Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ учащихся

«Прикладные вопросы математики»

Алгебра

Алгебра логики

Семушева Алена Сергеевна,

МОУ «Лицей №1» г. Перми, 10 кл.

Боркова Ольга Владимировн,

преподаватель математики

МОУ «Лицей №1»

Введение

Тема нашей Исследовательской работы *Алгебра логики.*

Цель данной работы выяснение сути алгебры логики, основных методов работы с логическими операторами, роли логики в вычислительной технике и информатике.

Задачи, которые мы перед собой ставили:

-найти материал по теме

-найти некоторые задачи

-сделать выводы

Глава 1. *Что такое алгебра логики и возникновение*

Алгебра логики (алгебра высказываний) — раздел математической логики, в котором изучаются логические операции над высказываниями. Чаще всего предполагается (т. н. бинарная или двоичная логика, в отличие от, например, троичной логики), что высказывания могут быть только истинными или ложными.

Базовыми элементами, которыми оперирует алгебра логики, являются высказывания. Высказывания строятся над множеством {B, ¬, ∧, ∨, 0, 1}, где B — непустое множество, над элементами которого определены три операции:

¬ отрицание (унарная операция),

∧ или & конъюнкция (бинарная),

∨ дизъюнкция (бинарная),

а также константы — логический ноль 0 и логическая единица 1.

1.1 *Логические операции*

Простейшим и наиболее широко применяемым примером такой алгебраической системы является множество B, состоящее всего из двух элементов:

B = { Ложь, Истина }

Как правило, в математических выражениях **Ложь** отождествляется с логическим нулём, а **Истина** — с логической единицей, а операции отрицания (НЕ), конъюнкции (И) и дизъюнкции (ИЛИ) определяются в привычном нам понимании. Легко показать, что на данном множестве B можно задать четыре унарные и шестнадцать бинарных отношений и все они могут быть получены через суперпозицию трёх выбранных операций.

Опираясь на этот математический инструментарий, логика высказываний изучает высказывания и предикаты. Также вводятся дополнительные операции, такие как эквивалентность ↔(«тогда и только тогда, когда»), импликация →(«следовательно»), сложение по модулю два ⊕ («исключающее или»), штрих Шеффера |, стрелка Пирса ↓и другие.

1.2. *Возникновение логики*

Понятие логики как науки появилось ещё в XIX в., т.е. задолго до появления науки информатики и компьютеров. Элементы математической логики можно найти уже в работах древнегреческих философов. В XVII в. Г. В. Лейбниц[1] высказал идею о том, что рассуждения могут быть сведены к механическому выполнению определенных действий по установленным правилам. Однако как самостоятельный раздел математики логика начала формироваться только с середины XIX в..

Для того чтобы рассуждать, человеку необходим какой-либо язык. Не удивительно, что математическая логика начиналась с анализа того, как говорят и пишут люди на естественных языках. Этот анализ привёл к тому, что выяснилось существование формулировок, которые невозможно разделить на истинные и ложные, но, тем не менее, выглядят осмысленным образом. Это приводило к возникновению парадоксов, в том числе в одной из фундаментальных наук математики. Тогда было решено создать искусственные формальные языки, лишённого «вольностей» языка естественного.

[1] Готфрид Вильгельм (1646—1716) — нем. философ, математик, физик и изобретатель, юрист, историк, языковед.

Глава 2. *Булевые функции*

Пусть имеется некоторый набор высказываний, о которых можно говорить определённо, что они истинные или ложные. Обозначим их латинскими буквами A, B, C, D … .

Если у нас есть два простых предложения, то из них образовать новое, сложносочинённое предложение с помощью союзов «или» либо «и». В математической логике для этой цели используются специальные символы.

Таким образом, из утверждений A, B с помощью знаков дизъюнкции и конъюнкции получим новые утверждения:

- A v B («A или B»)

- A & B («A и B»)

Утверждение A v B считается истинным тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из исходных утверждений; утверждение A & B - когда истинны оба утверждения.

Дизъюнкцию и конъюнкцию можно рассматривать как особые операции, определённые не на числах, а на логических значениях ИСТИНА и ЛОЖЬ. Для этих операций существуют таблицы, подобные таблице умножения.

A	B	A v B
ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА
ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА
ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА
ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ

Логические значения ИСТИНА и ЛОЖЬ называют также булевыми значениями – в честь английского математика Джорджа Буля[2], который в XIX в. заложил основы современной математической логики. Функции с

[2] Джордж Буль (1815-1864) - английский математик, создатель символической логики.

булевыми аргументами называют булевыми функциями. Всего булевых функций от 2 переменных – 16. Для всех булевых функций от двух переменных имеются соответствующие конструкции на русском языке. В информатике в основном используются следующие булевы функции:

- логическое ИЛИ (дизъюнкция)

- логическое И (конъюнкция)

- логическое отрицание («НЕ», обозначается ~ и противоположно своему аргументу)

- исключающее ИЛИ

Из этих основных складываются комбинированные функции: ИЛИ-НЕ, И-НЕ. Именно они получили наибольшее распространение в логической электронике, в компьютерах.

2.1. *Преобразование выражений, состоящих из булевых функций.*

В математической логике преобразование выше указанных выражений проводится для различных целей – от упрощения исходного до доказательства утверждений. В информатике же оно используется в основном для упрощения, ведь при производстве цифровой электроники, как и любого другого товара, требуются наименьшие затраты. Для упрощения булевых выражений используются те же методы, что и при упрощении алгебраических. Для начала была проведена аналогия между алгебраическими операторами от двух аргументов (сложение, вычитание, умножение и т.д.) и булевыми. Было выяснено, что умножение и логическое «И» обладают сходными свойствами:

- от перестановки мест аргументов результат не изменяется

A & B = B & A

- существует следующий закон

A & (B & C) = (A & B) & C

Также существуют некоторые тождества, опирающиеся на особые свойства функции, например:

1) A & (~A) = ЛОЖЬ

2) (~A) & (~B) = ~ (A v B)

Аналогично, сложение и логическое «ИЛИ»:

- от перестановки мест аргументов результат не изменяется

A v B = B v A

- существует следующий закон

(A v B) v C = A v (B v C)

- можно выносить общий множитель за скобки

(A & B) v (C & B) = B & (A v C)

И также некоторые собственные законы:

1) A v (~A) = ИСТИНА

2) (~A) v (~B) = ~ (A & B)

Когда вычисляется значение булевого выражения, то выполняется определённая очерёдность действий: на очерёдность влияют скобки, сначала считаются «И», затем «ИЛИ». Благодаря этой очерёдности возможно создание электронных цифровых схем.

2.2. *Нахождение исходного выражения по его значениям.*

В отличие от алгебраических выражений, булевы можно восстановить, зная их аргументы и соответственные им значения. Пусть нам дана булева функция от 3 переменных:

X1	X2	X3	F

0	0	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0
1	1	0	1
0	0	1	0
1	0	1	1
0	1	1	0
1	1	1	1

Составим для неё таблицу и условимся обозначать ИСТИНУ - 1, а ЛОЖЬ – 0.

Для начала выпишем все аргументы функции, при которых функция равна 1.

Это:

F (1, 1, 0) = 1

F (1, 0, 1) = 1

F (1, 1, 1) = 1

Теперь запишем 3 таких выражения (функция принимает значение 1 три раза), что они принимают значение 1 только при вышеуказанных значениях.

X1 & X2 & (~X3)

X1 & (~X2) & X3

X1 & X2 & X3

И запишем их логическую сумму:

(X1 & X2 & (~X3)) v (X1 & (~X2) & X3) v (X1 & X2 & X3) – это выражение принимает значение 1 при тех же значениях, что и исходная функция. Полученное выражение можно упростить.

(X1 & X2 & (~X3)) v (X1 & (~X2) & X3) v (X1 & X2 & X3) =

= X1 & ((X2 & (~X3)) v ((~X2) & X3) v (X2 & X3)) =

= X1 & ((X2 & (~X3)) v X3 & ((~X2) v X2)) =

= X1 & ((X2 & (~X3)) v X3) – эта формула несколько длиннее исходной, но намного проще полученной в первый раз. Дальнейшие пути упрощения более сложны и представляют большой интерес для проектировщиков интегральных микросхем, т.к. меньшее число операций требует меньшее число элементов, их которых состоит ИС.

Глава 3. *Применение в вычислительной технике и информатике*

После изготовления первого компьютера стало ясно, что при его производстве возможно использование только цифровых технологий – ограничение сигналов связи единицей и нулём для большей надёжности и простоты архитектуры ПК. Благодаря своей бинарной природе, математическая логика получила широкое распространение в ВТ и информатике. Были созданы электронные эквиваленты логических функций, что позволило применять методы упрощения булевых выражений к упрощению электрической схемы. Кроме того, благодаря возможности нахождения исходной функции по таблице позволило сократить время поиска необходимой логической схемы.

В программировании логика незаменима как строгий язык и служит для описания сложных утверждений, значение которых может определить компьютер.

Заключение

Логика возникла задолго до появления компьютеров и возникла она в результате необходимости в строгом формальном языке. Были построены функции – удобное средство для построения сложных утверждений и проверки их истинности. Оказалось, что такие функции обладают аналогичными свойствами с алгебраическими операторами. Это дало возможность упрощать исходные выражения. Особое свойство логических выражений – возможность их нахождения по значениям. Это получило широкое распространение в цифровой электронике, где используются логические элементы, и программировании.

Логика встречается в повседневной жизни. Много решений приходится принимать ,связанных с логикой. Как сказал Джон Локк: "Логика есть анатомия мышления".

Литература

1.http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_colier/3492/%D0%91%D0%A3%D0%9B%D0%AC

2.http://ru.wikipedia.org/wiki/%C0%EB%E3%E5%E1%F0%E0_%EB%EE%E3%E8%EA%E8

3.http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_philosophy/607/%D0%9B%D0%95%D0%99%D0%91%D0%9D%D0%98%D0%A6

4.http://referat.antiarm.ru/ref-119896.shtml

5.http://www.oink.ru/oik/_files/page_teachers_chernikov/diskretnaja_matematika_lekcii_algebra_logiki.pdf