Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ учащихся «Прикладные вопросы математики»

Математическое моделирование

Моделирование динамики численности популяции с учетом ограниченности ресурсов

Шуклин Кирилл Алексеевич,
МОУ «Лицей №1» г. Перми, 11 кл.
Шабрыкина Наталья Сергеевна,
к. ф.-м. н., доцент ПНИПУ

Введение

Некоторые выходцы из Англии, поселившиеся в Австралии, решили, что в австралийских долинах неплохо было бы поохотиться на кроликов. Поскольку кроликов в Австралии не водилось, в 1788 году их туда специально завезли. Однако англичане не учли, что в Австралии нет хищников, которые могли бы регулировать численность популяции кроликов; кроме того, прочие условия оказались для кроликов исключительно благоприятными. В результате кролики так размножились, что начали наносить ущерб сельскому хозяйству.

Это не единственный пример в истории, когда изолированная популяция вела себя непредсказуемым образом. Поэтому интересно составить математическую модель данного процесса.

В данной работе будет составлена популяционная модель, с помощью которой можно будет увидеть, как ведет себя популяция кроликов в определенных условиях.

Концептуальная постановка задачи

В данной работе будет построена метематическая модель, описывающая динамику численности популяции с учетом ограниченности ресурсов.

Данная модель будет зависеть от следующих параметров: равновесная численность популяции, начальная численность популяции.

Допущения:

- Животные умирают только естественной смертью, т.к. нет хищников, которые могли бы поедать рассматриваемых животных;
- Скорость изменения численности популяции пропорциональна самой численности и величине относительного отклонения от равновесного значения;
- Существует некоторая равновесная численность, которую может обеспечить окружающая среда.

Математическая постановка задачи

С помощью описанных выше допущений составим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha N(t)\left|\frac{N_p - N(t)}{N_p}\right| \quad (1)$$

где N_p - равновесная численность популяции; α - коэффициент пропорциональности; $N(t)$ - численность популяции в зависимости от времени.

Для решения уравнения (1) понадобится начальное условие:

$N(0) = N_0$ (2)

Поскольку данная модель будет сравниваться с моделью Мальтуса, то ниже будет представлено дифференциальное уравнение, описывающее модель Мальтуса:

$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha N(t) - \beta N(t)$ (3)

где α - коэффициент рождаемости; β - коэффициент смертности; $N(t)$ - численность популяции в зависимости от времени.

Для решения (3) понадобится начальное условие:

$N(0) = N_0$ (4)

Решение задачи

Решение было получено аналитически с помощью математического пакета Maple. Код находится в приложении 1.

Решение (1):

$$N(t) = \frac{N_0 N_p}{N_0 + e^{(-\alpha t)} N_p - N_0 e^{(-\alpha t)}} \quad (5)$$

Решение (3):

$$N(t) = N_0^{((\alpha - \beta)t)} \quad (6)$$

Результаты решения

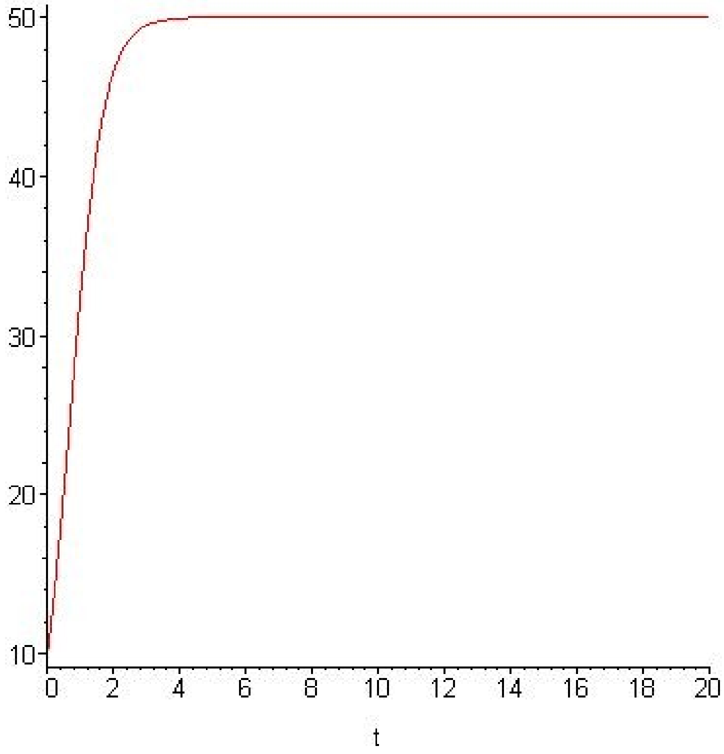

Рис.1

На рис.1 изображен график зависимости численности популяции от времени при следующих параметрах: $N_p = 50$, $N_0 = 10$, $\alpha = 2$, $t \in [0;20]$. На графике видно, что при данных параметрах популяция размножается и достигает своей равновесной численности.

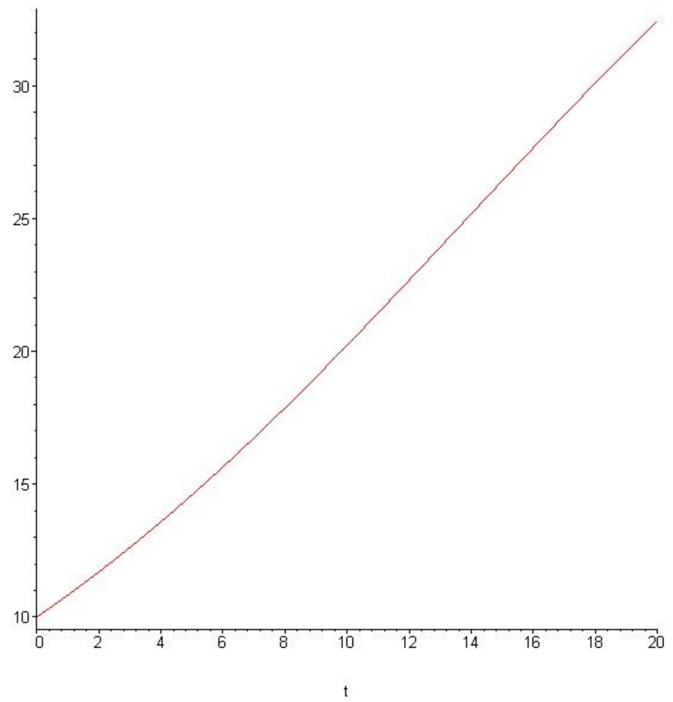

Рис.2

На рис.2 изображен график зависимости численности популяции от времени при следующих параметрах: $N_p = 50$, $N_0 = 10$, $\alpha = 0.1$, $t \in [0;20]$. На графике видно, что при изменении коэффициента пропорциональности популяция не успевает достигнуть равновесной численности за данное количество времени.

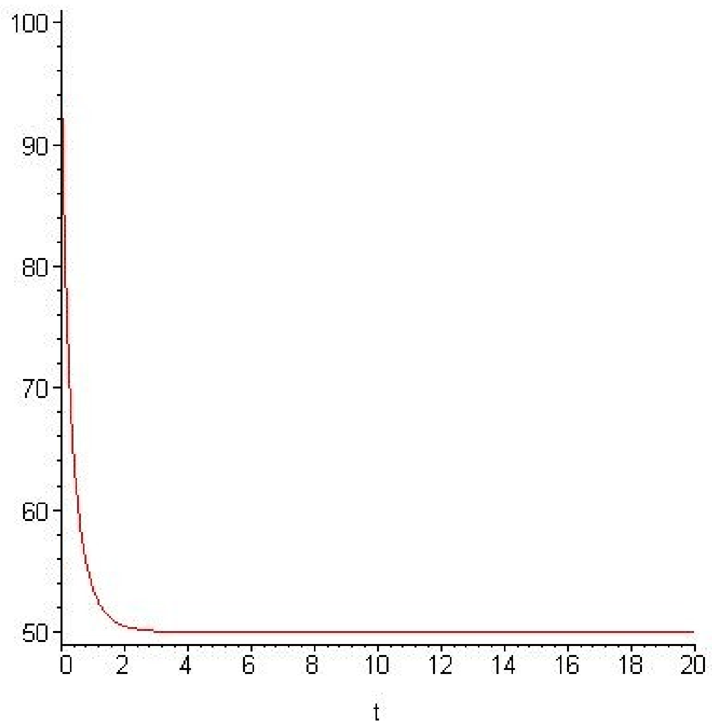

Рис.3

На рис.3 изображен график зависимости численности популяции от времени при следующих параметрах: $N_p = 50$, $N_0 = 100$, $\alpha = 2$, $t \in [0;20]$. На графике видно, что если количество животных больше того, которое может обеспечить окружающая среда, то численность популяции начинает стремительно сокращаться и останавливается на равновесном значении.

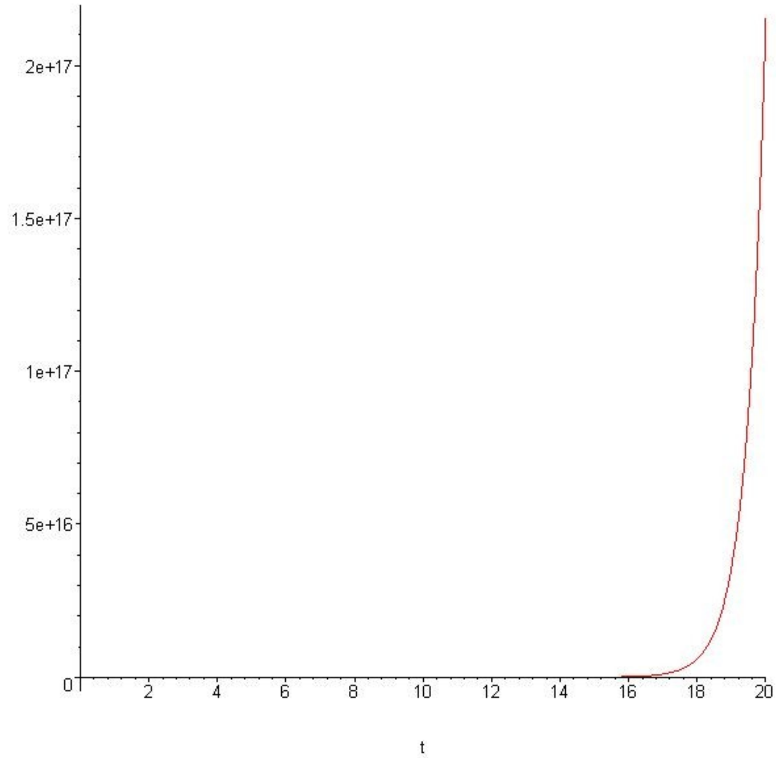

Рис.4

На рис.4 изображен график, показывающий поведение модели Мальтуса в зависимости от времени при следующих параметрах: $N_0 = 50$, $\alpha = 2$, $\beta = 0.2$. На графике видно, что в отличии от представленной модели, где численность популяции не может превышать равновесного значения, в модели Мальтуса численность популяции неограниченно возрастает.

Заключение

В данной работе было составлено дифференциальное уравнение, на основе которого была построена математическая модель динамики численности популяции с учетом ограниченности ресурсов. Было проведено сравнение с моделью Мальтуса.

С помощью построенных графиков было выяснено следующее: при начальной численности популяции меньше равновесного значения популяция размножается, достигая равновесного значения; при начальной численности популяции больше равновесного значения популяция начинает вымирать и останавливается у равновесного значения; популяция в модели Мальтуса, в отличии от данной, бесконечно размножается.

Список литературы

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М., 1963.
2. Графика в системе Maple (http://www.mediaget.ru/referat/referat/25620/).
3. Компьютерная математика Maple 7 (электронный учебник) (http://clubmt.ru/Maple7/)

Приложение 1

```
> diff(N(t),t);
> A:=diff(N(t),t)=alpha*N(t)*(((Np-N(t))/Np));
> B:=dsolve(A,N(t));
> C:=dsolve({A,N(0)=N0},N(t));
> E:=subs(C,N(t));
> F:=eval(E,{N0=100,Np=50,alpha=2});
> plot(F,t=0..20);
> G:=eval(E,{Np=50,alpha=0.1});
> plot(G,t=0..20);
> H:=diff(N(t),t)=alpha*N(t)-beta*N(t);
> K:=dsolve({H, N(0)=N0},N(t));
> L:=subs(K, N(t));
> U:=eval(L, {N0=50, alpha=2, beta=0.2});
> plot(U,t=0..20);
```