1 гиперболу, я воспользовалась уравнением $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Получился график (рис. 9).

<u>Задача №3.</u>

<u>Решение:</u>

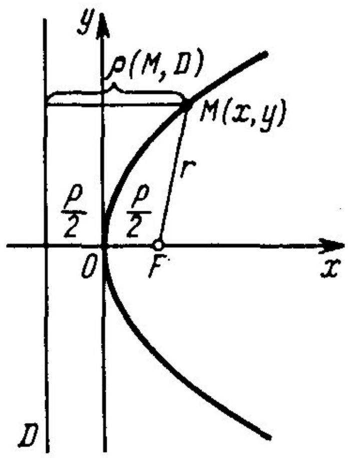
2.1.2. **Парабола**

(греч. παραβολή — приложение)

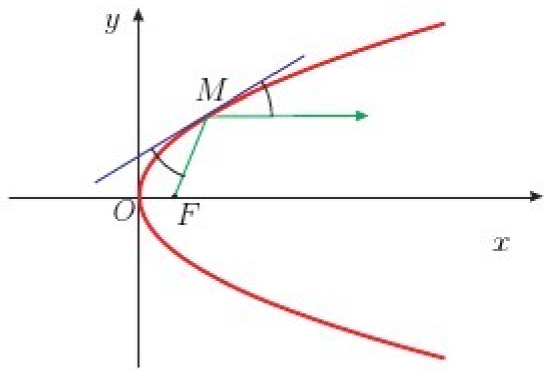
Параболой называется множество точек на плоскости, расстояния от которых до данной точки, называемой фокусом, и до данной прямой, называемой директрисой, равны.

Каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2px$, $p > 0$.

Рассмотрим её график в прямоугольной системе координат и основные элементы (рис. 10).



(рис. 10)



(рис. 11)

В параболе можно выделить следующие элементы:

- **ось** - прямая, содержащая перпендикуляр, опущенный из фокуса на директрису;
- **параметр p -** расстояние от фокуса до директрисы;
- **вершина** - середина отрезка от фокуса до директрисы - т. О;
- **фокус** - точка $\mathbf{F_1}(p/2;\ 0)$;
- **фокальный радиус** - расстояние $r = |F_1M|$ от фокуса до данной точки (т. М);
- **фокальный радиус-вектор** - вектор $\overline{F_1M}$;
- **директриса** D: $x = -\frac{p}{2}$ - прямая, перпендикулярная оси и проходящая на расстоянии $\frac{p}{2}$ от вершины.

В параболе можно выделить следующие элементы:

- Все параболы подобны. Расстояние между фокусом и директрисой определяет масштаб.
- Ось параболы также является осью её симметрии.
- *Зеркальное свойство №1*: пучок лучей, параллельных оси параболы, отражаясь в параболе, собирается в её фокусе. И наоборот, свет от источника, находящегося в фокусе, отражается параболой в пучок параллельных её оси лучей.
- *Зеркальное свойство №2*: касательная к параболе в каждой точке М составляет равные углы с фокальным радиусом точки М и с осью параболы (рис. 11).

Ну и конечно три задачи на закрепление материала.

Задача №1.

Решение:

Задача №2.

Решение:

Задача №3.

Решение:

С гиперболой мы часто сталкиваемся в повседневной жизни. По параболистической траектории летит брошенный вверх камень, отскакивает мяч от пола, движутся планеты вокруг Солнца.

2.2. Нестандартные кривые II порядка

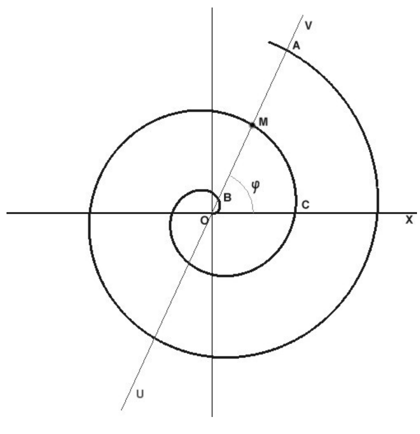
Просмотрев этот раздел, неосведомлённый человек может подумать, что часть нестандартных кривых второго порядка можно спокойно отнести к стандартным, другая же часть не имеет с ними ничего общего. Некоторые из них действительно представляют собой красивые витиеватые узоры, но некоторые выглядят как-то слишком просто, без изысков. Конечно, такое мнение имеет место существовать. Но ведь дело в степени и области применения кривых: одни встречаются постоянно, другие - только в узких специализированных целях - и в сложности уравнения

Хотелось бы в этом разделе рассмотреть 5 наиболее интересных кривых: спираль Архимеда, лемниската Бернулли, улитка Паскаля, астроида, декартов лист (уравнения приведены для прямоугольной и/или полярной системы координат, график в одной системе). В разделе «Кривые II порядка в различных системах координат» я попытаюсь перевести их графики в другую систему координат.

1. Спираль Архимеда.

Архимедова спираль — спираль, плоская кривая, траектория точки M, которая равномерно движется вдоль луча OV с началом в т. O, в то время как сам луч OV равномерно вращается вокруг т. O.

График в полярной системе координат задаётся уравнением $r = a\varphi$ и выглядит так:



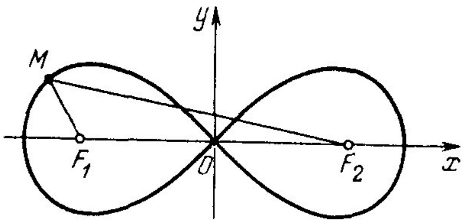
(рис. 12)

2. Лемниската Бернулли.

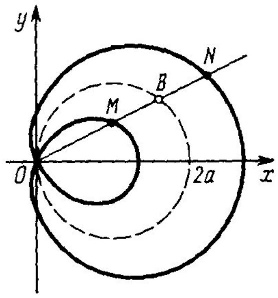
Лемниската Бернулли - геометрическое множество точек на плоскости, произведение расстояний от которых до двух заданных точек (фокусов) постоянно и равно квадрату половины расстояния между фокусами.

Уравнение лемнискаты в прямоугольной системе координат: $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2(x^2-y^2)$, а в полярной: $r^2=2a^2\cos 2\varphi$.

График напоминает бесконечность (рис. 13).



(рис. 13)



(рис. 14)

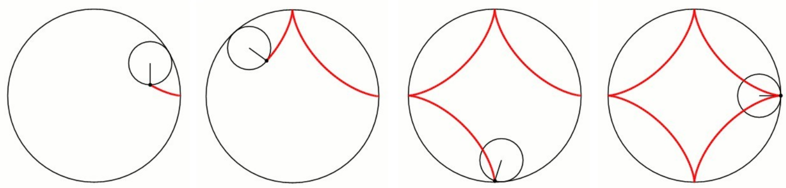
3. Улитка, или Лимакон, Паскаля.

Улитка Паскаля - геометрическое место точек M и $M1$, расположенных на прямых пучка с центром в точке O, лежащей на данной окружности радиуса R, и находящих-ся на равном расстоянии a по обе стороны от точки пересечения P прямых пучка с окружностью, где $a < 2R$.

Задаётся уравнениям $\left(x^2+y^2-2ax\right)^2=b^2\left(x^2+y^2\right)$, или $r=2a\cos\varphi\pm b$, и графиком имеет следующую фигуру (рис. 14).

4. Астроида.

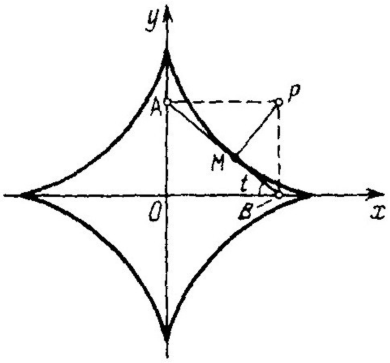
Астроида - плоская кривая, описываемая точкой окружности радиуса r, катящейся по внутренней стороне окружности радиуса R = 4r (рис. 15).



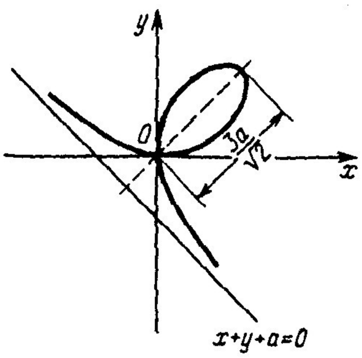
Построение циклоиды

(рис. 15)

Кривая задаётся уравнениями: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ и $\begin{matrix} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{matrix}$, $t\in[0;2\pi)$. График (рис. 16).



(рис. 16)



(рис. 17)

5. <u>Декартов лист.</u>

Декартов лист - плоская кривая, удовлетворяющая уравнению в прямоугольной системе $x^3 + y^3 = 3axy$.

График выглядит следующим образом (рис. 17)

Все вышеуказанные кривые встречаются на практике инженерных расчетов. Вывод уравнений этих кривых может быть предложен в качестве задач повышенной трудности при изучении курса аналитической геометрии. Детальное изучение формы кривых может быть выполнено с привлечением методов дифференциального исчисления, но это уже выходит за рамки моего исследования.

2.3 Системы координат

Система координат — комплекс определений, реализующий метод координат, то есть способ определять положение точки или тела с помощью чисел или других символов. Совокупность чисел, определяющих положение конкретной точки, называется координатами этой точки.

Знания обычного человека в большинстве случаев ограничиваются одной-двумя системами координат. На самом же деле их существует великое множество: прямоугольная, полярная, аффинная, сферическая, цилиндрическая и т.д. На одном из уроков алгебры мы мальком затрагивали кое-какие из них, а в это исследовании я решила сопоставить две: прямоугольную (ёще называющуюся декартовой) и полярную (как хорошо знакомую и в корне отличающуюся).

2.3.1. Декартова система координат

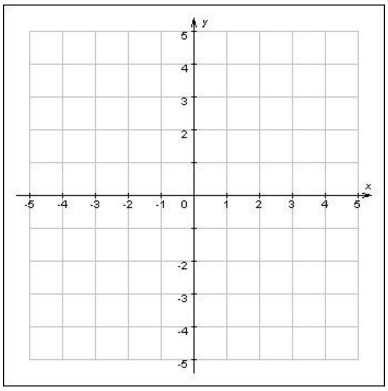
Прямоугольная, или Декартова, система координат - прямолинейная система координат на плоскости или в пространстве, обычно с взаимно перпендикулярными осями и одинаковыми масштабами по осям. Названа по имени Р Декарта.

Это наиболее простая и поэтому часто используемая система координат как на плоскости, так и в пространстве.

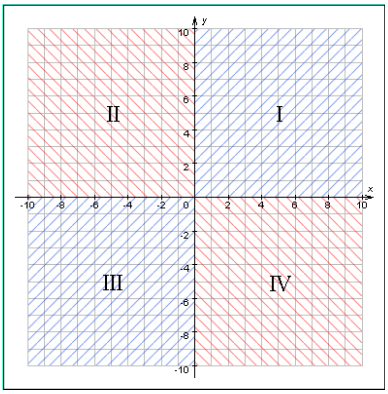
Немного истории. Декарт впервые ввел координатную систему в своей работе «Рассуждение о методе» в 1637 году. Она существенно отличалась от общепринятой в наши дни. Он использовал косоугольную систему координат на плоскости, рассматривая кривую относительно некоторой прямой с фиксированной системой отсчета. Положение точек кривой задавалось с помощью системы параллельных отрезков, наклонных или перпендикулярных к исходной прямой. Декарт не вводил второй координатной оси, не фиксировал направления отсчета от начала координат. Только в 18 в. сформировалось современное понимание координатной системы, получившее имя Декарта.

Данная система координат на плоскости образуется двумя взаимно перпендикулярными осями координат OX и OY. Эти оси пересекаются в точке O, которая называется началом координат, на каждой оси выбрано положительное направление, указанное стрелками, и единица измерения отрезков на осях. Единицы измерения одинаковы для обеих осей (рис. 18).

Положительное направление осей (в правосторонней системе координат) выбирают так, чтобы при повороте оси OX против часовой стрелки на 90° её положительное направление совпало с положительным направлением оси OY. Четыре угла - четверти (I, II, III, IV) - образованные осями координат OX и OY, называются координатными углами (рис. 19).

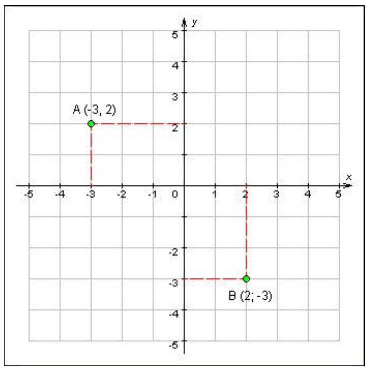


(рис. 18)



(рис. 19)

Как определить координаты точки в декартовой системе координат? Проведем через точку A прямые, перпендикулярные осям. Расстояния от точек пересечения построенных прямых с осями абсцисс, ординат до начала координат, взятые со знаком «+» (если точки лежат на положительных полуосях) или со знаком «–» (если они лежат на



отрицательных полуосях) и будут координатами точки А. Координаты точки записываются в скобках: например, А (–3; 2) или В (x_0; y_0). Порядок записи координат существенен; так, например, точки *(рис. 20)*
А (–3; 2) и В (2; –3) – это абсолютно различны (рис. 20).

2.3.2. **Полярнаясистема координат**

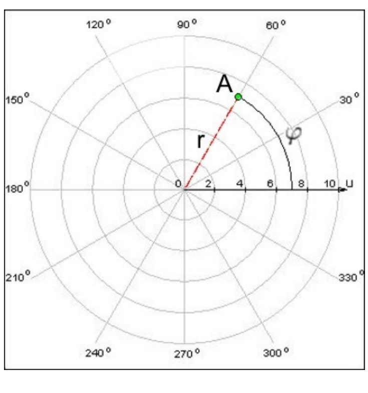
Полярная система координат — двумерная система координат, в которой каждая точка на плоскости определяется двумя числами — полярным углом и полярным радиусом.

Полярная система координат особенно полезна в случаях, когда отношения между точками проще изобразить в виде радиусов и углов; в более распространённой, декартовой или прямоугольной системе координат, такие отношения можно установить только путём применения тригонометрических уравнений.

Немного истории. Существуют разные версии о том, как и когда формально ввели полярную систему координат. Ещё в древности намёки на полярные координаты появлялись у Архимеда и греческого астронома Гиппарха, но работы их не развились в целостное определение полярной системы координат. Полную историю возникновения и исследования описаны в работе профессора из Гарварда Джулиан Лоувел Кулидж «Происхождение полярных координат». Грегуар де Сен-Венсан и Бонавентура Кавальери независимо друг от друга пришли к похожей концепции в середине XVII века. Сен-Венсан описал полярную систему в личных заметках в 1625 году, напечатав свои труды в 1647; а Кавальери напечатал свои труды в 1635 году, и исправленную версию в 1653 году. К этой теме в какой-то степени обращались также Исаак Ньютон и Якоб Бернулли.

Введение же термина «полярные координаты» приписывают Грегорио Фонтана. В XVIII веке он входил в лексикон итальянских авторов. В английский язык термин попал через перевод трактата Сильвестра Лакруа «Дифференциальное и интегральное исчисление», выполненного в 1816 году Джорджем Пикоком.

Полярная система координат задаётся лучом u, который называют нулевым, или полярной осью. Направлен он обычно, как ось OX в прямоугольной системе координат, и на нём выбирается произвольная единица измерения отрезков. Точка O, из которой выходит этот луч, называется началом координат, или полюсом.



Любая точка на плоскости определяется двумя полярными координатами: радиальной и угловой - A(r; φ). Радиальная координата (обычно обозначается r) соответствует расстоянию от точки до начала координат. Угловая координата, также называется полярным углом, или азимутом, и обозначается φ, равна углу, на который нужно повернуть против часовой стрелки полярную ось для того, чтобы попасть в эту точку (рис. 21).

(рис. 21)

Определённая таким образом радиальная координата может принимать значения от нуля до бесконечности, а угловая координата изменяется в пределах от 0° до 360°. Однако, для удобства область значений полярной координаты можно расширить за пределы полного угла, а также разрешить ей принимать отрицательные значения, что отвечает повороту полярной оси по часовой стрелке.

Уравнение кривой в полярной системе координат имеет вид $F(r,\varphi)=0$ или $r=f(\varphi)$.

2.3.3. Связь между двумя системами координат

Наверное, это естественно, что обе системы связаны между собой, так как одни и те же кривые чаще всего могут быть построены в обеих. Но ведь нельзя же строить график в полярной системе по уравнению для декартовой? Как же тогда быть?

Специально для этого были придуманы формулы перехода из одной системы в другую. Вот они:

1. $x = r\cos\varphi$;
   $y = r\sin\varphi$;
2. $r^2 = x^2 + y^2$;
3. $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$.

Ими я воспользуюсь при построении графиков в следующем разделе.

3. Кривые второго порядка в различных системах координат

Эта часть является самой главной в моей работе, так как в ней описывается решение мной задач на исследуемую тему. Подбирая задания, мы старались по возможности увеличивать сложность

Также было решено, что ход решения будет не напечатан, а записан от руки, т.к. это, во-первых, значительно ускоряет процесс, а, во-вторых, автору работы намного легче чертить карандашом, чем с помощью компьютерных программ.

Так как задач было много, я выбрала 5 самых основных и интересных.

<u>Задача №1.</u> Построить кривую, заданную уравнением $r = 2\cos\varphi$, в полярной и прямоугольной системах координат.

<u>Решение:</u>

4. Заключение

Вот и подошло к концу моё исследование. Работа показалась мне непростой, но интересной и познавательной. В результате я получила полезные для себя знания и потренировала навыки, как жизненно важные, так и связанные с самой работой. К числу первых можно отнести усидчивость, стремление достигать поставленных целей, умение работать с такими компьютерными программами как Microsoft Word и Corel Photo-Paint и находить нужную информацию в интернете, навык проведения большого исследования.

Что же касается знаний/умений, полученных при выполнении именно исследования кривых второго порядка в различных системах координат, то здесь нужно выделить, конечно же, расширение моего кругозора в области различных видов кривых, умение строить графики как простые, так и более трудные, навык работы с новой системой координат.

Итогом работы можно считать успешное достижение поставленных целей: я расширила свои знания и получила практику в области построения графиков, а также сравнила способы построения кривых II порядка в различных системах координат. И, как оказалось, кривые в рассматривавшихся системах выглядят совершенно одинаково.

Конечно же, во время выполнения работы возникали небольшие трудности. Например, мы долго решали, в каком порядке выполнять поставленные задачи. Ещё мы долго решали одно особенно трудное задание.

Но, несмотря на сложности, работу удалось выполнить успешно.

Кривые II порядка, безусловно, очень интересная тема, несмотря на то, что она не пригождается в обычной жизни, а в трудовой нужна только тем, кто решает связать свою жизнь с математикой, математическим моделированием или инженерией. Хотя я не собираюсь становиться математиком или инженером, мне всё же придётся столкнуться с этой темой в университете, так как продолжать своё обучение я намерена на техническом факультете ВУЗа. Безусловно, сделав эту работу, я приобрела огромный опыт, который пригодится мне на первом же курсе.

Я была рада открыть для себя новую сферу в такой замечательной науке - математике, - и надеюсь, что в будущем мне выпадет шанс глубже изучить её.

P.S.: спасибо моему научному руководителю за помощь и поддержку!

5. Список использованной литературы

1. http://ru.wikipedia.org/wiki/Эллипс;
2. http://fxdx.ru/page/zerkalnoe-svojstvo-ellipsa;
3. http://ru.wikipedia.org/wiki/Гипербола;
4. http://fxdx.ru/page/kasatelnaja-k-giperbole-zerkalnoe-svojstvo-giperboly;
5. http://ru.wikipedia.org/wiki/Парабола;
6. http://ru.wikipedia.org/wiki/Лемниската_Бернулли;
7. http://ru.wikipedia.org/wiki/Архимедова_Спираль;
8. http://ru.wikipedia.org/wiki/Улитка_Паскаля;
9. http://ru.wikipedia.org/wiki/Декартов_Лист;
10. http://ru.wikipedia.org/wiki/Астроида;
11. http://www.megabook.ru/Article.asp?AID=628331;
12. http://mathematics.ru/courses/function/content/chapter1/section2/paragraph1/theory.html;
13. http://ru.wikipedia.org/wiki/Полярная_система_координат#.D0.9A.D0.BE.D0.BC.D0.BF.D0.BB.D0.B5.D0.BA.D1.81.D0.BD.D1.8B.D0.B5_.D1.87.D0.B8.D1.81.D0.BB.D0.B0.