Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ учащихся

«Прикладные вопросы математики»

Математическое моделирование

Решение задач гравитационного взаимодействия

Нестеров Кирилл, Бояршинов Роман

МОУ «Лицей №1» г. Перми, 11 кл.

Волегов Павел Сергеевич

к.ф.-м.н., доц. каф. ММСП

ПНИПУ

Пермь

2011

Оглавление

Введение

Вселенная – система систем, включающая в себя системы, состоящие из всех естественных космических объектов, обращающиеся вокруг какой либо звезды: планеты и их спутники, карликовые планеты и их спутники, а также малые тела — астероиды, кометы, метеороиды[1], космическая пыль. Все планеты обращаются вокруг своей звезды в одном направлении, по эллиптическим орбитам с небольшим эксцентриситетом и малым наклонением к плоскости эклиптики, т. е. плоскости орбиты планеты. В Солнечной системе самой большой угловой скоростью обладает Меркурий — он успевает совершить полный оборот вокруг Солнца всего за 88 земных суток.

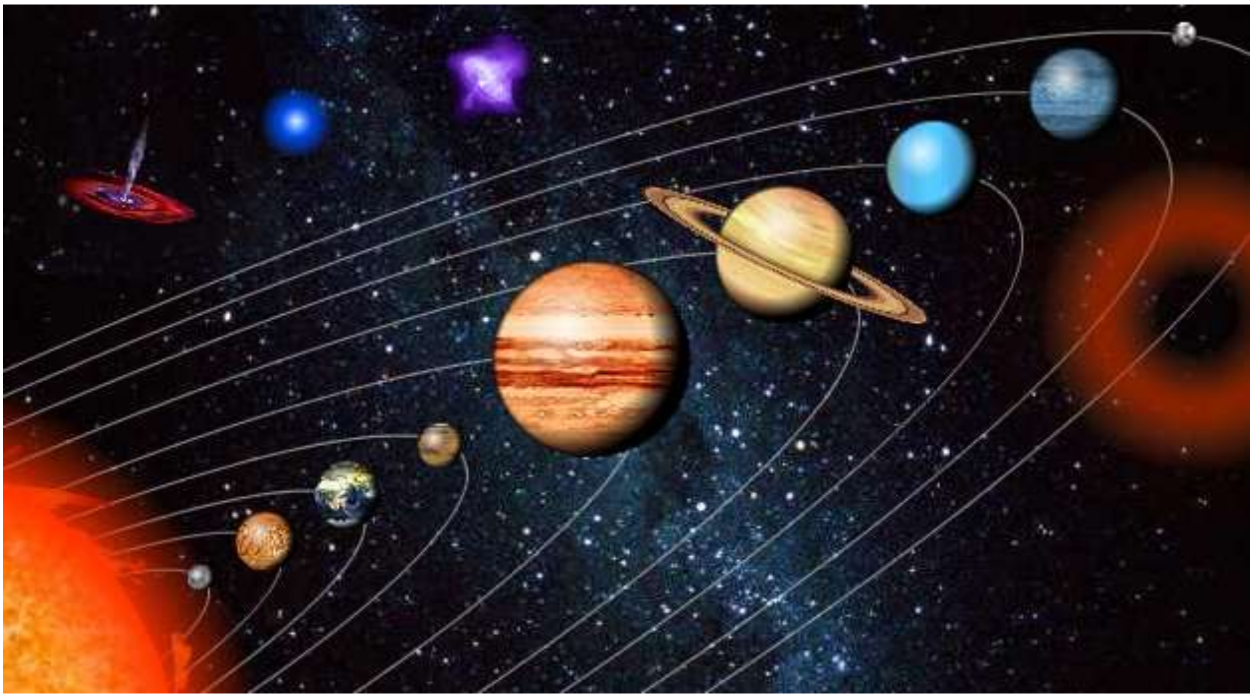


Рис.1. Простейшее представление космической (Солнечной) системы.

[1] Метеро́ид — космическое тело, промежуточное по размеру между межпланетной пылью и астероидом. , метеороид — это твёрдый объект, движущийся в межпланетном пространстве, размером значительно меньше астероида, но значительно больше атома.

Глава 1

Актуальность и новизна

Тема актуальна тем, что при запуске искусственного спутника на орбиту какой либо планеты, на этот спутник будут действовать не только силы гравитационного взаимодействия, действующие на этот спутник со стороны планеты вокруг которой вращается спутник, и звезды вокруг которой вращается планета, но и возможно силы магнитного взаимодействия. Так как в космосе существуют магнитные поля, исходящие из планет, звезд и их спутников. При запуске искусственного спутника на орбиту планеты, спутник приобретает остаточный заряд за счет трения об атмосферу планеты. Таким образом, в работе необходимо ответить на вопрос, следует ли учитывать влияние на траекторию движения спутника наличие силы Лоренца.

Некоторые данные о планетах Солнечной системы

§1.1. Планеты солнечной системы

Планеты солнечной системы - это те планеты, которые астрономы включили в состав Солнечной системы. В связи с этим необходимо сразу оговориться, т.к. эти планеты в действительности не являются составляющими ни солнечной системы, ни какой-либо системы вообще. Эти планеты являются своего рода отражением тех планетарных образований, которые неизвестны астрономам, т.к. они расположены в своих обособленных пространственных структурах, входящих в состав Большой Вселенной. Однако оставим прежнее, ранее принятое и привычное название этих планет и будем также называть их планетами солнечной системы.

Меркурий

Первая от Солнца, самая наименьшая планета Солнечной системы, обращающаяся вокруг Солнца за 88 дней. Планету никогда нельзя увидеть на тёмном ночном небе: Меркурий всегда скрывается в утренней или вечерней заре. Меркурий движется вокруг Солнца по довольно сильно вытянутой эллиптической орбите (эксцентриситет[2] 0,205) на среднем расстоянии 57,91 млн. км (0,387 а. е.)[3]. В перигелии[4] Меркурий находится в 45,9 млн. км от Солнца, в афелии[5] — в 69,7 млн. км. Наклон орбиты к плоскости эклиптики[6] равен 7°. На один оборот по орбите Меркурий затрачивает 87,97 суток. Средняя скорость движения планеты по орбите 48 км/с.

Венера

Вторая планета Солнечной системы с периодом обращения в 224,7 Земных дня. Планета получила своё название в честь Венеры, богини любви из римского пантеона. Венера классифицируется как землеподобная планета, и иногда её называют «Сестра-планета Земли», потому что обе планеты похожи размерами, силой тяжести и составом. Поскольку Венера ближе к Солнцу чем Земля, она никогда не кажется слишком удалённой от Солнца: максимальный угол между ней и Солнцем составляет 47.8°.Среднее расстояние Венеры от Солнца 108 млн. км (0,723 а. е.). Её орбита очень близка к круговой — эксцентриситет составляет всего 0,0068. Период обращения вокруг Солнца равен 224,7 суток; средняя орбитальная скорость — 35 км/с. Наклон орбиты к плоскости эклиптики равен 3,4°.

---

[2] эксцентриситет (обозначается “e” или “ε”) — числовая характеристика конического сечения. Эксцентриситет инвариантен относительно движений плоскости и преобразований подобия.

[3] астрономическая единица (а. е.) — исторически сложившаяся единица измерения расстояний в астрономии, в Системе постоянных равная 149 597 870,610 км. Астрономическая единица приблизительно равна среднему расстоянию между центрами масс Земли и Солнца.

[4] перигелий – ближайшая к солнцу точка орбиты.

[5] афелий – наиболее удаленная точка орбиты

[6] эклиптика (от лат. (linea) ecliptica, от греч. ἔκλειψις — затмение), большой круг небесной сферы, по которому происходит видимое годичное движение Солнца, точнее — его центра.

Земля

Третья от Солнца планета Солнечной системы, крупнейшая по диаметру, массе и плотности среди землеподобных планет. Земля обращается вокруг Солнца и делает вокруг него полный оборот примерно за 365,26 дней. Этот отрезок времени — Сидерический год[7], который равен 365,26 солнечным суткам. Ось вращения Земли наклонена на 23,4 ° относительно её орбитальной плоскости, это вызывает сезонные изменения на поверхности планеты с периодом в один Тропический год[8] (365.24 солнечных суток).

Марс

Четвёртая по удалённости от Солнца и седьмая по размерам планета Солнечной системы. Эта планета названа в честь Марса — древнеримского бога войны, соответствующего древнегреческому Аресу. Минимальное расстояние от Марса до Земли составляет 55,75 млн. км, максимальное — около 401 млн. км. Среднее расстояние от Марса до Солнца составляет 228 млн. км (1,52 а. е.), период обращения вокруг Солнца равен 687 земным суткам. Орбита Марса имеет довольно заметный эксцентриситет (0,0934), поэтому расстояние до Солнца меняется от 206,6 до 249,2 млн. км. Наклонение орбиты Марса равно 1,85°.

Юпитер

Пятая планета от Солнца, и крупнейшая в Солнечной системе. Юпитер в 2 раза массивней, чем все остальные планеты Солнечной системы вместе взятые. Юпитер — самая большая планета Солнечной системы. Его экваториальный радиус равен 71,4 тыс. км, что в 11,2 раза превышает радиус

[7] Сидерический год (от _la. sidus, родительный падеж _la. sideris — звезда, небесное светило) — промежуток времени, в течение которого тело Солнечной системы (планета, астероид, комета) совершает полный оборот вокруг Солнца

[8] Тропический год - промежуток времени между двумя последовательными прохождениями Солнца через весеннего равноденствия точку. Содержит 365,242196 средних солнечных суток.

Земли. Масса Юпитера более чем в 2 раза превышает суммарную массу всех остальных планет солнечной системы, в 318 раз — массу Земли и всего в 1000 раз меньше массы Солнца. Период вращения 9,925 часов, наклон оси вращения 3,13°.

Сатурн

Шестая планета от Солнца и вторая по размерам планета в Солнечной системе после Юпитера. Сатурн назван в честь Римского бога Сатурна, аналога греческого Кроноса (Титана, отца Зевса) и Вавилонского Нинурты. Афелий 1 513 325 783 км, Перигелий 1 353 572 956 км, Большая полуось[9] 1 433 449 370 км, Орбитальный эксцентриситет0.055 723 219.

Уран

Седьмая по удалённости от Солнца, третья по диаметру и четвёртая по массе планета Солнечной системы. Период полного обращения Урана вокруг Солнца составляет 84 земных года. Большая полуось орбиты равна 19,229 а.е., или около 3 млрд. км. Период вращения Урана вокруг своей оси составляет 17 часов 24 минут.

Нептун

Восьмая и самая дальняя планета Солнечной системы. Нептун также четвёртый по диаметру и третий по массе. Нептун в 17 раз массивнее Земли и немного более массивный чем похожий на него Уран, который в 15 раз превосходит Землю по массе и менее плотный чем Нептун. Планета была названа в честь Римского бога морей. Ее средняя удаленность от Солнца – 30 а.е., период обращения по орбите – 164 года и 280 суток.

[9] Большая полуось — это половина главной оси эллипса. В астрономии характеризует среднее расстояние небесного тела от фокуса

§1.2. Сила Лоренца

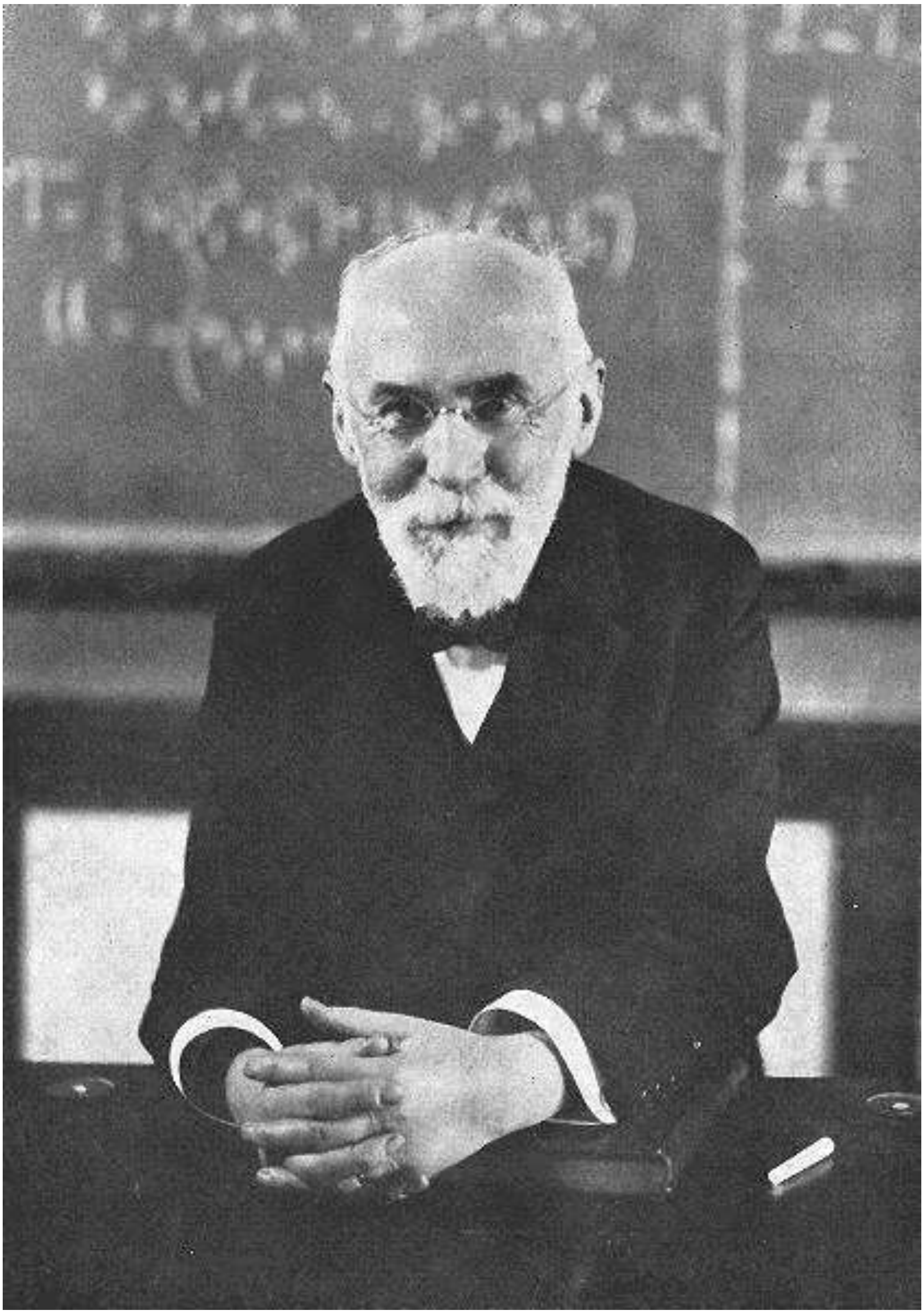


Рис.2. Хендрик Антуан Лоренц.

На электрический заряд, движущийся в магнитном и электрическом поле, действует сила

$$F = q\left[\overline{E} + \overline{v} \times \overline{B}\right] ,$$

где Q - величина движущегося заряда, V - скорость заряда, B - индукция магнитного поля, E – напряженность электрического поля.

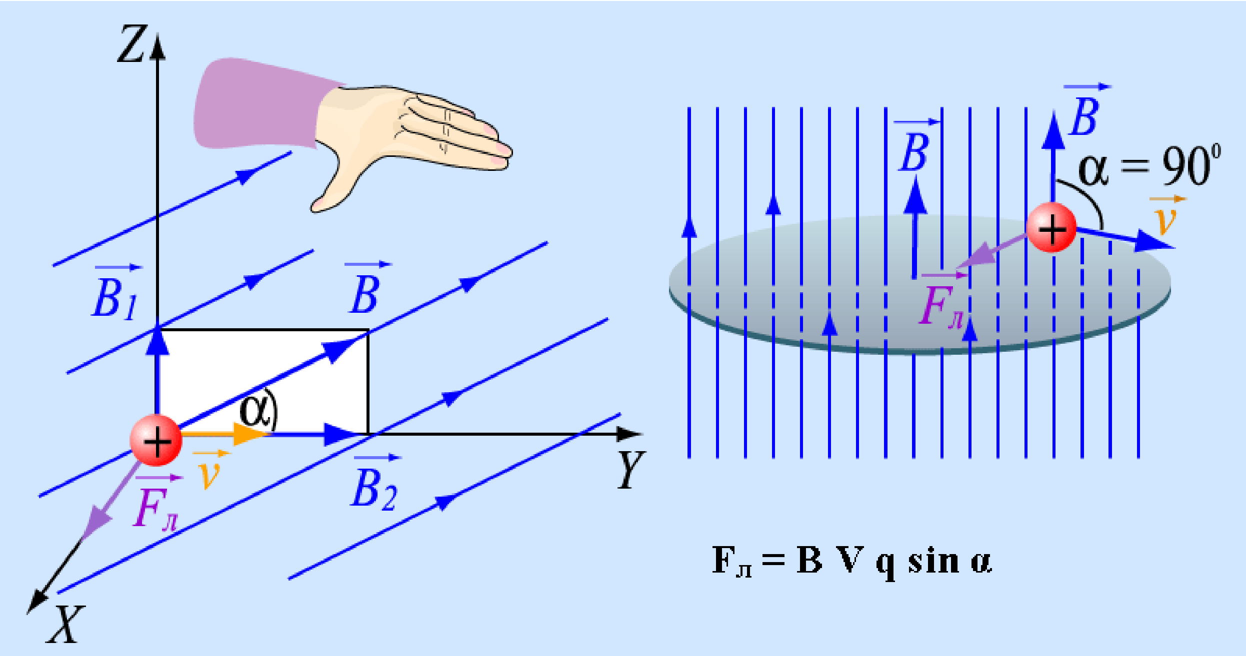


Рис.3.Правило левой руки.

Направление силы Лоренца определяется по правилу правой руки или винта. Поворачивая вектор скорости к вектору магнитного поля правой рукой. Большой палец правой руки будет направлен в ту же сторону что и сила Лоренца.

Так как в космосе нет электрических полей формула силы Лоренца примет вид $F = q\left(\bar{v} \times \bar{B}\right)$;

При запуске искусственного спутника на орбиту планеты, спутник приобретает заряд за счет трения с атмосферой планеты.

Будем считать, что в космическом пространстве действуют остаточные магнитные поля, а также магнитные поля планет и близлежащих звезд.

Для упрощения поставленной задачи магнитное поле будет считаться однородным и постоянным.

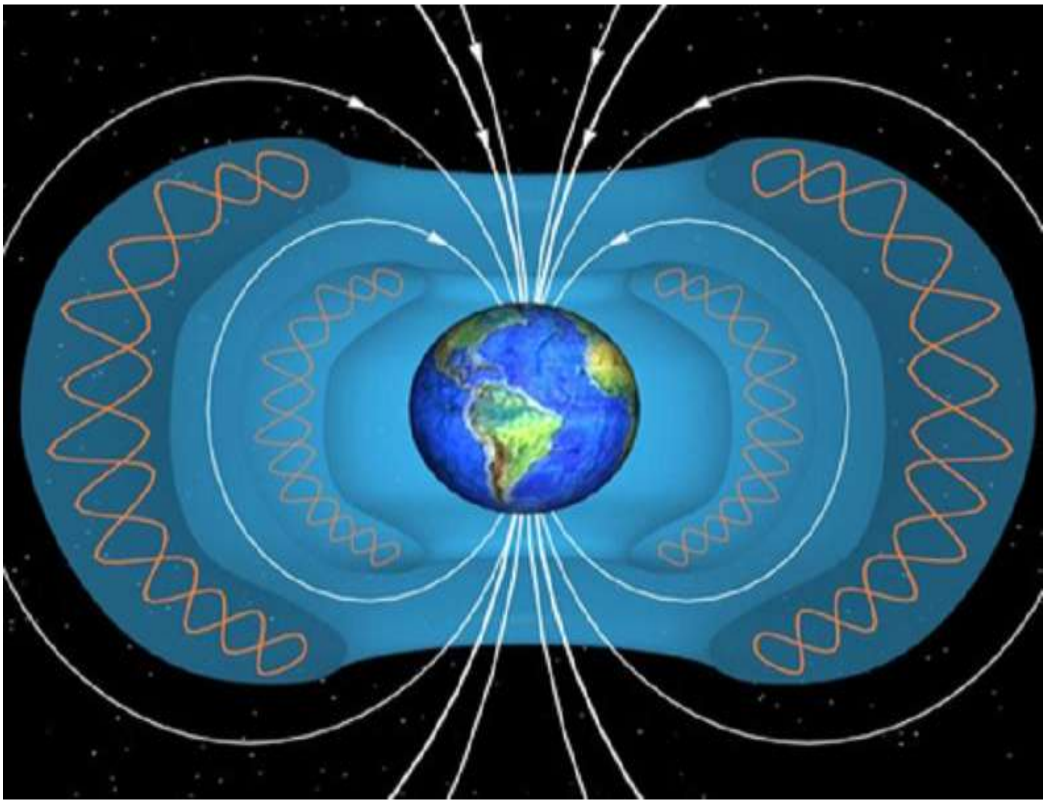


Рис.4. Простейшее представление магнитного поля Земли в виде линий.

Подведем итог этого раздела: при запуске искусственного спутника на орбиту планеты, спутник приобретает заряд за счет силы сопротивления атмосферы, спутник приобретает скорость, и двигаясь в магнитном поле планеты изменяет свое ускорение, траекторию, скорость за счет силы Лоренца.

Глава 2

Концептуальная постановка

Цель работы:

Создать модель, которая позволяла бы строить траекторию движения спутников планет относительно звезды помещенной в начало координат и при этом выполнялись бы законы гравитационного взаимодействия и силы магнитного взаимодействия (силы Лоренца). При построении модели, для упрощения производимых выкладок, представляется возможным принять следующие гипотезы:

- взаимодействие точечное, т.е. планеты в рамках данной работы представляются материальными точками, так как расстояния между планетами, звездой, спутниками настолько велико по сравнению с диаметром самих тел, что размерами тел можно пренебречь.
- сопротивления среды нет.
- звезда неподвижна, находится в центре координат.

Предполагаемое явление стандартное. Со звездой связана абсолютно неподвижная система отсчета.

- Выполняются законы классической механики. Скорость движения планет много меньше скорости света.
- Внешнее магнитное поле однородно и постоянно.
- Спутник обладает зарядом.

Глава 3

Дифференциальные уравнения

Дифференциальное уравнение - в математике это уравнение, связывающее значение некоторой неизвестной функции в некоторой точке и значение её производных различных порядков в той же точке. Дифференциальное уравнение содержит в своей записи неизвестную функцию, ее производные и независимые переменные; однако не любое уравнение, содержащее производные неизвестной функции, является дифференциальным уравнением.

§3.1 Методы решения дифференциальных уравнений.

Решить дифференциальное уравнение численным методом – это значит для заданной последовательности аргументов X_0, $X_1, \ldots,$ X_n и числа Y_0 ,не определяя функцию $Y = F(x)$,а найти такие значения Y_0, $y_1, \ldots, y_n$, что $Y_i =$ $F(X_i)$(i = 1,2,..,n) и $F(x_0) = Y_0$. Таким образом, численные методы позволяют вместо нахождения функции $Y = F(x)$ получить таблицу значений этой функции для заданной последовательности аргументов. Величина h = x_k-x_{k-1} называется шагом интегрирования.

Метод Эйлера[10] относится к численным методам, дающим решение в виде таблицы приближенных значений искомой функции $Y = F(x)$. Он является сравнительно грубым и применяется в основном для ориентировочных расчетов. Однако идеи, положенные в основу метода Эйлера являются исходными для ряда других методов.

Метод Эйлера - простейший одношаговый метод. Его можно выводить из разных соображений. Например, пусть $U(x)$ - скалярная непрерывно дифференцируемая функция, т.е. в каждой точке x существует производная

[10] Леона́рд Э́йлер (нем. Leonhard Euler; 4 (15) апреля 1707, Базель — 7 (18) сентября 1783, Санкт-Петербург) — выдающийся математик, внёсший значительный вклад в развитие математики, а также механики, физики, астрономии и ряда прикладных наук.

$$\frac{du(x)}{dx} = \lim_{k\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}$$

Тогда при малых h

$$\frac{du(x)}{dx} \approx \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$$

и выражение

$$\frac{u(x+h)-u(x)}{h}$$

может использоваться в качестве разностной аппроксимации для первой производной. Рассмотрим задачу Коши для одного скалярного уравнения

$$u'(x) = f(x,u)$$
$$u(x_0) = u_0$$

на отрезке $[x_0;b]$ и в узлах сетки заменим производную ее разностной аппроксимацией. В результате получим систему уравнений для нахождения сеточной функции:

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h} = f(x_i, y_i), y_0 = u_0, i = 1,2,3....n-1$$

Эта система уравнений называется разностной схемой Эйлера. Для нахождения y_{i+1} имеем явную формулу

$$y_{i+1} = y_i + h\cdot f(x_i, y_i)$$

§3.1 Решение задачи методом Эйлера

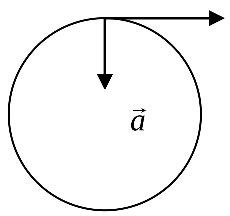
Математическое моделирование гравитационного взаимодействия

Переход от физической постановки задачи к её практической реализации. В качестве физической задачи будет рассматриваться задача гравитационного взаимодействия частиц в двумерном случае. Данная задача имеет большое значение в настоящее время, так как с её помощью можно описать движение планет в галактике, образование самих галактик, а также естественных спутников планет. При внешней простоте закона гравитационного взаимодействия описание движения частиц чрезвычайно сложно, а в основном и не осуществимое, поэтому нам и приходится строить математические аналоги физических законов и исследовать их.

Постановка задачи

Дадим основные определения, которые нам понадобятся в ходе решения задачи.

Ускорение ($\vec{a}$) – изменение скорости в единицу времени. Ускорение может быть тангенциальным и нормальным, первое (тангенциальное) описывает изменение модуля скорости в течение времени, второе (нормальное) характеризует изменение направления, частным случаем нормального ускорения является центростремительное ускорение. Тангенциальное ускорение описывается законом $\vec{a} = \frac{V - V_0}{t}\vec{\tau}$, центростремительное ускорение направлено к центру окружности, по которому движется тело, а модуль ускорения вычисляется по формуле $a = \frac{V^2}{r}$



.

Сила – количественная мера взаимодействия. По второму закону Ньютона $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$.

Гравитационное взаимодействие двух тел описывается гравитационной силой, которая записывается в виде:

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r},$$

где m_1, m_2 – массы взаимодействующих тел, r – расстояние между телами, G – гравитационная постоянная.

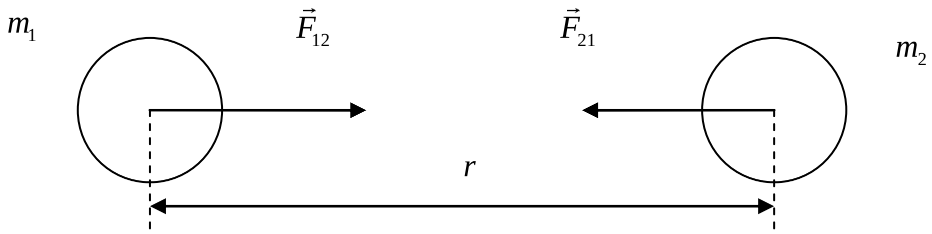
После приведения основных определений определим задачу. Задача будет состоять в описании движения частиц, взаимодействующих посредством гравитационной силы. Описание движения будет состоять в нахождении координат каждой частицы на плоскости в определённые моменты времени. Фактически нам будут известны координаты и скорости каждой частицы в определённый момент времени, затем по соответствующим законам находится координаты частиц в следующий момент времени. Запишем схему более подробно:

1. Нахождение действующих сил в данный момент времени для каждой частицы.
2. Нахождение ускорения по силе и массе частицы в данный момент времени.
3. Нахождение координаты и скорости в следующий момент времени с использованием ускорения, скорости и предыдущей координаты.

Рассмотрим детально схему на примере взаимодействия двух тел, более сложные варианты взаимодействия (в случае нескольких частиц) сводятся к варианту взаимодействия двух тел.

1. Нахождение сил, действующих на тело

Пусть тела имеют массы m_1, m_2 и координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2), также известны их скорости в данный момент времени $\vec{V}_1 = \{V_{1x}, V_{1y}\}$ и $\vec{V}_2 = \{V_{2x}, V_{2y}\}$. Исходя из формулы для гравитационной силы, нам требуется найти расстояние между частицами и направление. Рассмотрим нахождение силы для первого тела, на которое действует второе



Расстояние между частицами будет находиться по формуле $r=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}$, а направление данного вектора будем находить как разность координаты данного тела и тела, с которым взаимодействует рассматриваемое тело. Так для первого тела формула для вектора $\vec{r}$ будет следующей $\vec{r}=\left\{x_1-x_2, y_1-y_2\right\}=\left\{r_x, r_y\right\}$. Тогда, зная массы тел и расстояние с его направлением, получим силу, действующую на первое тело со стороны второго: $\vec{F}_{12}=\left\{-G\frac{m_1 m_2}{r^3}r_x, -G\frac{m_1 m_2}{r^3}r_y\right\}=\left\{F_{x12}, F_{y12}\right\}$. Аналогично вычисляется сила, действующая на второе тело со стороны первого. В общем случае при движении нескольких тел силы складываются, так, например, при взаимодействии n тел формула силы для i-й частицы будет иметь следующий вид: $\vec{F}_i=\sum_{j\neq i}\vec{F}_{ij}=\left\{\sum_{j\neq i}F_{xij}, \sum_{j\neq i}F_{yij}\right\}=\left\{F_{xi}, F_{xi}\right\}$.

2. Нахождение ускорения тела при известной действующей силе

По второму закону Ньютона $\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m}$, при известной силе ускорение i-го тела находится по формуле: $\vec{a}_i=\left\{\frac{F_{xi}}{m_i}, \frac{F_{yi}}{m_i}\right\}=\left\{a_{xi}, a_{yi}\right\}$.

3. Нахождение координаты и скорости в следующий момент времени

Координата тела в общем виде находится по формуле: $\vec{s}=\vec{s}_0+\vec{V}t+\frac{\vec{a}t^2}{2}$, где $\vec{s}_0=\left\{s_{0x}, s_{0y}\right\}$ – координаты тела в текущий момент времени, $\vec{V}=\left\{V_x, V_y\right\}$ – скорость тела в текущий момент времени, $\vec{a}=\left\{a_x, a_y\right\}$ – ускорение, которое образуется в результате воздействия гравитационных сил, t – временной шаг, в течении которого мы принимаем действие гравитационных сил постоянным. В итоге получим формулу для вычисления координаты тела в следующий момент времени: $\vec{s} = \left\{ s_{0x} + V_x t + \frac{a_x t^2}{2}, s_{0y} + V_y t + \frac{a_y t^2}{2} \right\}$.

Скорость в следующий момент времени будем вычислять по формуле $\vec{V} = \{V_x + a_x t, V_y + a_y t\}$.

В качестве второго теста на правильность решения задачи будем полагать тест на первую космическую скорость, то есть скорость, при которой тело будет находиться на орбите другого тела. Выведем первую космическую скорость.

Если тело находится на орбите другого тела, то модуль скорости не изменится, а изменится только направление, тогда в данный момент времени мы можем приравнять суммарную силу к нулю. То есть, перейдя к скалярным величинам, получим соотношение $\frac{V^2}{r} m_2 - G\frac{m_1 m_2}{r^2} = 0$ (будем полагать, что второе тело находится на орбите первого тела), тогда выражая квадрат скорости, получим соотношение вида: $V^2 = \frac{Gm_1}{r}$ или в приведённой форме $V = \sqrt{\frac{Gm_1}{r}}$.

Глава 4

Математическая постановка задачи

Рассматриваем один произвольный спутник с соответствующей планетой и получаем уравнение движения для него.

Найти: требуется в каждый момент времени найти координаты X,Y спутника.

Начальные условия задачи:

$X_0 = R$

$Y_0 = 0$

$V_{0x} = 0$

$V_{0y} = V_0$

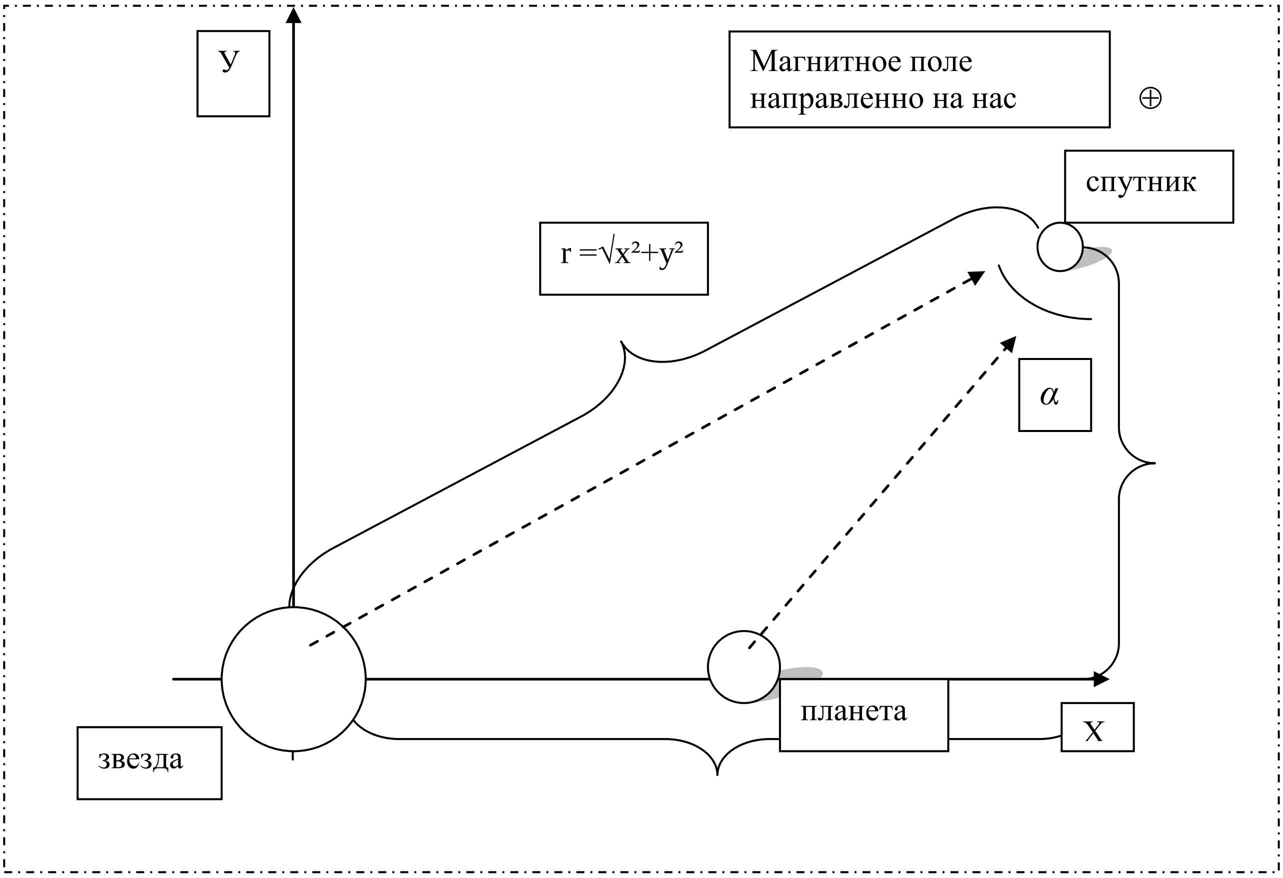


Рис.5. К выводу уравнений движения планеты

Сила, действующая на спутник со стороны звезды

Движение спутника мы рассчитываем вторым законом Ньютона:

$$F = m * a,$$

откуда мы выражаем ускорение и получаем формулу:

$$a = \frac{F}{m}$$

теперь можно записать проекцию на ось x,y (см. рис 3):

$$a_X(x,v) = \frac{(\cos\alpha * F)}{m}$$

$$a_Y(y,v)=\frac{(\sin\alpha * F)}{m}$$

из геометрических соображений можно записать тригонометрические функции угла α:

$$\sin\alpha=\frac{y}{b}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{b}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

где $b^2 = x^2+y^2$

воспользуемся так же законом всемирного тяготения:

$$F=\frac{-G(M*m)}{b^2}$$

Теперь можно подставить наши полученные данные в исходные формулы (проекции на оси):

$$a_X=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}*\frac{G*m}{x^2+y^2}$$

$$a_Y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}*\frac{G*m}{x^2+y^2}$$

Сила, действующая на спутник со стороны планеты, рассчитывается по такому же принципу

Когда найдено ускорение из силы гравитационного взаимодействия, нужно добавить силу Лоренца

$$F=q(\bar{v}\times\bar{B})$$

Силу Лоренца можно записать так:

$$F=q*\begin{Bmatrix} i*\bar{v}_X\times\bar{B} \\ j*\bar{v}_Y\times\bar{B} \\ k*\bar{v}_Z\times\bar{B} \end{Bmatrix}=q*\begin{Bmatrix} i*\bar{v}_X\times 0 \\ j*\bar{v}_Y\times 0 \\ k*0\ \times\bar{B} \end{Bmatrix}$$

Откуда видно, что проекция силы Лоренца на оси X и Y равны соответственно

$$F_X=-qv_XB$$

$$F_Y = qv_Y B$$

После чего найдем ускорение, поделив на массу спутника

$$a_x = \frac{-qv_X B}{m}$$

$$a_Y = \frac{qv_Y B}{m}$$

Теперь можно посчитать ускорение спутника с учетом сил гравитационного взаимодействия и магнитных сил, сложив полученные пары проекций и получив, таким образом, дифференциальные уравнение второго порядка,

$$\ddot{x} = GM\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{-qv_x B}{m} + GM_З\frac{x_З}{(x_З{}^2+y_З{}^2)^{3/2}},$$

$$\ddot{y} = GM\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{qv_{Yx} B}{m} + GM_З\frac{y_З}{(x_З{}^2+y_З{}^2)^{3/2}},$$

которые позволяют найти координаты спутника в каждый момент времени.

Список используемой литературы

1. Б.М. Яворский, А.А. Детлаф, А.К. Лебедев. Справочник по физике для инженеров и студентов.
2. Б.М. Яворский, А.А Пинский. Основы физики том 2.
3. Г.Я. Мякишев, Б.Б. Буховцев. Классический курс физики 11 класс.
4. В.В. Фаронов. Delphi программирование на языке высокого уровня.