Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ учащихся «Прикладные вопросы математики»

Математическое моделирование

# Моделирование роста листа виктории-регии

Снигирева Влада Николаевна,
МОУ «Лицей №1» г. Перми, 11 кл.
Шабрыкина Наталья Сергеевна,
к. ф.-м. н., доцент ПНИПУ

## Введение

На нашей планете насчитывается около 500 тысяч видов растений, среди которых есть просто поразительные. Также существует своеобразный рейтинг растений с необычными свойствами, так вот в двадцатку входит легендарная “Виктория регия” (Victoria Regia). Родина этого растения – река Амазонка. Европейцы впервые обнаружили ее в 1864 году и назвали викторией-регией. В честь взошедшей полгода спустя на британский престол королевы Виктории она была названа викторией регией (лат. Victoria Regia — «Виктория царственная»). Это самая крупная на нашей планете кувшинка, каждый лист ее может достигать в диаметре до 3-х метров. Листья имеют одну особенность – они похожи на гигантскую сковороду. Листья виктории-регии могут выдерживать груз до 50 киллогамм. Ближайший ботанический сад, где растет кувшинка царственная, находится в Петербурге. Там это растение цветет днем, производится в особых для нее построенных аквариях, так как это очень капризное растение, и оно требует особых условий: вода должна иметь температуру 32°С, воздух 25°С , при этом освещение должно быть довольно сильное.

На викторию-регию хотят посмотреть большое количество людей, но его достаточно сложно выращивать, особенно если учитывать, что растение однолетнее. Поэтому в работе «Моделирование роста листа виктории-регии» планируется найти зависимость площади листа от времени, посмотреть как быстро она растет, при этом будут учитываться такие параметры, как освещение, то есть направление лучей солнца.

## Концептуальная постановка задачи

В этой работе рассматривается модель роста листа виктории-регии, от каких параметров она зависит, что может на него влиять. Для того чтобы составить модель, необходимо разобраться какие параметры можно не учитывать, а какие нельзя.

**В модели не будут учитываться следующие параметры:**

1. Росту виктории-регии не препятствуют травоядные животные, так как их отпугивают шипы(иглы), которые находятся на внешней стороне листовой пластинки. Причем укол такой колючкой можно сравнить с укусом осы или пчелы.

2. Виктория-регия - капризное растение, которое можно выращивать в оранжерейных условиях как однолетнюю культуру. Причем температура воды должна быть постоянно на отметке 32 – 33 °C. Ее перепады даже на два градуса губительны для виктории-регии. Более того для этого растения поддерживается специальный микроклимат, ведь оптимальная температура воздуха для существования роста виктории-регии составляет 20 - 25°C. Поэтому мы будем считать, что климат соответствующий, так как в противном случае растение не сможет не только расти, но и существовать.

**Данная модель будет зависеть от следующих параметров:**

1. Форма листа - идеальный круг, так как листья виктории-регии близки к окружности (рис. 1)

Рис. 1. Виктория-регия

2. Скорость роста листа пропорциональна его окружности и количеству солнечного света, падающего на лист

3. Количество солнечного света пропорционально площади листа и косинусу угла между направлением лучей и вертикалью

4. На экваторе в день равноденствия угол между направлением лучей солнца и вертикалью считаем 90 градусов в 6 часов утра и вечера и 0 градусов в полдень

5. Начальные условия: в 6 часов утра площадь листа равнялась $s0$

6. Условия для определения коэффициента пропорциональности: в 6 часов вечера того дня, когда площадь листа в 6 часов утра равнялась $s0$, площадь листа равнялась $ss$

## Математическая постановка задачи

По сделанным предположениям, что скорость роста листа пропорциональна его окружности и количеству солнечного света, падающего на лист, следовательно, этому утверждению соответствует следующая формула:

$$\frac{ds(t)}{dt} = 2r_1 \sqrt{\pi\, s(t)} c, \qquad (1)$$

где $s(t)$ - площадь листа, $t$ -время, $c$ -количество солнечного света, $r_1$ -коэффициент пропорциональности.

Можно представить, что количество солнечного света пропорционально площади листа и косинусу угла между направлением лучей и вертикалью, тогда можно записать следующую формулу:

$$c = r_2 s(t) \cos\alpha , \qquad (2)$$

где $r_2$ -коэффициент пропорциональности.

По данным о том, что если вести наблюдение на экваторе в день равноденствия, то угол между направлением лучей солнца и вертикалью можно считать 90 градусов в 6 часов утра и вечера и 0 градусов в полдень, можно записать функцию:

$$\cos\alpha = \cos\frac{\pi\,(t-12)}{t} \qquad (3)$$

Подставим значение (3) в (2):

$$c = r_2 s(t) \cos\frac{\pi\,(t-12)}{t} \qquad (4)$$

Подставим (4) в (1):

$$\frac{ds(t)}{dt} = 2r_1 \sqrt{\pi\, s(t)} c r_2 s(t) \cos\frac{\pi\,(t-12)}{t} \qquad (5)$$

Так как $r_1$ и $r_2$ константы, то заменим их произведение коэффициентом $r$ и получим итоговую формулу :

$$\frac{ds(t)}{dt} = 2r\sqrt{\pi\, s(t)}cs(t)\cos\frac{\pi\,(t-12)}{t} \tag{6}$$

На рис. 2 черным цветом изображена функция (3), можно заметить, что она близка к параболе.

Возьмем три точки пересечения осями: (6;0), (12;1), (18;0), при этом вершину параболы возьмем в точке (12;1). Такая парабола изображена на рис. 2 красным цветом. Тогда функция, которая соответствует этой параболе, имеет вид:

$$y = \frac{1}{36}t^2 + \frac{2}{3}t - 3 \tag{7}$$

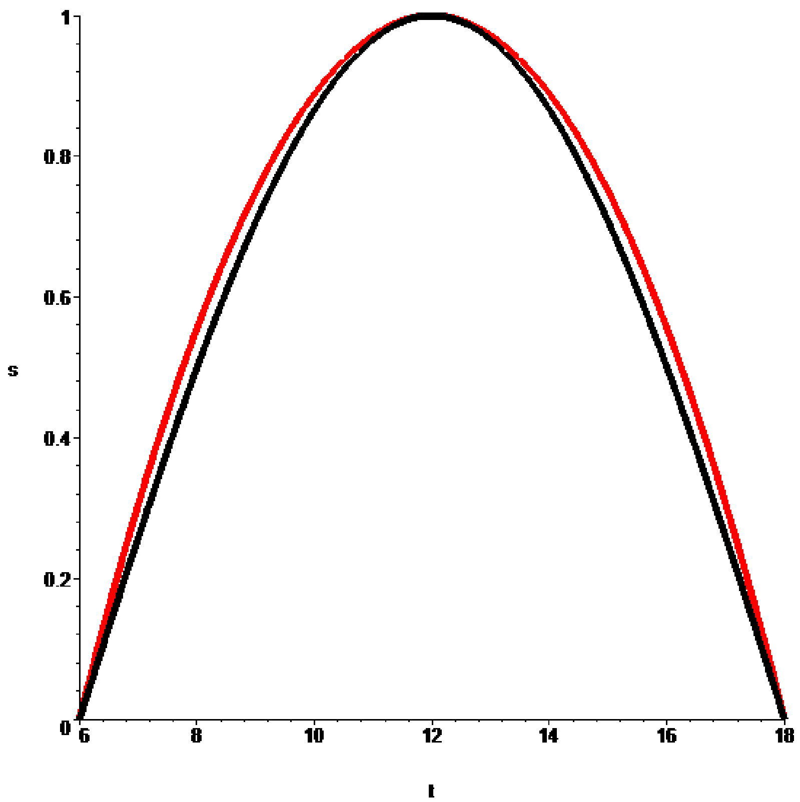


Рис. 2. Функция (3) – черный цвет. Функция (7) – красный.

Если заменить функцию (3) на (7), то получится следующее уравнение:

$$\frac{ds(t)}{dt} = 2r\sqrt{\pi\, s(t)}cs(t)(1/36t^2 + \frac{2}{3}t - 3) \tag{8}$$

Для решения уравнений (6) и (8) необходимы два условия:

1. Начальное условие: в 6 часов утра площадь листа равнялась 1600 см$^2$

2. Условие для определения коэффициента пропорциональности: в 6 часов вечера того дня, когда площадь листа в 6 часов утра равнялась 1600 см$^2$, площадь листа равнялась 2500 см$^2$

## Решение задачи

Задача была решена аналитически с помощью математического пакета Maple. Исходный код программы представлен в приложении 2. Конечным аналитическим решением является формула:

$$s(t) := \pi\ t0 \Bigg/ \left( \frac{\sin\left(\frac{\pi\ t}{12}\right)^2 \left(-ss\sqrt{\pi\ t0} + t0\sqrt{ss\,\pi}\right)^2}{ss^2\ t0 \left(-\sin\left(\frac{\pi\ tk}{12}\right) + \sin\left(\frac{\pi\ s0}{12}\right)\right)^2} \right.$$

$$- \frac{2\sin\left(\frac{\pi\ t}{12}\right)\left(-ss\sqrt{\pi\ t0} + t0\sqrt{ss\,\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi\ s0}{12}\right)}{ss^2\ t0 \left(-\sin\left(\frac{\pi\ tk}{12}\right) + \sin\left(\frac{\pi\ s0}{12}\right)\right)^2}$$

$$- \frac{2\sin\left(\frac{\pi\ t}{12}\right)\left(-ss\sqrt{\pi\ t0} + t0\sqrt{ss\,\pi}\right)\sqrt{\pi\ t0}}{ss\ t0 \left(-\sin\left(\frac{\pi\ tk}{12}\right) + \sin\left(\frac{\pi\ s0}{12}\right)\right)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi\ s0}{12}\right)^2 \left(-ss\sqrt{\pi\ t0} + t0\sqrt{ss\,\pi}\right)^2}{ss^2\ t0 \left(-\sin\left(\frac{\pi\ tk}{12}\right) + \sin\left(\frac{\pi\ s0}{12}\right)\right)^2}$$

$$\left. + \frac{2\sin\left(\frac{\pi\ s0}{12}\right)\left(-ss\sqrt{\pi\ t0} + t0\sqrt{ss\,\pi}\right)\sqrt{\pi\ t0}}{ss\ t0 \left(-\sin\left(\frac{\pi\ tk}{12}\right) + \sin\left(\frac{\pi\ s0}{12}\right)\right)} + \pi \right) \tag{9}$$

## Результаты решения

С помощью зависимости (9) и начальных условий, что площадь в момент времени 6 часов равнялась 1600см$^2$ и площадь в момент времени 18 часов равнялась 2500 см$^2$ ,были построены графики, которые изображены на рис. 3.

Два графика получились (рис. 3 и рис.4), так как коэффициент пропорциональности имеет два значения. По графику на рис. 3 видно, как увеличивалась площадь листа виктории-регии в зависимости от времени. Этот график непрерывен, то есть лист растет плавно, постепенно. Однако график на рис. 4 разрывен, то есть площадь листа виктории-регии сначала стала бесконечно большой, а потом стала уменьшаться и стремиться к нулю, этого быть не может, следовательно, этот график и второе значение $r$ не имеют физического смысла, поэтому далее графики, соответствующие посторонним корням коэффициента пропорциональности, приводиться не будут.

Возьмем ту же самую зависимость, но другие начальные условия: площадь в момент времени 6 часов равнялась 10см$^2$ и площадь в момент времени 18 часов равнялась 1000см$^2$. График этой функции изображен на рис. 5, он является непрерывным и показывает в какой момент времени чему равнялась площадь листа.

Рассмотрим уравнение, которое соответствует уравнению (8), где начальные условия: площадь в момент времени 6 часов равнялась 1600см$^2$ и площадь в момент времени 18 часов равнялась 2500см$^2$. Этому графику соответствует рис. 6.

Графики, изображенные на рис. 3 и рис. 6, имеют одинаковые начальные условия, но разные уравнения, и, следовательно, разные зависимости. Если сравнить два этих графика, то можно понять, что на рис. 3 площадь листа увеличивается гораздо быстрее. На рис. 6 график более плавный. Это можно понять, посмотрев на момент времени, равный

14, площадь листа виктории-регии на рис. 3 в этот момент уже превысила 2000 см$^2$, а на рис. 5 нет. Эта разница хорошо видна, однако изменения этих функций равны. Это можно объяснить тем, что на рис. 3 изображена функция косинуса, а на рис. 6 функция параболы. Но так как начальные условия у них равны, то и изменения этих функций равны.

На рис. 3 и рис. 5 графики имеют одинаковую зависимость, но разные начальное условие и условие для определения коэффициента. Видно, что сами графики получились одинаковыми (так как в обоих случаях взята функция косинуса), различны лишь значения площадей, которым соответствуют определенные моменты времени.

Изучая график, можно понять, чему равнялась площадь листа в определенный момент времени, на сколько она увеличилась за весь день.

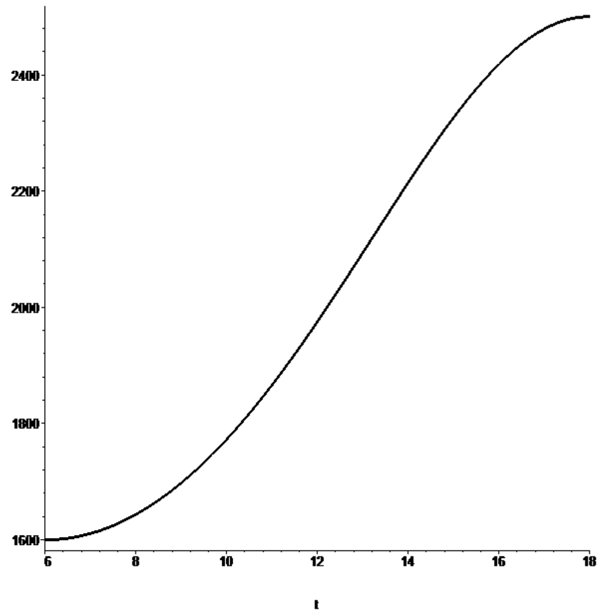


Рис. 3. Зависимости площади листа от времени при начальных условиях: $s(6)$ =1600см$^2$ и $s(18)$ = 2500 см$^2$, уравнение (6), настоящий корень коэффициента.

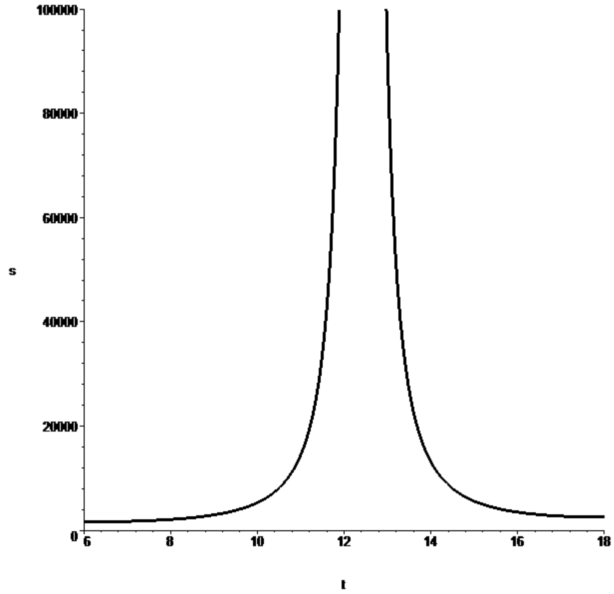


Рис. 4. Зависимость площади листа от времени при начальных условиях: $s(6)$ =1600см$^2$ и $s(18)$ = 2500 см$^2$, уравнение (6), посторонний корень коэффициента.

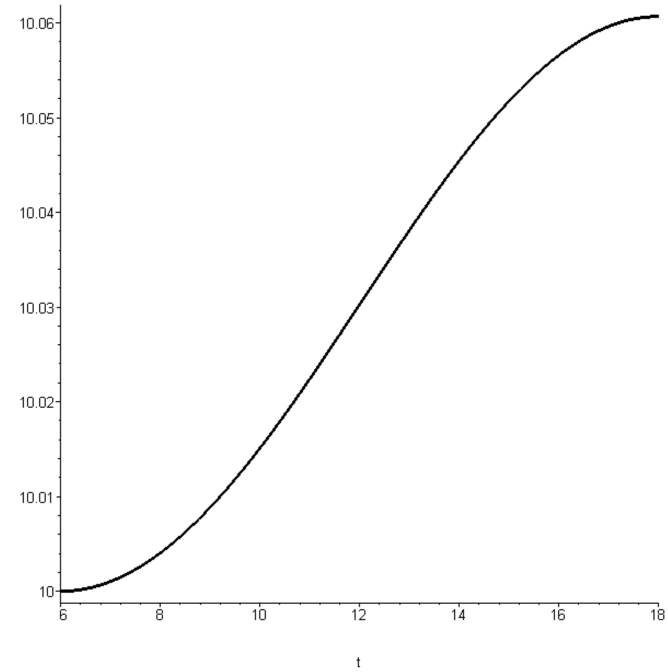


Рис. 5. Зависимость площади листа от времени при начальных условиях: $s(6)$ =10 см$^2$ и $s(18)$ = 1000 см$^2$, уравнение (6)

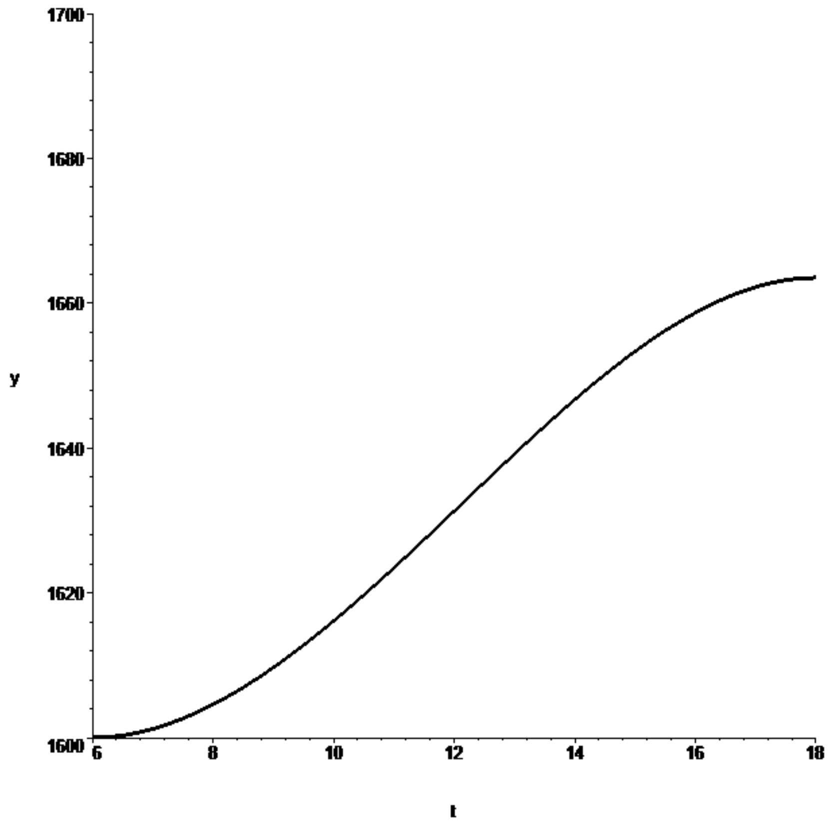


Рис. 6. Зависимость площади листа от времени, если уравнение (8), а начальные условия: $s(6)$ =1600см$^2$ и $s(18)$ = 2500 см$^2$.

## Заключение

В работе был рассмотрен процесс роста молодого листа в зависимости от времени, построила графики и определила зависимость между площадью листа и временем. Конечно, данная модель не учла всех тонкостей, например, считалось, что температура воды и воздуха не могут меняться ( они равны 32 и 25 градусов соответственно), иначе эту модель было бы рассматривать гораздо сложнее, ведь изменение температуры даже на 2 градуса может быть губительным для виктории-регии.

Также было составлено дифференциальное уравнение. Оно было решено с помощью математического пакета Maple.

Исследуя зависимости, стало понятно, какие имеют физический смысл, а какие нет. Также был сделан вывод, что, чем круче график функции, тем лист виктории-регии растет быстрее. В зависимости от начальных условий получаются разные значения коэффициента пропорциональности. Удалось определить, чему равнялась площадь этого удивительного растения в любой определенный момент времени.

## Список литературы

1. Виктория регия – самая большая кувшинка в мире.http://indasad.ru/vodnie-rasteniya/viktoriya-regiya-samaya-bolshaya-kuvshinka-v-mire . 06.2011
2. Кувшинка-Виктория. http://www.atvmedia.ru/index.php?report=12515. 06.2011
3. Виктория амазонская или кувшинка Виктория регия (лат. Victoria amazonica). http://wolffia.ru/r/viktoriya-amazonskaya/. 06.2011
4. Дьяконов В. Maple: учебный курс. – СПб., 2001.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М., 1963.