Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ учащихся «Прикладные вопросы математики»

Геометрия

Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах

Сюткина Татьяна Юрьевна

Соснина Алёна Владимировна,

МОУ «Лицей №1» г. Перми, 11 кл.

Сидорова Елена Борисовна,

преподаватель математики

МОУ «Лицей №1» г. Перми

Введение

Математика проникает почти во все области деятельности человека, что положительно сказывается на темпе роста научно-технического прогресса. Мы с первых дней занятий в школе встречаемся с задачей. С начала и до конца обучения в школе математическая задача неизменно помогает нам вырабатывать правильные математические понятия, глубже выяснять различные стороны взаимосвязей в окружающей жизни, дает возможность применять изучаемые теоретические положения. В то же время решение задач способствует развитию логического мышления. Поэтому очень важно знать, какими методами решаются те или иные задачи.

Данная тема привлекла наше внимание не случайно, метод комплексных чисел позволяет решать планиметрические задачи прямым вычислением по готовым формулам. Выбор этих формул с очевидностью диктуется условием задачи и её требованием. В этом состоит необычайная простота этого метода по сравнению с векторным и координатным методами, методом геометрических преобразований, конструктивно-синтетическим методом, требующими от решающего порой немалой сообразительности и длительных поисков, хотя при этом готовое решение может быть очень коротким. Конечно! Все задачи могут быть решены и без комплексных чисел. Но ведь в том-то и дело, что алгебра комплексных чисел представляет собой ещё один эффективный метод решения планиметрических задач. Речь может идти лишь о выборе метода, который более эффективен для данной задачи. Споры о преимуществах того или иного метода являются беспредметными, если рассматривать эти методы вообще, без примененияк конкретной задаче.

Цель нашей работы – это овладеть основами метода комплексных чисел в геометрии и проиллюстрировать метод комплексных чисел при решении задач элементарного характера.

Известно, сколь широко используются комплексные числа в математике и её приложениях. Особенно часто применяется функции комплексного переменного, в частности, аналитические функции. Их изучение интересно само по себе, кроме того, они используются в механике, аэро- и гидродинамике, в алгебраической и неевклидовых геометриях, теории чисел. Вместе с тем алгебру комплексных чисел можно успешно использовать и в более простых разделах математики - элементарной геометрии, тригонометрии, теории движений и подобий, аффинных и круговых преобразований, а также в электротехнике и в различных механических и физических задачах.

Названные выше разделы элементарной математики хорошо описываются с использованием комплексных чисел, однако в литературе это отражено мало. Мы решили посмотреть, насколько реально применять при решении геометрических задач не геометрические методы. В своем исследовании мы использовали такие методы исследования, как анализ литературы по математике и решение задач на данную тему. Однако, без изучения некоторых теоретических моментов, связанных с комплексными числами, нам не удалось бы решить задачи, поэтому мы посчитали необходимым посвятить теоретическому аспекту первую главу нашей работы.

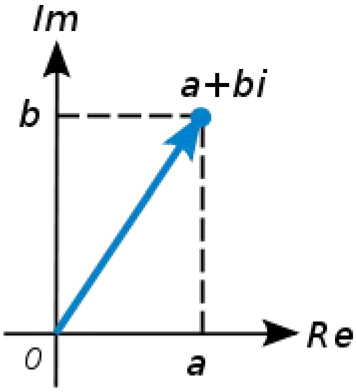
Глава 1. Понятие комплексного числа.

§1. Что такое комплексное число.

Комплексное число - это число, состоящее из вещественной и мнимой части. Поле комплексных чисел ($\mathbb{C}$) расширяет поле вещественных чисел так, что из каждого числа можно извлечь квадратный корень. В частности, квадратный корень отрицательного вещественного числа является **чисто мнимым числом**. Так как операция извлечения квадратного корня сохраняет произведение, то любое чисто мнимое число можно представить в виде yi, где $i^2 = -1$, число i называют **мнимой единицей**. Разрешив производить над мнимыми и вещественными числами обычные арифметические операции, таким образом получаем, что, любое комплексное число можно представить в виде $x + iy$ (x — вещественная часть, iy — мнимая часть), но это не единственный способ.

Комплексные числа были впервые описаны итальянским математиком Джероламо Кардано. В связи с вычислением корней кубического уравнения. Он заметил, что иногда в промежуточных вычислениях фигурируют квадратные корни из отрицательных чисел, хотя в конечное решение они и не попадают, и решение получается верным. Позже для описания таких корней была введена мнимая единица и арифметические операции в их современной форме.

Комплексные числа обладают рядом замечательных свойств, выделяющих их из ряда других полей. В отличие от поля вещественных чисел, комплексные числа образуют алгебраически замкнутое поле. Это означает, что любой многочлен произвольной степени n (n — любое натуральное число) с комплексными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней. Они также нашли значительное применение в анализе: теория функций комплексного переменного оказалась намного более богата, чем теория функций вещественного переменного, комплексные числа также играют важную роль при рассмотрении представлений функций в виде рядов: при комплексной записи вещественных рядов появляется возможность полностью решить вопрос о сходимости каждого ряда.



Комплексное число можно визуально представить парой чисел, образующих вектор на комплексной плоскости.(**Комплексная плоскость** — это двухмерное вещественное пространство $\mathbb{R}^2$, которое изоморфно полю комплексных чисел $\mathbb{C}$. Каждая точка такого пространства — это упорядоченная пара вида (x,y), где x и y — вещественные числа, и где первый элемент пары соответствует вещественной части, а второй элемент пары соответствует мнимой части комплексного числа $z = x + iy$:)

Сопряжённое комплексное число

Для каждого комплексного числа x определено сопряжённое комплексное число $\bar{x}$. Например, для комплексного числа $x = a + b\,i$ сопряжённым будет число $\bar{x} = a - b\,i$. Использование в вычислениях сопряжённых чисел позволяет выделять действительную и "векторную" части комплексного числа т.е.

$$Re(x) = \frac{1}{2}(x + \bar{x}) = a,$$

$$Vr(x) = \frac{1}{2}(x - \bar{x}) = b\,i.$$

При умножении комплексного числа на сопряжённое получается действительное число, которое называется "алгебраической нормой". Корень квадратный из алгебраической нормы называется модулем или абсолютной величиной комплексного числа, обозначается $|x|$.

$$|x| = +\sqrt{x\bar{x}}.$$

§2. История открытия комплексного числа.

Впервые, по-видимому, мнимые величины появились в известном труде «Великое искусство, или об алгебраических правилах» Кардано (1545), который счёл их непригодными к употреблению. Пользу мнимых величин, в частности, при решении кубического уравнения, в так называемом неприводимом случае (когда вещественные корни многочлена выражаются через кубические корни из мнимых величин), впервые оценил Бомбелли (1572). Он же дал некоторые простейшие правила действий с комплексными числами.

Выражения вида , $a + b\sqrt{-1}$ появляющиеся при решении квадратных и кубических уравнений, стали называть «мнимыми» в *XVI—XVII* веках, однако даже для многих крупных ученых *XVII* века алгебраическая и геометрическая сущность мнимых величин представлялась неясной. Лейбниц, например, писал: «Дух божий нашел тончайшую отдушину в этом чуде анализа, уроде из мира идей, двойственной сущности, находящейся между бытием и небытием, которую мы называем мнимым корнем из отрицательной единицы».

Долгое время было неясно, все ли операции над комплексными числами приводят к комплексным результатам, или, например, извлечение корня может привести к открытию какого-то нового типа чисел. Задача о выражении корней степени n из данного числа была решена в работах Муавра *(1707)* и Котса *(1722)*.

Символ $i = \sqrt{-1}$ предложил Эйлер *(1777*, опубл. *1794)*, взявший для этого первую букву слова лат. *imaginarius*. Он же распространил все стандартные функции, включая логарифм, на комплексную область. Эйлер также высказал в *1751* году мысль об алгебраической замкнутости поля комплексных чисел. К такому же выводу пришел Д'Аламбер *(1747)*, но первое строгое доказательство этого факта принадлежит Гауссу *(1799)*. Гаусс и ввёл в широкое употребление термин «комплексное число» в *1831* году, хотя этот термин ранее использовал в том же смысле французский математик Лазар Карно в *1803* году.

Геометрическое истолкование комплексных чисел и действий над ними появилось впервые в работе Весселя *(1799)*. Первые шаги в этом направлении были сделаны Валлисом (Англия) в *1685* году. Современное геометрическое представление, иногда называемое «диаграммой Аргана», вошло в обиход после опубликования в *1806*-м и *1814*-м годах работы Ж. Р. Аргана, повторявшей независимо выводы Весселя. Термины «модуль», «аргумент» и «сопряжённое число» ввёл Коши.

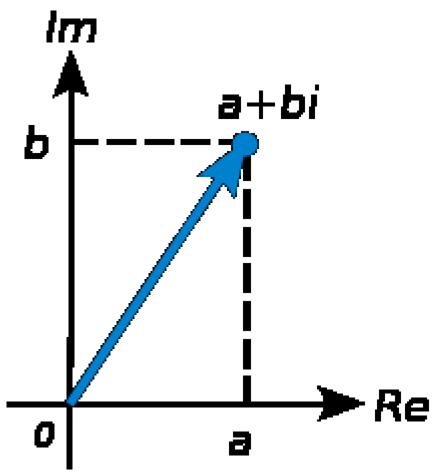
Арифметическая модель комплексных чисел как пар вещественных чисел была построена Гамильтоном *(1837)*; это доказало непротиворечивость их свойств. Гамильтон предложил и обобщение комплексных чисел — кватернионы, алгебра которых некоммутативна.

§3. Геометрическое изображение комплексного числа.

Рассмотрим плоскость с прямоугольной системой координат. Каждому комплексному числу сопоставим точку плоскости с координатами {x,y} (а также радиус-вектор, соединяющий начало координат с этой точкой). Такая плоскость называется комплексной. Вещественные числа на ней занимают горизонтальную ось, мнимая единица изображается единицей на вертикальной оси; по этой причине горизонтальная и вертикальная оси называются соответственно вещественной и мнимой осями.

Часто бывает удобно рассматривать на комплексной плоскости также полярную систему координат, в которой координатами точки являются расстояние до начала координат (модуль) и угол радиус-вектора точки (показанного синей стрелкой на рисунке) с горизонтальной осью (аргумент). Подробнее см. ниже.

В этом наглядном представлении сумма комплексных чисел соответствует векторной сумме соответствующих радиус-векторов. При перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Если модуль второго сомножителя равен 1, то умножение на него геометрически означает поворот радиус-вектора первого числа на угол, равный аргументу второго числа. Этот факт объясняет широкое использование комплексного представления в теории колебаний, где вместо терминов «модуль» и «аргумент» используются термины «амплитуда» и «фаза».



§4. Операции над комплексными числами.

Сравнение

$a + bi = c + di$ означает, что $a = c$ и $b = d$ (два комплексных числа равны между собой тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части).

Сложение

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.

Вычитание

$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$

Умножение

$$(a+bi)\cdot(c+di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i.$$

Деление

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i.$$

Формула Муавра и извлечение корней из комплексных чисел

Основная статья: Формула Муавра

Корни пятой степени из единицы (вершины пятиугольника)

Эта формула позволяет возводить в целую степень ненулевое комплексное число, представленное в тригонометрической форме. Формула Муавра имеет вид:

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

где r — модуль, а — аргумент комплексного числа. В современной символике она опубликована Эйлером в 1722 году. Приведенная формуле справедлива при любом целом n, не обязательно положительном.

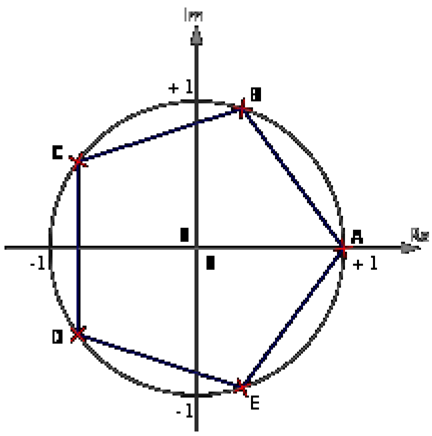
Аналогичная формула применима также и при вычислении корней n-ой степени из ненулевого комплексного числа:

$$z^{1/n} = [r(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k))]^{1/n} =$$

$$= r^{1/n} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

$$n > 1, k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Отметим, что корни n-й степени из ненулевого комплексного числа всегда существуют, и их количество равно n. На комплексной плоскости, как видно из формулы, все эти корни являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса с центром в начале координат (см. рисунок).



Глава 2. Комплексное число в геометрических задачах.

§1. Решение геометрических задач методом комплексных чисел.

Задача 1. В результате поворота на $90°$ вокруг точки O отрезок AB перешёл в отрезок A_1B_1. Доказать, что медиана OM треугольника OAB_1 перпендикулярна прямой A_1B (рис. 7).

Пусть координаты O, A, B равны, соответственно, 0, 1, b. Тогда точки A_1 и B_1 будут иметь координаты $a_1 = i$ и $b_1 = bi$ (п. 1.4), а середина M отрезка AB_1 — координату $m = \frac{1}{2}(1+bi)$. Находим:

$$\frac{a_1 - b}{m - 0} = \frac{i - b}{\frac{1}{2}(1+bi)} = \frac{2i(i-b)}{(i-b)} = 2i.$$

Это число чисто мнимое. На основании критерия перпендикулярности прямые OM и A_1B перпендикулярны

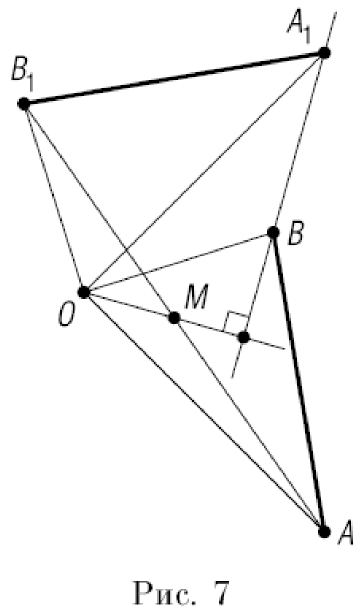


Рис. 7

З а д а ч а 2. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC построен квадрат вне треугольника (рис. 8). Найти расстояние от вершины C прямого угла до центра Q квадрата, если длины катетов BC и AC равны, соответственно, a и b.

Примем точку C за начальную, а прямые CA и CB за действительную и мнимую оси. Тогда точки A и B будут иметь соответственно комплексные координаты b и ai, причём $b=\overline{b}$ и $a=\overline{a}$. При повороте на 90° вектор $\overrightarrow{QB}$ переходит в вектор $\overrightarrow{QA}$. Поэтому имеем равенство $(ai-q)i=b-q$, где q — координата точки Q. Отсюда $q=\dfrac{a+b}{1-i}$. Находим:

$$CQ^2=q\overline{q}=\frac{a+b}{1-i}\cdot\frac{a+b}{1+i}=\frac{1}{2}(a+b)^2,$$

$$CQ=\frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

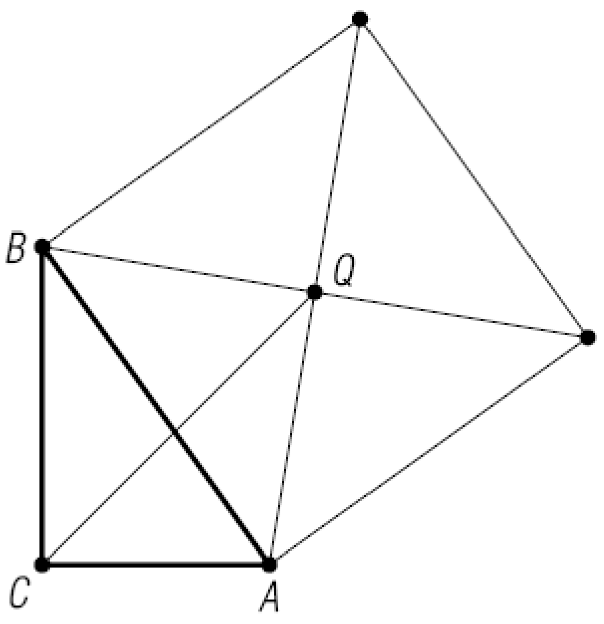


Рис. 8

З а д а ч а 3. Из основания высоты треугольника опущены перпендикуляры на две стороны, не соответственные этой высоте. Доказать, что расстояние между основаниями этих перпендикуляров не зависит от выбора высоты треугольника.

Пусть дан треугольник ABC (рис. 9), причём описанная около него окружность имеет уравнение $z\bar{z}=1$. Если CD — высота треугольника, то $d=\frac{1}{2}\left(a+b+c-\frac{ab}{c}\right)$. Комплексные координаты оснований M и N перпендикуляров, опущенных из точки D на AC и BC соответственно, равны $m=(a+c+d-ac\bar{d})/2$ и $n=(b+c+d-bc\bar{d})/2$. Находим:

$$m-n=\frac{1}{2}(a-b+c\bar{d}(b-a))=$$

$$=\frac{1}{2}(a-b)(1-c\bar{d})=\frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{4ab}.$$

Так как $|a|=|b|=1$, то $|m-n|=|(a-b)\times(b-c)(c-a)|/4$. Это выражение симметрично относительно a, b, c, т. е. расстояние MN не зависит выбора высоты треугольника.

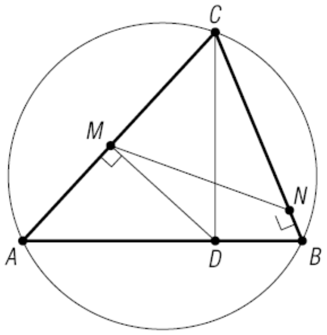


Рис. 9

Задача 4. Точки A_1, B_1, C_1 являются ортогональными проекциями вершин A, B, C треугольника на некоторую прямую l. Доказать, что прямые, проходящие через точки A_1, B_1, C_1 перпендикулярно BC, CA, AB соответственно, пересекаются в одной точке, называемой *ортополюсом* прямой l (рис. 11).

Пусть описанной около треугольника ABC окружности соответствует уравнение $z\overline{z}=1$, а данной прямой l — уравнение $\overline{p}z+p\overline{z}=2p\overline{p}$.

Тогда, $a_1=p+\dfrac{a}{2}-\dfrac{p\overline{a}}{2\overline{p}}$. Для того, чтобы точка с координатой z принадлежала перпендикуляру прямой BC, содержащему A_1, необходимо и достаточно, чтобы число

$$\frac{z-a_1}{b-c}=\frac{2\overline{p}z-2p\overline{p}-a\overline{p}+p\overline{a}}{2\overline{p}(b-c)}$$

было чисто мнимым. Проверка показывает, что оно является таковым, в частности, при

$$z=z_0=\frac{1}{2}\left(a+b+c+2p+\frac{abc\overline{p}}{p}\right). \qquad (5.1)$$

В самом деле,

$$\frac{z_0-a_1}{b-c}=\frac{(p+ab\overline{p})(p+ac\overline{p})}{2ap\overline{p}(b-c)}=-\frac{\overline{z}_0-\overline{a}_1}{\overline{b}-\overline{c}}.$$

Следовательно, точка $S(z_0)$ принадлежит указанному перпендикуляру. Вследствие того, что в выражение (5.1) координаты a, b, c треугольника ABC входят симметрично, точка $S(z_0)$ также принадлежит и двум другим аналогичным перпендикулярам.

Приведённые рассуждения теряют силу, когда прямая l проходит через начало O. В этом случае зададим её точкой $M(m)$ описанной около треугольника ABC окружности. Тогда вторая общая точка прямой l и окружности имеет координату $-m$ и $a_1=\frac{1}{2}\left(a+\frac{m^2}{a}\right)$.

Вместо (5.1) подвергаем той же проверке число

$$z=z_0=\frac{1}{2}\left(a+b+c-\frac{abc}{m^2}\right), \qquad (5.2)$$

и приходим к тому же выводу.

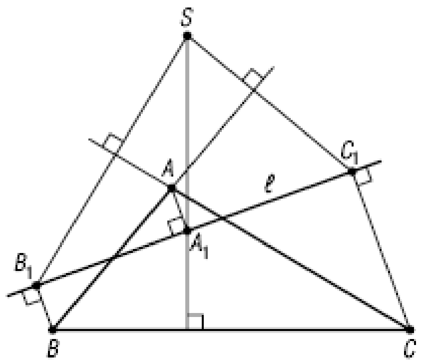


Рис. 11

З а д а ч а 5. . Из точки окружности опущены перпендикуляры на прямые, содержащие стороны и диагонали вписанного в неё четырёхугольника. Доказать, что произведения длин перпендикуляров, опущенных на противоположные стороны, и произведение длин перпендикуляров, опущенных на диагонали, равны.

Пусть данная окружность имеет уравнение $z\overline{z}=1$. Пусть A_0, B_0, C_0, D_0, E_0, F_0 — ортогональные проекции точки $M(m)$ окружности соответственно на прямые AB, BC, CD, DA, AC, BD. Тогда

$$a_0=\frac{1}{2}\left(a+b+m-\frac{ab}{m}\right), \quad c_0=\frac{1}{2}\left(c+d+m-\frac{cd}{m}\right).$$

Находим:

$$MA_0^2\cdot MC_0^2=(m-a_0)(\overline{m}-\overline{a}_0)(m-c_0)(\overline{m}-\overline{c})=$$
$$=\frac{(m-a)(m-b)}{2m}\cdot\frac{(a-m)(b-m)}{2abm}\cdot\frac{(m-c)(m-d)}{2m}\cdot\frac{(c-m)(d-m)}{2cdm}=$$
$$=\frac{((m-a)(m-b)(m-c)(m-d))^2}{16m^4abcd}.$$

Симметричность этого выражения относительно a, b, c, d говорит о том, что ему также равны произведения $MB_0^2\cdot MD_0^2$ и $ME_0^2\cdot MF_0^2$.

Заключение.

Работая над этой темой, мы узнали, что существуют различные методы решения геометрических задач при помощи комплексных чисел. Получили сведения о новых нужных формулах, которые в дальнейшем могут помочь нам решать более быстро и эффективно задачи, также мы расширили свой кругозор. Сейчас мы знаем еще один тип чисел, который до этого нам был неизвестен.

Метод комплексного числа широко используется в различных науках, причем не только в математических, но и в таких, как механика, аэро- и гидродинамика, также комплексное число используют в алгебраической и неевклидовых геометриях, теории чисел. Вместе с тем алгебру комплексных чисел можно успешно использовать и в более простых разделах математики - элементарной геометрии, тригонометрии, теории движений и подобий, аффинных и круговых преобразований, а также в электротехнике и в различных механических и физических задачах.

Мы постарались проиллюстрировать метод комплексных чисел на решении геометрических задач элементарного характера. К сожалению, комплексные числа не всегда проходят по программе в школе, а это один из красивейших разделов математики. Понятие о комплексном числе в какой-то мере изменяет наше представление о математике, дает философское трактование числа, раздвигая границы нашего познания о теории множеств и теории числа.

Список используемой литературы:

1. Виленкин Н. Я. Алгебра: Учебное пособие для 9—10 кл. средних школ с математической специализацией. М.: Просвещение. 1968. 197—239 с.
2. Выгодский М. Я Справочник по элементарной математике. М.: АСТ Астрель. 2006. 509 с.
3. Елисеев В. И Введение в методы теории функций пространственного комплексного переменного. М.: НИАТ. 1990. 288 с.
4. Понарин Я.П. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах. М.: издательство московского центра непрерывного математического образования. 2004. 159 с.
5. Понтрягин Л.С. Комплексные числа. М.: НИАТ. 1990. 226 с.
6. Савин А.Н. Энциклопедический словарь юного математика. М.: Педагогика. 1989. 356 с.