Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ учащихся
«Прикладные вопросы математики»

Геометрия

Разрезание треугольников на подобные части

Останин Павел,

Штенников Роман

МОУ «Гимназия №17», г. Пермь, 10 кл.

Шеремет Галина Геннадьевна,

к.п.н., доцент кафедры геометрии ПГПУ

Оглавление

..........2
Введение..........3
Глава 1. Разрезание треугольника на подобные части..........4
Разрезание треугольников на две подобные части..........4
1.2 Разрезание любого треугольника на четыре равных, подобных исходному с коэффициентом подобия 2..........4
1.3 Разрезание прямоугольного треугольника на пять равных и подобных исходному треугольников..........6
1.5 Разрезание треугольника на три подобных между собой и подобных исходному (помимо прямоугольного треугольника и высот)..........6
1.6 Ортотреугольник и его подобие исходному треугольнику..........7
1.7 Существуют ли непрямоугольные треугольники такие, что их можно разрезать на n>5 треугольников, подобных исходному?..........7
Глава 2. Формулы преобразования подобия и компьютерная реализация игры «Хаос»..........8
2.1 Общий вид формул преобразования подобия..........8
2.2 Нахождение формул для каждого из разбиений..........8
2.3 Игра «Хаос» и ее компьютерная реализация..........9
Заключение..........9
Список литературы..........9

Введение

При изучении геометрии преобразования играют огромную роль. Из них наибольший интерес вызывают преобразования подобия, как самые сложные и самые частые. Они переводят фигуры в подобные им, причем конечные фигуры могут быть еще и повернуты.

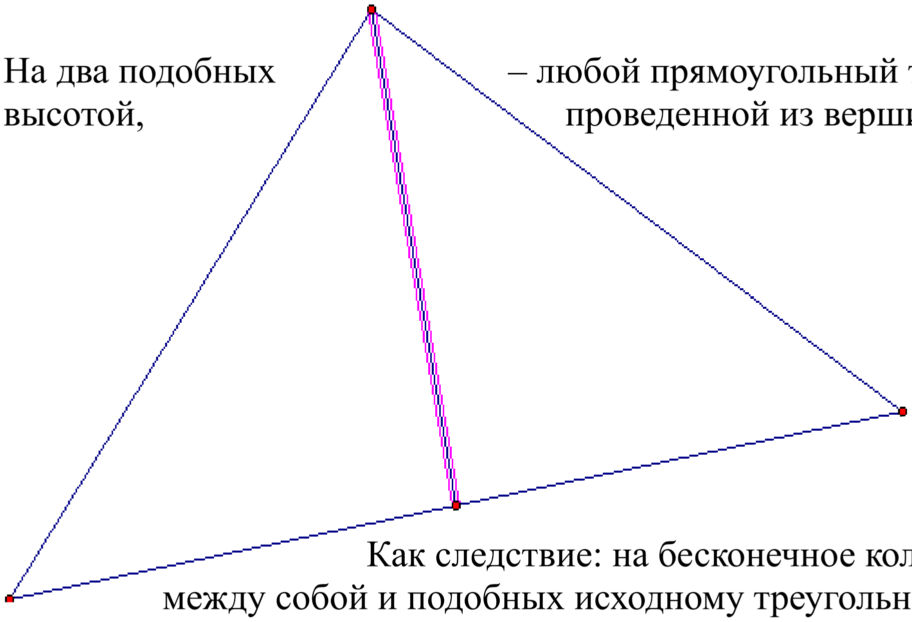
В работе мы представили несколько вариантов разбиения треугольников на подобные исходному, а так же, с помощью формул преобразования подобия, реализовали игру «Хаос» в программе Pascal ABC.

Глава 1. Разрезание треугольника на подобные части

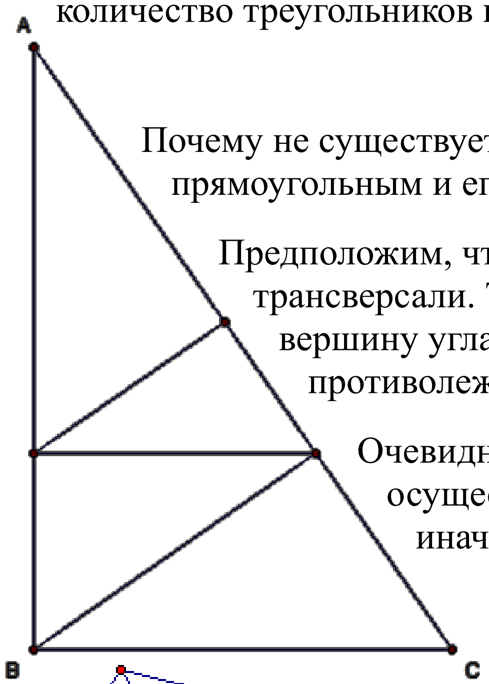
Разрезание треугольников на две подобные части

На два равных и подобных исходному можно разрезать равнобедренный прямоугольный треугольник высотой, проведенной к основанию.

На два подобных – любой прямоугольный треугольник высотой, проведенной из вершины прямого угла.



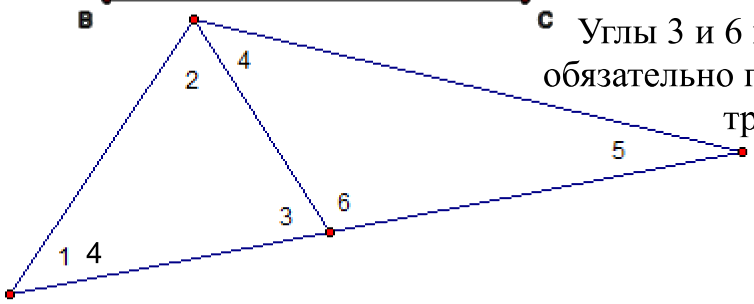
Как следствие: на бесконечное количество подобных между собой и подобных исходному треугольников можно разрезать прямоугольный треугольник, проводя высоты к гипотенузам. На рисунке приведено разрезание на четыре треугольника. Очевидно, что в любом из них можно провести высоту к гипотенузе, тем самым увеличить количество треугольников на 1.



Почему не существует другого треугольника, который не является прямоугольным и его можно разрезать на 2 подобных?

Предположим, что это возможно. Перед этим введем понятие трансверсали. Трансверсаль – это прямая, проходящая через вершину угла треугольника и пересекающая противолежащую сторону.

Очевидно, что если такое разрезание существует, то оно осуществлено с помощью трансверсали, потому что иначе получим четырехугольник и треугольник.



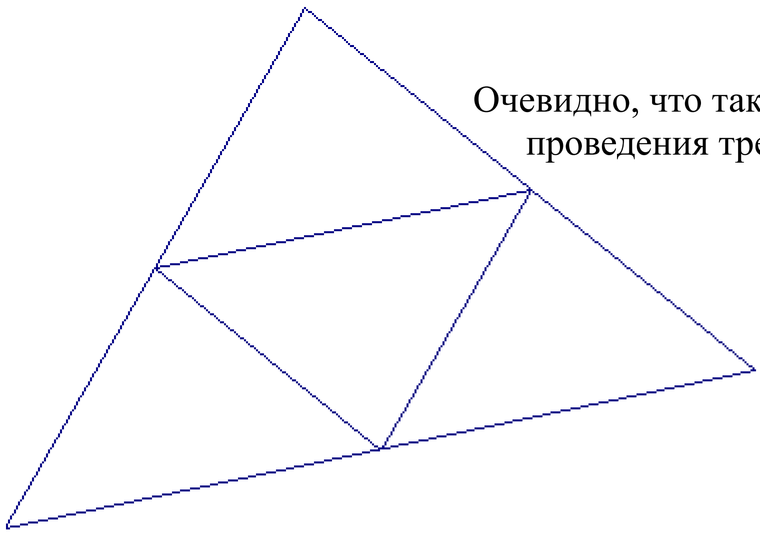
Углы 3 и 6 не равны, т.к иначе треугольник обязательно прямоугольный (иначе подобны треугольники не будут)

Пусть равны углы 1,4, тогда угол 3 равен углу 5, а угол 2 равен углу 6.

В этом случае стороны будут параллельны, причем будет две пары параллельных сторон (углы 3 и 5 – соответственные, а углы 2 и 6 – накрест лежащие). Это невозможно.

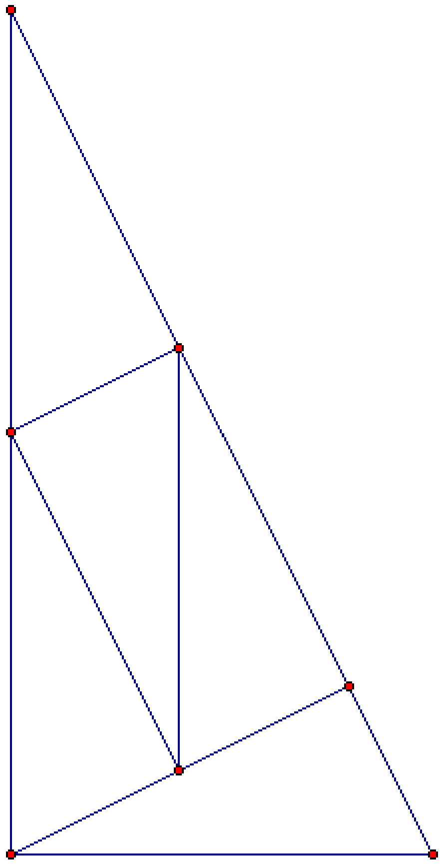
Значит тогда углы 1 и 5, 2 и 6, 3 и 4 равны. Исходный треугольник равнобедренный, а углы 2 и 6, 3 и 4 – накрест лежащие. Стороны вновь параллельны. Значит случай невозможен.

1.2 Разрезание любого треугольника на четыре равных, подобных исходному с коэффициентом подобия 2.



Очевидно, что такое разрезание осуществимо с помощью проведения трех средних линий.

1.3 Разрезание прямоугольного треугольника на пять равных и подобных исходному треугольников.



Такое разрезание осуществимо, если один катет в два раза больше другого. С помощью теоремы синусов находим, что меньший угол равен приблизительно 26,5 градусам.

Разрезание было выведено с помощью проведения высоты из прямого угла, а после этого – разбития большего из двух образовавшихся прямоугольных треугольников на четыре равных с помощью средних линий. Далее можно заметить, что больший катет одного треугольника содержит два меньших катета, рассмотрев нижний треугольник на рисунке.

1.5 Разрезание треугольника на три подобных между собой и подобных исходному (помимо прямоугольного треугольника и высот).

Существует три варианта расположения разрезов. Рассмотрим их все по очереди.

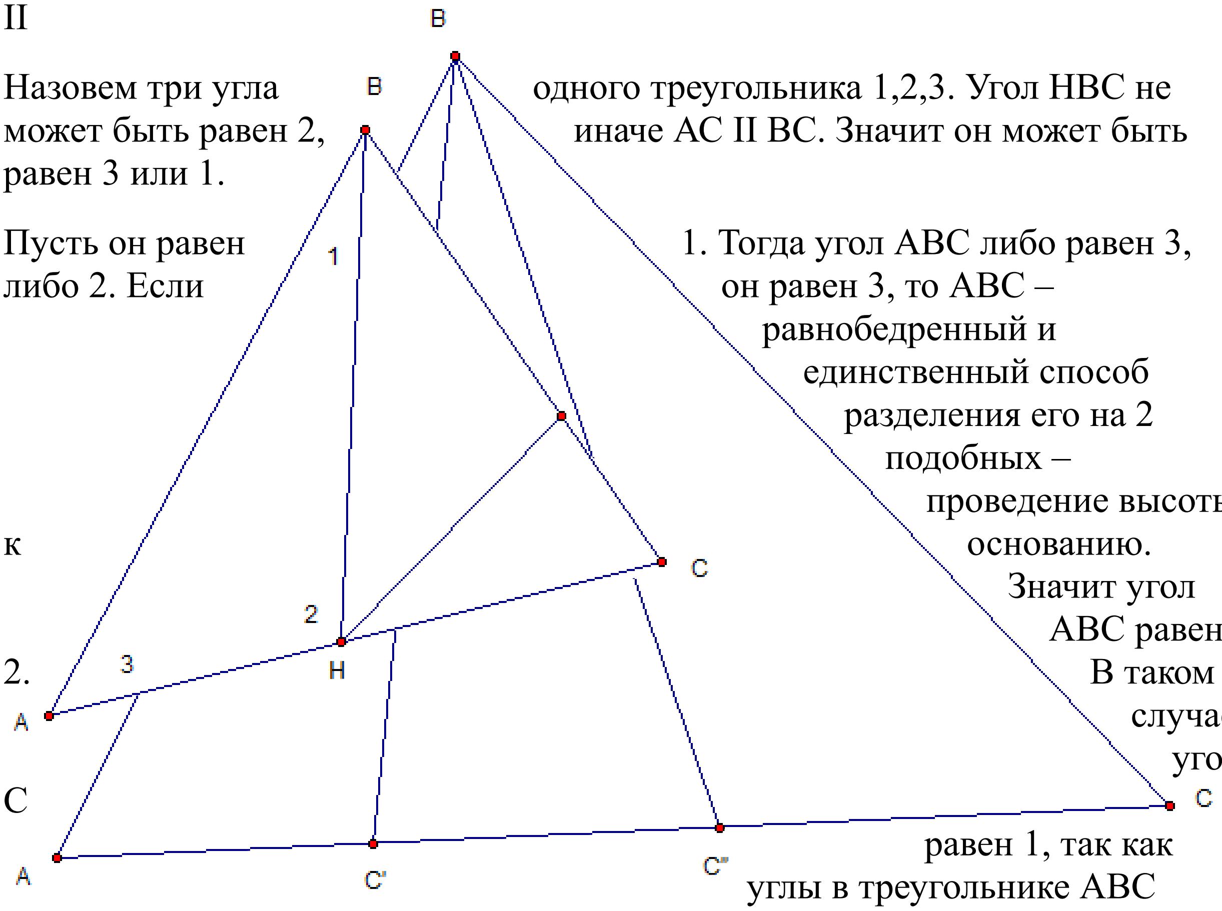
I Две трансверсали из одной вершины.

Такое разрезание невозможно, так как если CC' – высота, то CC'' – тоже высота, а 2 высоты из 1 вершины совпадают. Если CC' не высота, то два треугольника обязательно имеют по тупому углу, а один – остроугольный. Очевидно, что они не могут быть подобны.

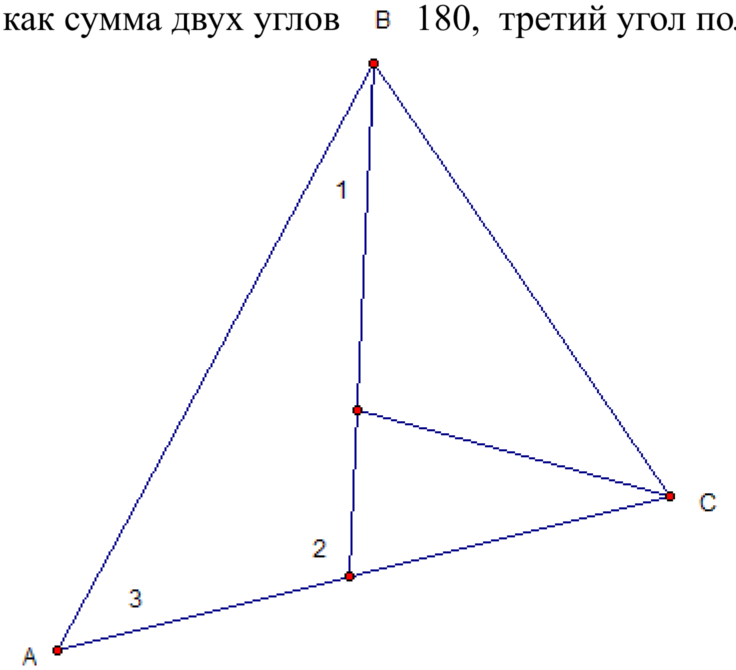
II

Назовем три угла одного треугольника 1,2,3. Угол HBC не может быть равен 2, иначе AC II BC. Значит он может быть равен 3 или 1.

Пусть он равен 1. Тогда угол ABC либо равен 3, либо 2. Если он равен 3, то ABC – равнобедренный и единственный способ разделения его на 2 подобных – проведение высоты к основанию. Значит угол ABC равен 2. В таком случае угол C равен 1, так как углы в треугольнике ABC должны быть тоже 1,2,3. Тогда треугольник HBC равнобедренный, а значит и все остальные треугольники равнобедренные, а тогда BH обязательно высота и вторая трансверсаль – тоже высота треугольника HBC. Угол 3 прямой, значит мы имеем дело с равнобедренным прямоугольным треугольником, что уже было описано.



III Угол, смежный с 2 может быть либо 3, либо 1. Оба случая невозможны, так как сумма двух углов 180, третий угол получается 0.



1.6 Ортотреугольник и его подобие исходному треугольнику

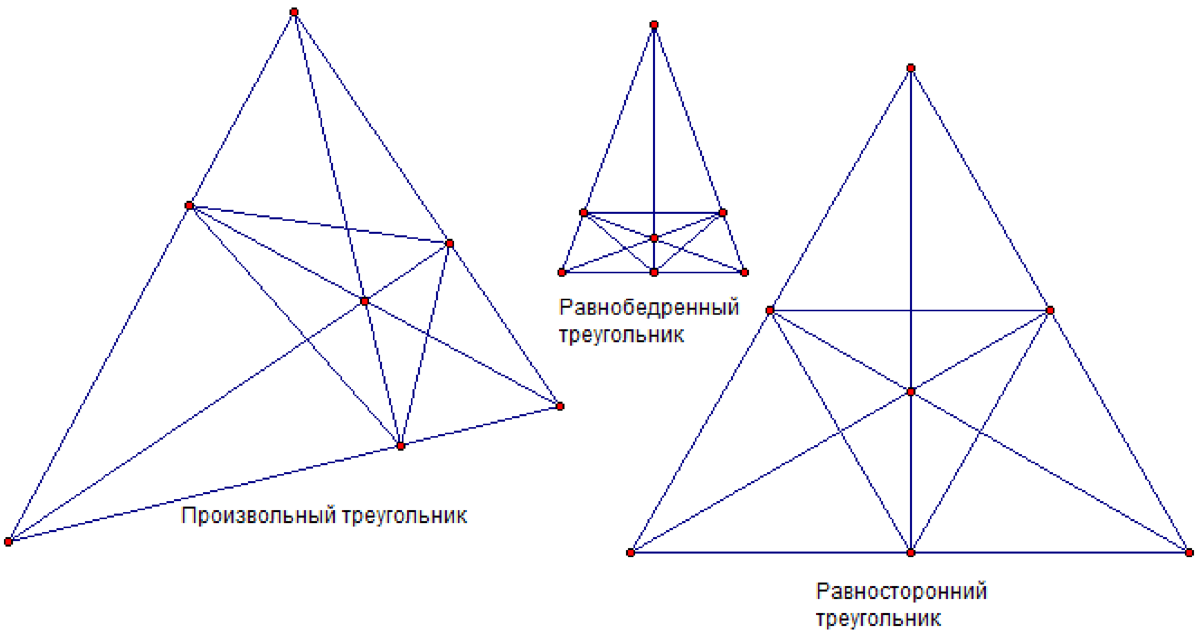
Ортотреугольник – треугольник, образованный основаниями высот треугольника.

Интересный факт: высоты исходного треугольника являются биссектрисами углов ортотреугольника.

Выясним, в каком случае будет ортотреугольник подобен исходному.

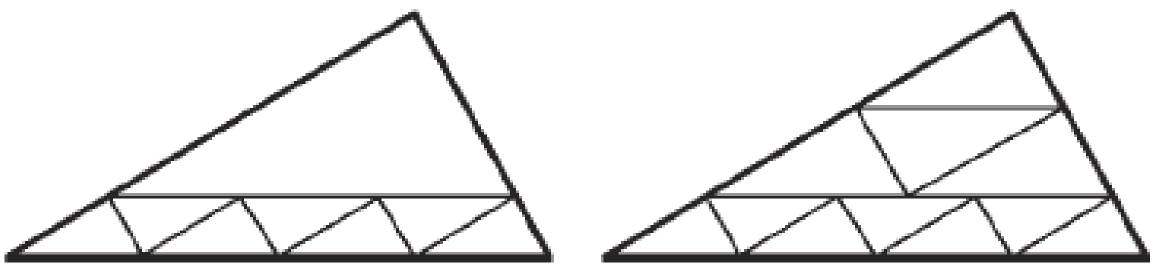
Будем использовать тот факт, что высоты BB’ и AA’ треугольника ABC образуют треугольник A’B’C, подобный исходному.

С помощью не сложных вычислений приходим к выводу, что ортотреугольник подобен исходному только в случае равностороннего исходного треугольника.



1.7 Существуют ли непрямоугольные треугольники такие, что их можно разрезать на n>5 треугольников, подобных исходному?

Любой треугольник можно разрезать на n подобных ему при n>5. Решение различно для четного и нечетного значения n, идея решения представлена на следующих рисунках.



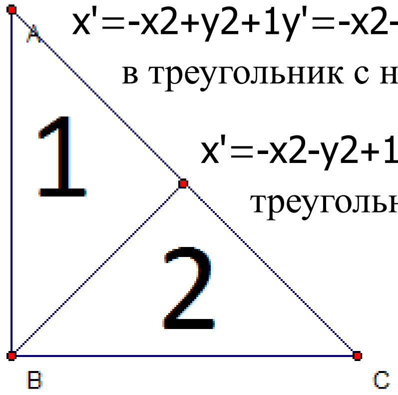
Глава 2. Формулы преобразования подобия и компьютерная реализация игры «Хаос».

2.1 Общий вид формул преобразования подобия

Формулы преобразования подобия в прямоугольной системе координат имеют вид:

$x'=kx\cos\varphi\mp y\sin\varphi+x0y'=kx\sin\varphi\pm y\cos\varphi+y0$

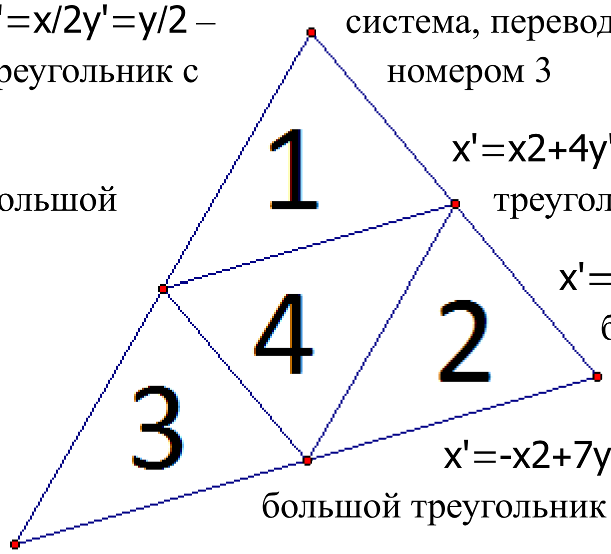
2.2 Нахождение формул для каждого из разбиений



$x'=-x2+y2+1y'=-x2-y2+1$ – система, переводящая большой треугольник в треугольник с номером 2

$x'=-x2-y2+1y'=x2-y2+1$ – система, переводящая большой треугольник в треугольник с номером 1

$x'=x/2y'=y/2$ – система, переводящая большой треугольник в треугольник с номером 3



$x'=x2+4y'=y2+3$– система, переводящая большой треугольник в треугольник с номером 1

$x'=x2+3y'=y/2$– система, переводящая большой треугольник в треугольник с номером 2

$x'=-x2+7y'=-y2+3$– система, переводящая большой треугольник в треугольник с номером 4

x'=-2x5-y5+2y'=-x5+2y5+6 - система, переводящая большой треугольник в треугольник с номером 1

x'=-2x5-y5+2y'=-x5+2y5+1 - система, переводящая большой треугольник в треугольник с номером 2

x'=-2x5-y5+4y'=-x5+2y5+2 - система, переводящая большой треугольник в треугольник с номером 3

x'=x5-2y5+4y'=-2x5-y5+2 - система, переводящая большой треугольник в треугольник с номером 4

x'=2x5+y5y'=x5-2y5+5- система, переводящая большой треугольник в треугольник с номером 5

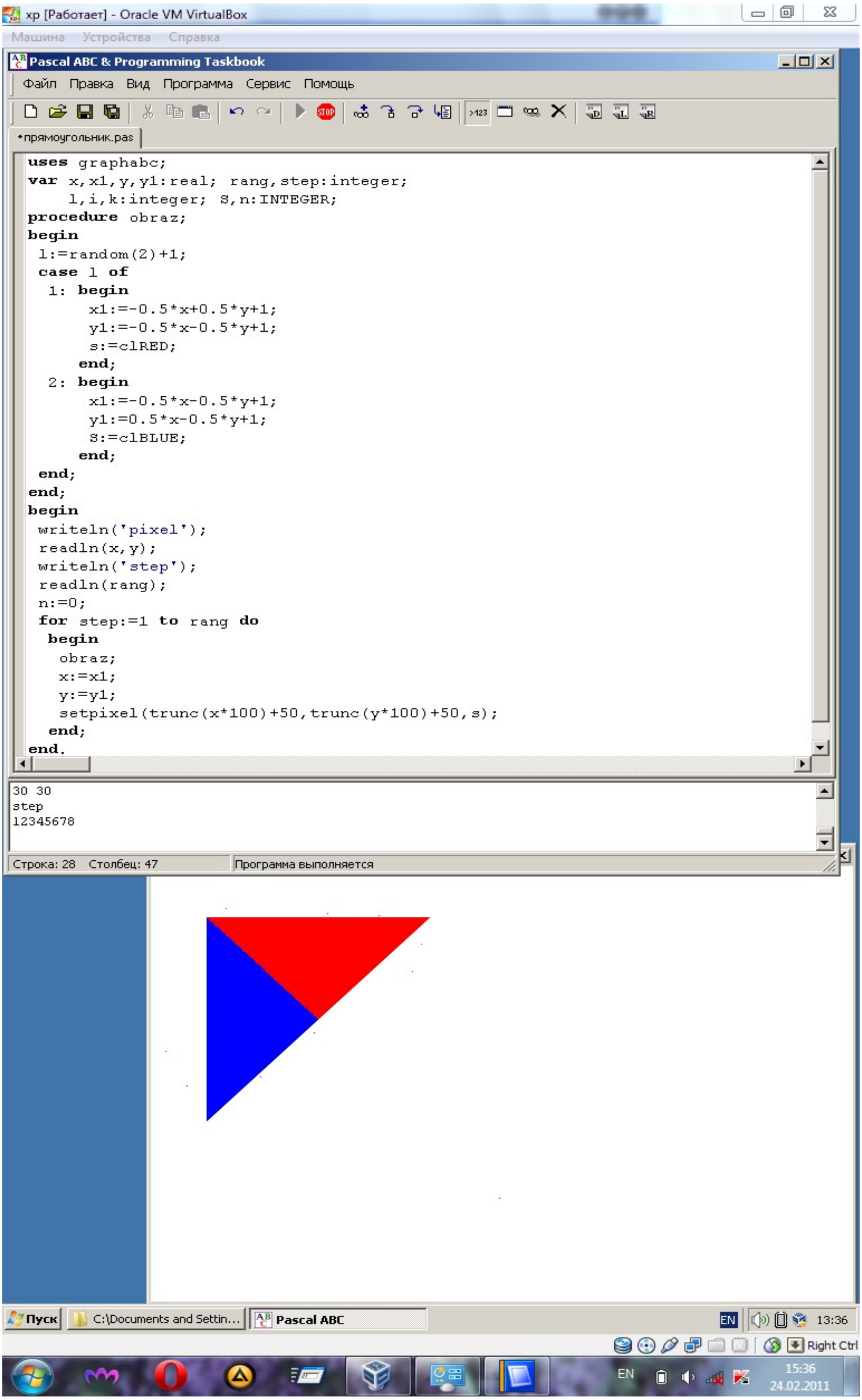
2.3 Игра «Хаос» и ее компьютерная реализация

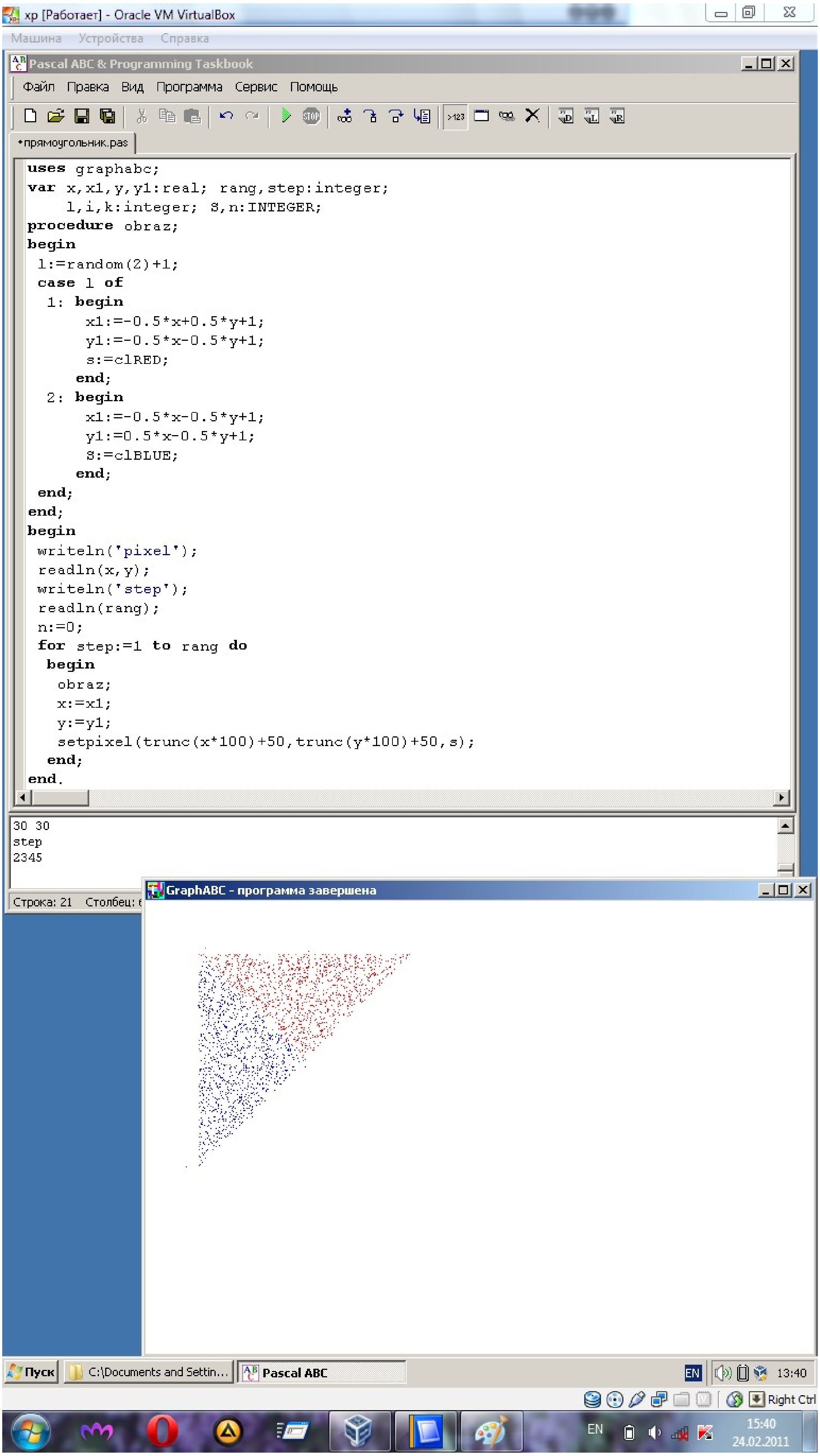
Игра «Хаос» заключается в том, что задается прямоугольная система координат, случайным образом задается точка, а потом ее координаты подставляются в случайным образом выбранную пару формул преобразования подобия (берем столько пар формул, сколько частей будет после разбиения). Повторяем эту операцию много раз и получим, что только конечное число точек будет находиться вне фигуры, остальные же точки будут описывать искомые фигуры. Для того, чтобы проверить это мы и написали программу.

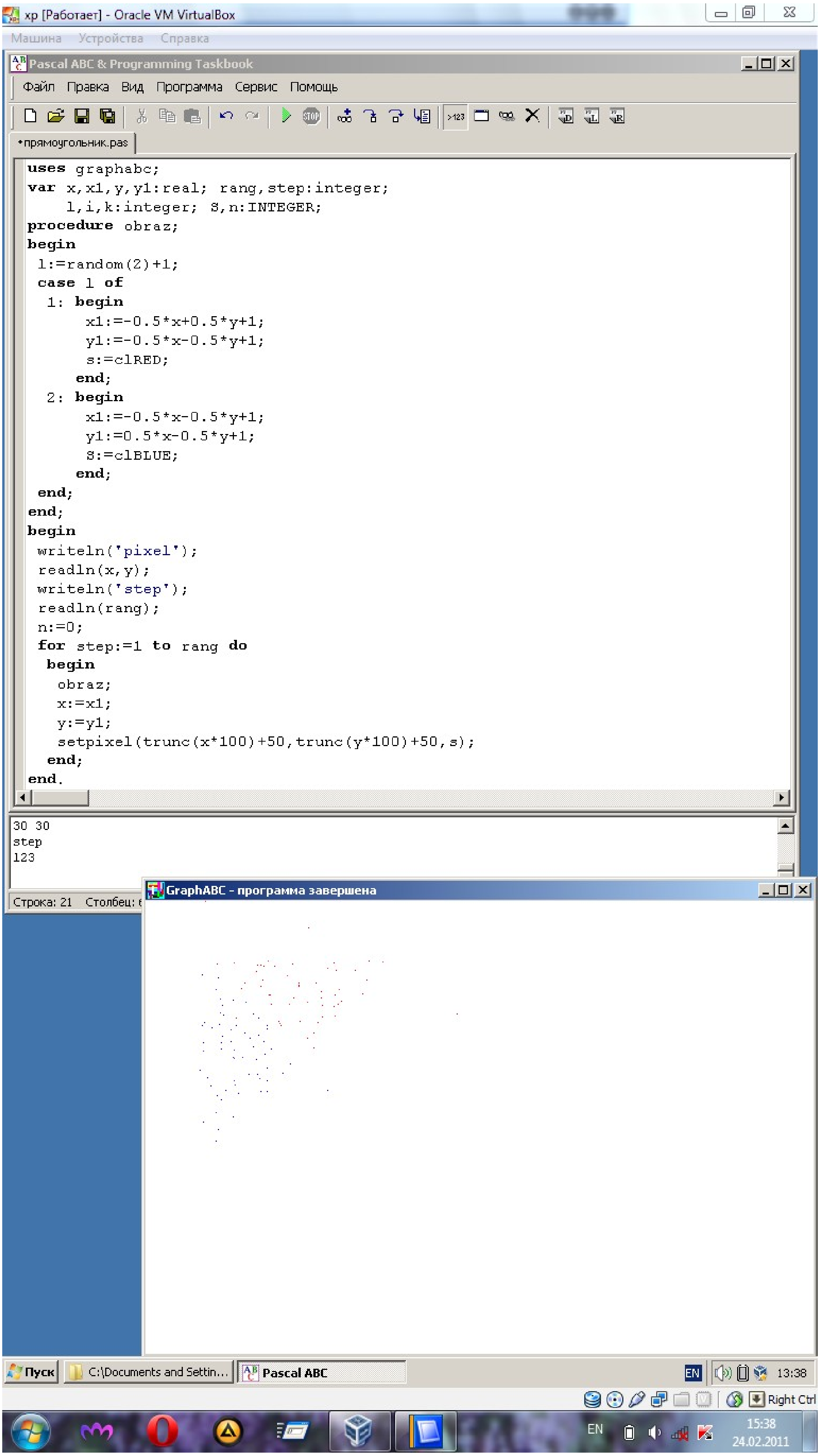
На первом рисунке представлен уже конечный результат работы программы.

На втором рисунке мы предложили программе построить всего 2345 точек, чтобы лучше понять процесс построения.

А на третьем рисунке представлено самое начало построения – построены всего лишь 123 точки. Видно, что часть точек вышла за границы треугольника, а остальные находятся точно внутри.


xp [Работает] - Oracle VM VirtualBox
Машина Устройства Справка
Pascal ABC & Programming Taskbook
Файл Правка Вид Программа Сервис Помощь
*прямоугольник.pas
uses graphabc;
var x,x1,y,y1:real; rang,step:integer;
l,i,k:integer; S,n:INTEGER;
procedure obraz;
begin
l:=random(2)+1;
case l of
1: begin
x1:=-0.5*x+0.5*y+1;
y1:=-0.5*x-0.5*y+1;
s:=clRED;
end;
2: begin
x1:=-0.5*x-0.5*y+1;
y1:=0.5*x-0.5*y+1;
S:=clBLUE;
end;
end;
end;
begin
writeln('pixel');
readln(x,y);
writeln('step');
readln(rang);
n:=0;
for step:=1 to rang do
begin
obraz;
x:=x1;
y:=y1;
setpixel(trunc(x*100)+50,trunc(y*100)+50,s);
end;
end.
30 30
step
12345678
Строка: 28 Столбец: 47
Программа выполняется
Пуск
C:\Documents and Settin...
Pascal ABC
EN
13:36
Right Ctrl
EN
15:36
24.02.2011


xp [Работает] - Oracle VM VirtualBox
Машина Устройства Справка
Pascal ABC & Programming Taskbook
Файл Правка Вид Программа Сервис Помощь
*прямоугольник.pas
uses graphabc;
var x,x1,y,y1:real; rang,step:integer;
l,i,k:integer; S,n:INTEGER;
procedure obraz;
begin
l:=random(2)+1;
case l of
1: begin
x1:=-0.5*x+0.5*y+1;
y1:=-0.5*x-0.5*y+1;
s:=clRED;
end;
2: begin
x1:=-0.5*x-0.5*y+1;
y1:=0.5*x-0.5*y+1;
S:=clBLUE;
end;
end;
end;
begin
writeln('pixel');
readln(x,y);
writeln('step');
readln(rang);
n:=0;
for step:=1 to rang do
begin
obraz;
x:=x1;
y:=y1;
setpixel(trunc(x*100)+50,trunc(y*100)+50,s);
end;
end.
30 30
step
2345
Строка: 21 Столбец:
GraphABC - программа завершена
Пуск
C:\Documents and Settin...
Pascal ABC
EN
13:40
Right Ctrl
EN
15:40
24.02.2011


xp [Работает] - Oracle VM VirtualBox
Машина Устройства Справка
Pascal ABC & Programming Taskbook
Файл Правка Вид Программа Сервис Помощь
•прямоугольник.pas
uses graphabc;
var x,x1,y,y1:real; rang,step:integer;
l,i,k:integer; S,n:INTEGER;
procedure obraz;
begin
l:=random(2)+1;
case l of
1: begin
x1:=-0.5*x+0.5*y+1;
y1:=-0.5*x-0.5*y+1;
s:=clRED;
end;
2: begin
x1:=-0.5*x-0.5*y+1;
y1:=0.5*x-0.5*y+1;
S:=clBLUE;
end;
end;
end;
begin
writeln('pixel');
readln(x,y);
writeln('step');
readln(rang);
n:=0;
for step:=1 to rang do
begin
obraz;
x:=x1;
y:=y1;
setpixel(trunc(x*100)+50,trunc(y*100)+50,s);
end;
end.
30 30
step
123
Строка: 21
GraphABC - программа завершена
Пуск
C:\Documents and Settin...
Pascal ABC
EN
13:38
Right Ctrl
EN
15:38
24.02.2011

Заключение

В работе мы нашли способы разбиения прямоугольных треугольников на равные между собой и подобные исходному, либо на подобные между собой и подобные исходному, а так же рассмотрели возможные варианты разбиений непрямоугольных треугольников. С помощью языка программирования Pascal мы рассмотрели в действии формулы преобразования подобия.

Нераскрытыми остались вопросы о разбиении треугольника на пять подобных частей в общем случае, а так же обоснование результатов, получающихся при игре хаос.

Список литературы

Журнал «Квант» за 2008 год, 4 номер

Я.П. Понарин «Элементарная Геометрия»