

Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ учащихся  
«Прикладные вопросы математики»

Математический анализ

**Численные методы интегрирования и  
решения дифференциальных уравнений**

Новопоселенки Виталий,  
МОУ «Лицей №1» г. Перми, 11 кл  
Анферов Сергей Дмитриевич,  
преподаватель информатики  
МОУ «Лицей №1» г. Перми

## Метод Эйлера

- простейший конечно-разностный метод численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

с начальным условием  $y(x_0) = y_0$ .

Выбирается достаточно малый шаг  $h$  по оси  $x$ , строятся точки  $x_i = x_0 + ih$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , и искомая интегральная кривая  $y(x)$  заменяется ломаной (ломаная Эйлера), звенья которой прямолинейны на отрезках  $[x_i, x_{i+1}]$ , а ординаты определяются по формулам

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Если правая часть  $f(x, y)$  уравнения (1) непрерывна, то последовательность ломаных Эйлера при  $h \rightarrow 0$  на достаточно малом отрезке  $[x_0, x_0 + H]$  равномерно стремится к искомой интегральной кривой  $y(x)$ .

Э. м. заключается в том, что интеграл дифференциального уравнения (1) на каждом последовательном отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  представляется двумя членами ряда Тейлора

$$y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

На каждом шаге Э. м. имеет погрешность порядка  $h^2$ . Для уточнения Э. м. используются различные модификации. Напр., в усовершенствованном методе ломаных вместо формулы (2) для определения ординат используют формулу

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

где

$$x_{i+1/2} = x_i + h/2, \quad y_{i+1/2} = y_i + (h/2)f(x_i, y_i), \quad (4)$$

то есть учитывают направление поля интегральных кривых в средней точке (4) звена ломаной.

Другой модификацией Э. м. является усовершенствованный метод Эйлера - Коши:

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})}{2}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

где

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i).$$

Последний метод можно еще более уточнить, применив итерационную обработку каждого значения  $y_{i+1}$ :

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i^{(k-1)})], \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

где  $y_i$  — нулевое приближение

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i).$$

Итерационный расчет по формуле (б) продолжают до тех пор, пока два последовательных приближения  $y_{i+1}^{(k)}$  и  $y_{i+1}^{(k+1)}$  не совпадут между собой в заданном числе десятичных знаков. Если после трех - четырех итераций совпадение требуемого числа десятичных знаков не достигается, то это указывает на необходимость уменьшения шага  $h$ . Э. м. с итерационной обработкой ординат дает на каждом шаге погрешность порядка  $h^3$ . Э. м. и его модификации переносятся на более общий случай решения системы и обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y'_k = f_k(x, y_1, \dots, y_n), \quad k = 1, \dots, n, \quad \text{при заданных начальных условиях } y_k(x_0) = y_{k0}.$$

условиях

Алгоритм вычислений по Э. м. легко программируется и удобен для реализации на ЭВМ.

## Метод Рунге-Кутты

Метод позволяет решать системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка следующего вида:

$$\dot{X} = f(t, X, Y, \dots) \downarrow$$

$$\dot{Y} = g(t, X, Y, \dots),$$

и т.д.,

которые имеют решение:

$$X = X(t),$$

$$Y = Y(t),$$

и т.д.,

где  $t$  - независимая переменная (например, время);  $X$ ,  $Y$  и т.д. - искомые функции (зависимые от  $t$  переменные). Функции  $f$ ,  $g$  и т.д. - заданы. Также предполагаются заданными и начальные условия, т.е. значения искомых функций в начальный момент.

Одно диф. уравнение - частный случай системы с одним элементом. Поэтому, далее речь пойдет для определенности о системе уравнений.

Метод может быть полезен и для решения диф. уравнений высшего (второго и т.д.) порядка, т.к. они могут быть представлены системой диф. уравнений первого порядка.

Метод Рунге-Кутты заключается в рекуррентном применении следующих формул:

$$X_{k+1} = X_k + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$Y_{k+1} = Y_k + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4), \dots,$$

где

$$k_1 = f(t_k, X_k, Y_k, \dots)\Delta t,$$

$$m_1 = g(t_k, X_k, Y_k, \dots)\Delta t, \dots,$$

$$k_2 = f\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}, X_k + \frac{k_1}{2}, Y_k + \frac{m_1}{2}, \dots\right)\Delta t,$$

$$m_2 = g\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}, X_k + \frac{k_1}{2}, Y_k + \frac{m_1}{2}, \dots\right)\Delta t, \dots,$$

$$k_3 = f\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}, X_k + \frac{k_2}{2}, Y_k + \frac{m_2}{2}, \dots\right)\Delta t,$$

$$m_3 = g\left(t_k + \frac{\Delta t}{2}, X_k + \frac{k_2}{2}, Y_k + \frac{m_2}{2}, \dots\right)\Delta t, \dots,$$

$$k_4 = f(t_k + \Delta t, X_k + k_3, Y_k + m_3, \dots)\Delta t,$$

$$m_4 = g(t_k + \Delta t, X_k + k_3, Y_k + m_3, \dots)\Delta t, \dots$$

## Метод прямоугольников

Простейшим методом численного интегрирования является *метод прямоугольников*. Он непосредственно использует замену определенного интеграла интегральной суммой:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i, \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad (7.3)$$

Разобьём интервал интегрирования  $[a, b]$  на  $n$  равных частей. Обозначим  $\Delta x_i = h$  шаг разбиения. Формула прямоугольника применяется к каждому отрезку. В качестве точек  $\xi_i$  выбираются левые ( $\xi_i = x_{i-1}$ ) или правые ( $\xi_i = x_i$ ) границы элементарных отрезков (рис.7.1).

Соответственно, для этих двух случаев можно записать формулы метода прямоугольников:

$$\int_a^b f(x) dx = h_1 \cdot f(x_0) + h_2 \cdot f(x_1) + \dots + h_n \cdot f(x_{n-1}) \quad (7.4)$$

$$\int_a^b f(x) dx = h_1 \cdot f(x_1) + h_2 \cdot f(x_2) + \dots + h_n \cdot f(x_n) \quad (7.5)$$

Более точным является вид формулы прямоугольников, использующий значения функции в средних точках элементарных отрезков: точка  $\bar{x}_i$ . Таким образом, площадь криволинейной трапеции заменяется суммой прямоугольников с основанием  $h$  и высотами, равными значениям функции  $f(x)$  в середине оснований  $f(\bar{x}_i)$  (рис.7.2).

Получим формулу:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i), \quad \text{где } \frac{b-a}{n} = h, \quad (7.6)$$

или

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \cdot \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) \quad (7.7)$$

На рис.7.3. приведена блок- - схема метода прямоугольников

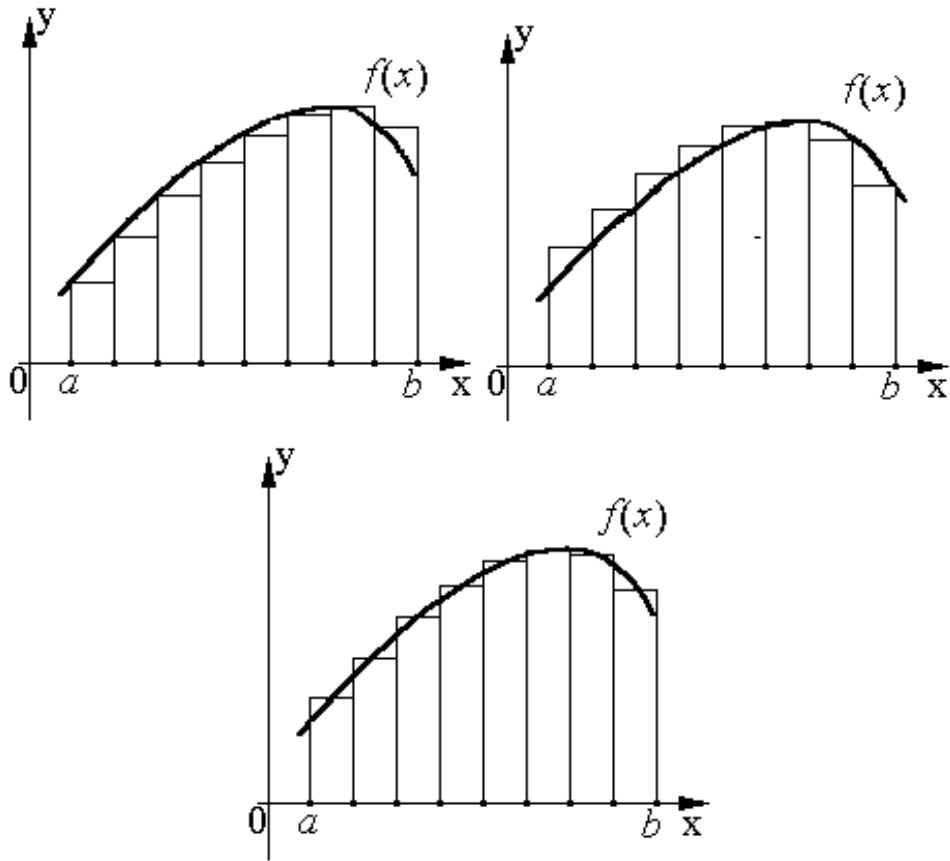


Рис.7.1

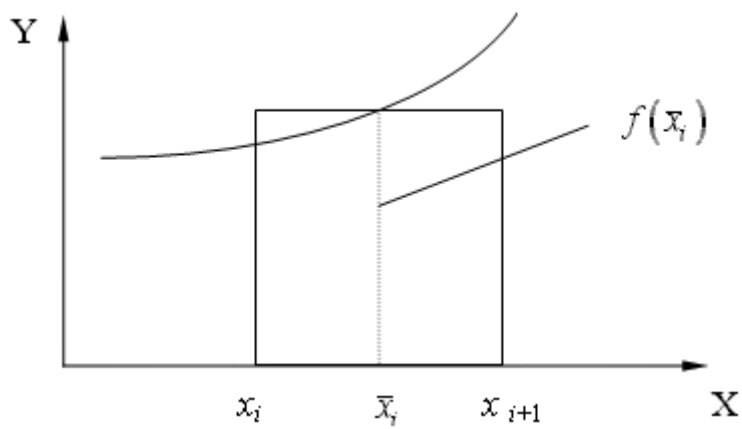


Рис.7.2

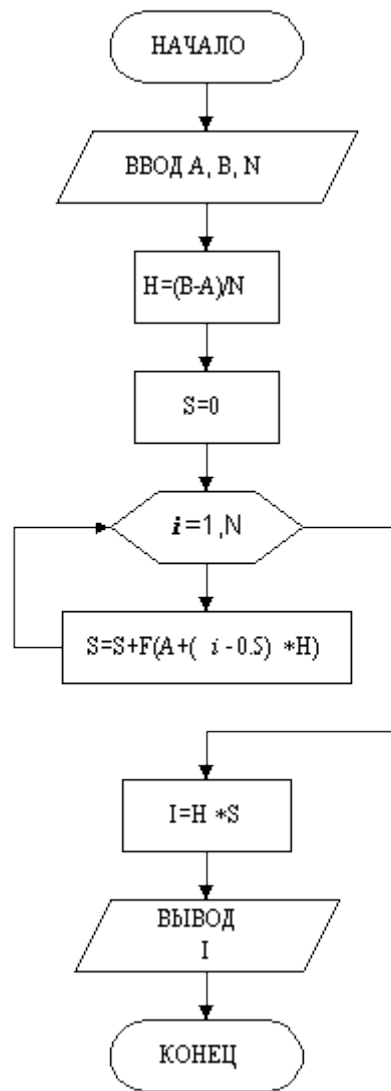


Рис.7.3. Блок-схема метода прямоугольников



## Метод трапеций

Метод трапеций использует линейную интерполяцию, т.е. график функции  $y=f(x)$  представляется в виде ломаной, соединяющей точки  $(x_i, y_i)$ . В этом случае площадь всей криволинейной трапеции складывается из площадей элементарных прямоугольных трапеций (рис.7.4 а, 7.4 б)

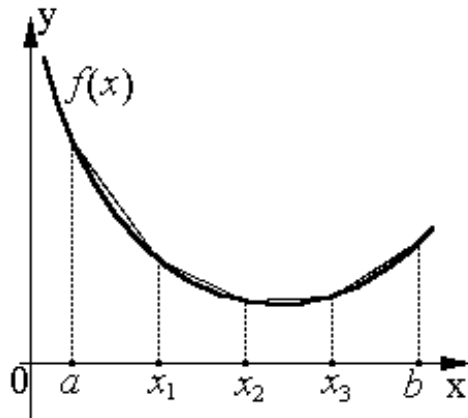


Рис.7.4 а

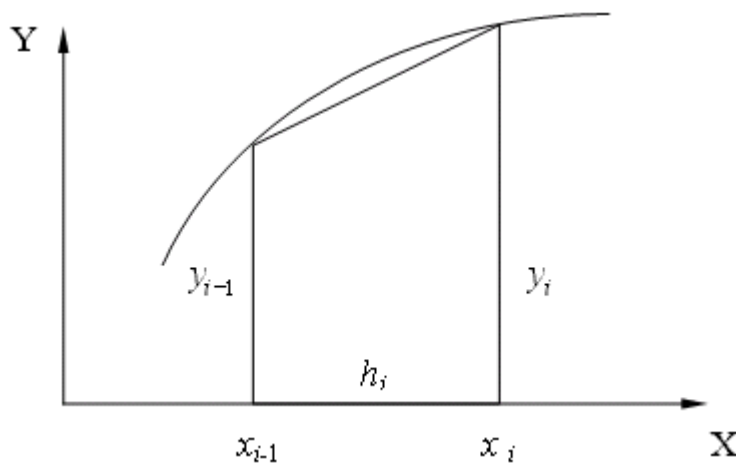


Рис.7.4 б

Площадь каждой такой трапеции определяется по формуле:

$$S_i = \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \cdot h_i, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (7.8)$$

$h = \frac{b-a}{n}$ , где  $n$  - число интервалов разбиения.

Складывая все эти равенства, получим *формулу трапеций* для численного интегрирования:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n s_i = \frac{h}{2} \cdot \sum_{i=1}^n (y_{i-1} + y_i) \quad (7.9)$$

или

$$\int_a^b f(x) dx = h \cdot \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \quad (7.10)$$

Формулы (7.9) и (7.10) можно представить в виде:

$$\int_a^b f(x) dx = h \cdot \left( \frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right) \quad (7.11)$$

$$\int_a^b f(x) dx = h \cdot \left( \frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right) \quad (7.12)$$

Блок - схема алгоритма метода трапеций приведена на рис.7.5.

## Метод парабол (формула Симпсона)

Этот метод более точный по сравнению с методами прямоугольников и трапеций.

В основе формулы Симпсона лежит квадратичная интерполяция подынтегральной функции на отрезке  $[a, b]$  по трем равноотстоящим узлам.

Разобьем интервал интегрирования  $[a, b]$  на четное число  $n$  равных отрезков с шагом  $h$ .

Примем:  $x_0=a, x_1=x_0+h, \dots, x_n=x_0+nh=b$ .

Значения функций в точках обозначим соответственно:

$$y_0=f(a); y_1=f(x_1); y_2=f(x_2); \dots; y_n=f(b).$$

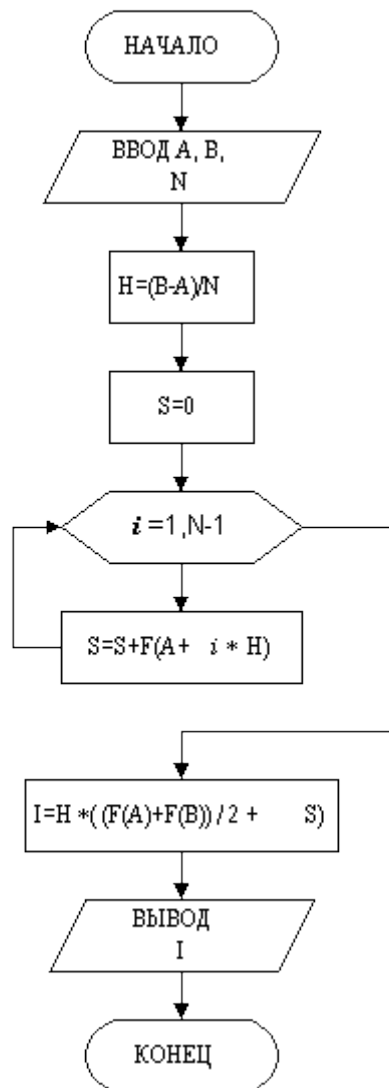


Рис. 7.5. Блок-схема метода трапеций

На каждом отрезке  $[x_0, x_2]$ ,  $[x_2, x_4]$ , ...,  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$  подынтегральную функцию  $f(x)$  заменим интерполяционным многочленом второй степени.

$$f(x) \approx P_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i, \text{ где } x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1}. \quad (7.13)$$

В качестве  $P_i(x)$  можно принять интерполяционный многочлен Лагранжа второй степени, проходящий через концы каждой трех ординат:

$$y_0, y_1, y_2 ; y_2, y_3, y_4 ; y_4, y_5, y_6 ; \dots ; y_{n-2}, y_{n-1}, y_n.$$

Формула Лагранжа для интервала  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ :

$$P_i = \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})} \cdot y_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} \cdot y_i + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)} \cdot y_{i+1}.$$

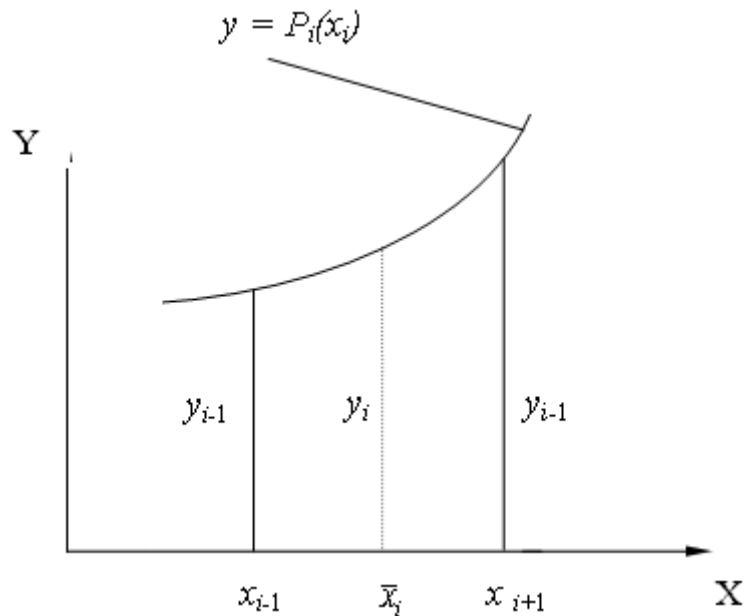


Рис. 7.6.

Элементарная площадь  $s_i$  (рис.7.6) может быть вычислена с помощью определенного интеграла. Учитывая, что  $x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i = h$  и, проведя вычисления, получим для каждого элементарного участка:

$$s_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} P_i(x) dx = \frac{h}{3} \cdot (y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}) \quad (7.14)$$

После суммирования интегралов по всем отрезкам, получим составную формулу Симпсона:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \cdot [y_0 + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + y_n] \quad (7.15)$$

Часто пользуются простой формулой Симпсона:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \cdot \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \quad (7.16)$$

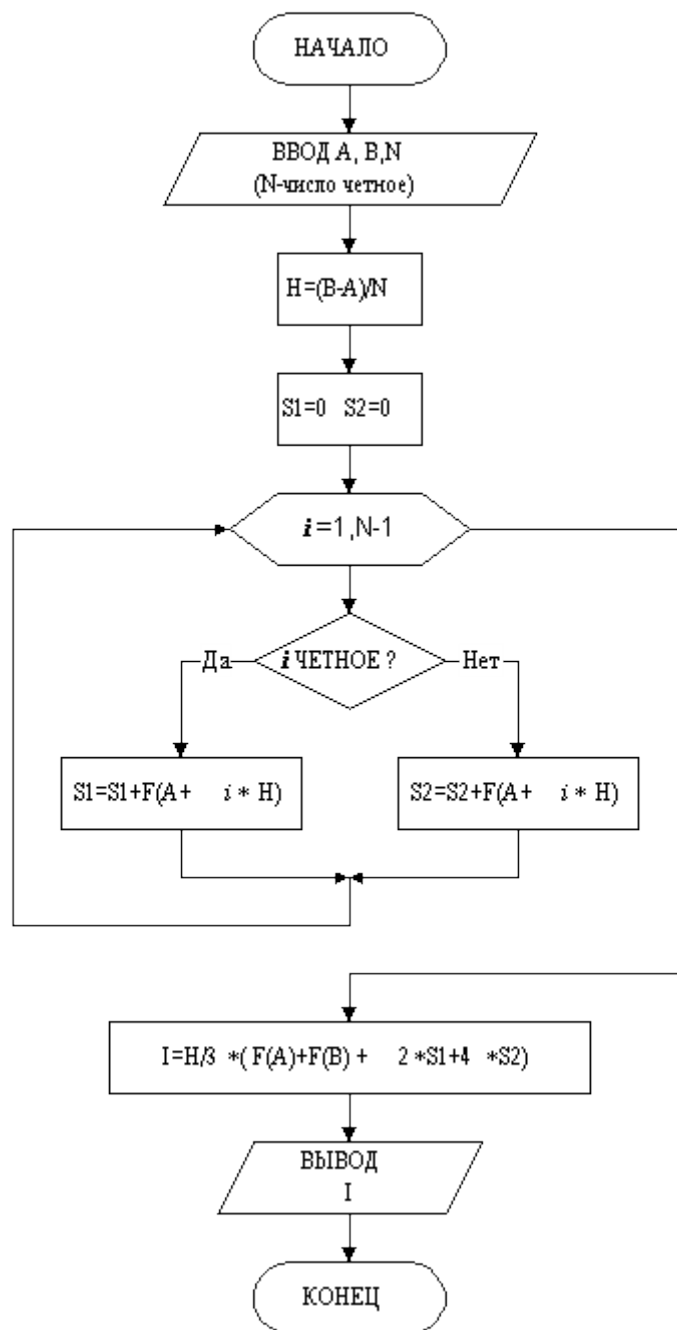


Рис.7.7. Блок-схема метода Симпсона

**Пример 7.1.** Вычислить интеграл

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

Разбиваем интервал интегрирования на 10 равных частей:  $n=10$ . Шаг интегрирования  $h = (1-0)/10=0.1$ . Результаты вычислений подынтегральной функции приведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$					
$x_i$	$x_i^2$	$1+x_i^2$	$f(x_i) \ i=1,3,\dots$	$f(x_i) \ i=2,4,\dots$	$f(x_0), f(x_{10})$
0.0	0.00	1.00	--	--	1.00000
0.1	0.01	1.01	0.99010	--	--
0.2	0.04	1.04	--	0.96154	--
0.3	0.09	1.09	0.91743	--	--
0.4	0.16	1.16	--	0.76207	--
0.5	0.25	1.25	0.70000	--	--
0.6	0.36	1.36	--	0.073529	--
0.7	0.49	1.49	0.67114	--	--
0.7	0.64	1.64	--	0.60976	--
0.9	0.71	1.71	0.55249	--	--
1.0	1.00	2.00	--	--	0.50000
		$\Sigma$	3.93116	3.16766	1.50000

Вычислим интеграл по формуле трапеций (7.12):

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 0.1 \left( \frac{1+0.5}{2} + 3.93116 + 3.16866 \right) = 0.78498,$$

по формуле Симпсона (7.15):

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{0.1}{3} (1 + 0.5 + 4 * 3.93116 + 2 * 3.16866) = 0.78540.$$

Для вычисления интеграла по методу прямоугольников, необходимо вычислить значения функции в середине каждого элементарного отрезка:  $f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right)$  или  $f(\bar{x}_i)$ . Результаты вычислений подынтегральной функции приведены в табл. 7.2.

Таблица 7.2

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$			
$x_i$	$\bar{x}_i$	$\bar{x}_i^2$	$f(x) = \frac{1}{1+\bar{x}^2}$
0.0	0.05	0.0025	0.9975
0.1	0.15	0.0225	0.9770
0.2	0.25	0.0625	0.9412
0.3	0.35	0.1225	0.7907
0.4	0.45	0.2025	0.7316
0.5	0.55	0.3025	0.7677
0.6	0.65	0.4225	0.7030
0.7	0.75	0.5625	0.6400
0.7	0.75	0.7225	0.5705
0.9	0.95	0.9025	0.5256
1.0	1.00	1.00	--
		$\Sigma$	7.756

По формуле прямоугольников (7.6) получим:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 0.1 \cdot 7.856 = 0.78560.$$



Найдем точное значение интеграла:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} = 0.785398.$$

Относительная погрешность при применении формулы трапеций составляет 0,05 %, формулы прямоугольников - 0,026 %, формулы Симпсона - 0,00025 %. Таким образом, точность вычислений по формуле Симпсона выше, чем по формулам трапеций и прямоугольников.

**Пример 7.2.** Вычислить значение энтропии воды при нагревании ее от 400 до 500 К по формуле:

$$\Delta S = n \int_{400}^{500} \frac{C_v dT}{T}$$

Принимаем количество молей  $n=1$ , значение теплоемкости при  $v=\text{const}$ :

$$C_v = 35.0 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}.$$

Разобьем интервал интегрирования на 10 равных частей. Шаг интегрирования будет равен  $h=(500 - 400) / 10 = 10$ .

Результаты вычислений подынтегральной функции поместим в табл. 7.3.

Вычислим интеграл, используя данные табл.7.3:

по формуле трапеций (7.12):

$$\Delta S = \int_{400}^{500} \frac{C_v dT}{T} = 10 \left( \frac{0.1575}{2} + 0.39044 + 0.31189 \right) = 7.8108$$

по формуле Симпсона (7.15):

$$\Delta S = \int_{400}^{500} \frac{C_v dT}{T} = \frac{10}{3} (0.1575 + 4 * 0.39044 + 2 * 0.31189) = 7.8101$$

Таблица 7.3

$f(T) = \frac{C_v}{T} = \frac{35}{T}$					
$T$	$f(T_i) \ i=1,3,$ ...	$f(T_i) \ i=2,4,$ ...	$f(T_0)f(T_{10})$	$\bar{T}$	$f(\bar{T}) = \frac{35}{\bar{T}}$
400	-		0.0875	405	0.08642
410	0.08536			415	0.08434
420		0.08333		425	0.08235
430	0.08140			435	0.08046
440		0.07955		445	0.07865
450	0.07778			455	0.07692
460		0.07609		465	0.07527
470	0.07447			475	0.07368
480		0.07292		485	0.07216
490	0.07143			495	0.07071
500			0.0700		
$\Sigma$	0.39044	0.31189	0.1575		0.78096

по формуле прямоугольников (7.6):

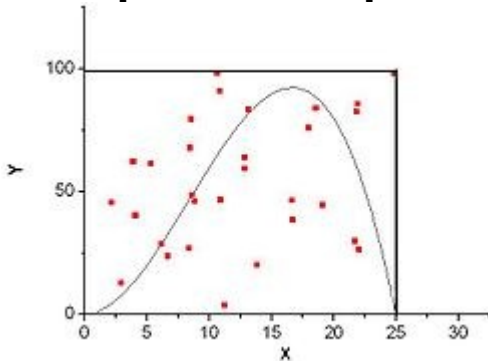
$$\Delta S = \int_{400}^{500} \frac{C_v dT}{T} = 10 * 0.78096 = 7.8096$$

Найдем точное значение интеграла:

$$\Delta S = \int_{400}^{500} \frac{C_v dT}{T} = C_v * \ln \frac{T_2}{T_1} = 7.8100$$

Относительная погрешность вычислений по формуле трапеций, Симпсона и прямоугольников составляет соответственно: 0.01 %, 0.001 %, 0.005 %. Таким образом, наибольшую точность вычислений получили по формуле Симпсона.

## Геометрический алгоритм Монте-Карло интегрирования



Численное интегрирование функции методом Монте-Карло

Для определения площади под графиком функции можно использовать следующий стохастический алгоритм:

- ограничим функцию прямоугольником ( $n$ -мерным параллелепипедом в случае многих измерений), площадь которого  $S_{par}$  можно легко вычислить;
- «набросаем» в этот прямоугольник (параллелепипед) некоторое количество точек ( $N$  штук), координаты которых будем выбирать случайным образом;
- определим число точек ( $K$  штук), которые попадут под график функции;
- площадь области, ограниченной функцией и осями координат,  $S$  даётся

выражением 
$$S = S_{par} \frac{K}{N}$$

Для малого числа измерений интегрируемой функции производительность Монте-Карло интегрирования гораздо ниже, чем производительность детерминированных методов. Тем не менее, в некоторых случаях, когда функция задана неявно, а необходимо определить область, заданную в виде сложных неравенств, стохастический метод может оказаться более предпочтительным.

## **Использование выборки по значимости**

При том же количестве случайных точек, точность вычислений можно увеличить, приблизив ограничивающую искомую функцию область к самой функции. Для этого необходимо использовать случайные величины с распределением, форма которого максимально близка к форме интегрируемой функции. На этом основан один из методов улучшения сходимости в вычислениях методом Монте-Карло: [выборка по значимости](#).