

Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ  
учащихся «Прикладные вопросы математики»

Математическое моделирование

**Математическое моделирование прыжковых элементов  
фигурного катания**

Снигирева Влада Николаевна,  
Целищева Юлия Юрьевна  
МОУ «Лицей №1» г. Перми, 11  
кл.  
Шабрыкина Наталья Сергеевна,  
к. ф.-м. н., доцент ПНИПУ

## Введение

Сегодня фигурное катание является одним из самых популярных видов спорта. И это не удивительно: он сочетает в себе массу пользы и положительных эмоций. Ежегодно во всем мире проводятся чемпионаты по фигурному катанию, оно также входит в программу зимних олимпийских игр. Кроме того, множество людей увлекаются фигурным катанием на любительском уровне, для себя.

Данный вид спорта отличается разнообразием простых и сложных элементов, но прыжки по праву можно назвать самыми зрелищными. Прыжков в фигурном катании множество, но все подчиняются похожим закономерностям. Конечно, прежде чем учиться их выполнять, начинающий фигурист уже получает некоторые навыки в этом виде спорта, что позволяет сделать прыжок не только более изящным и технически правильным, но и более безопасным. Тем не менее, любому новичку, желающему освоить данный элемент, было бы полезно узнать, как успешность выполнения прыжка зависит от различных параметров. Например, как высота зависит от начальной скорости фигуриста или от того, насколько маленьким или большим будет угол между опорной ногой и поверхностью льда в момент толчка. Данная работа посвящена построению математической модели прыжка в фигурном катании и рассмотрению уже упомянутых зависимостей.

## Обзор литературы

В книге Мишина А.Н. Биомеханика движений фигуриста есть основные модели движений фигурного катания, но автор использует простейшие модели, обоснование которых не проверено. Например, при прыжке считается, что центр масс фигуриста движется как тело, брошенное под углом к горизонту, без учета сил сопротивления.

В данной работе необходимо выяснить, какие силы следует учитывать при выполнении прыжка. А для того, чтобы это сделать, нужно провести сравнение созданной модели с экспериментом.

Множество экспериментальных данных по прыжкам и не только можно найти в интернете.

Актуальность данной работы очевидна. Сегодня фигурное катание активно развивается, в некотором смысле благодаря развитию науки и техники. Математическое моделирование позволяет достаточно точно воссоздать ситуацию или процесс и провести компьютерный эксперимент, что часто оказывается проще и безопаснее реального эксперимента. Поэтому математическое моделирование все чаще используется в спорте: можно проследить, как будет меняться ход выполнения элемента или течение какого-либо процесса, изменяя различные параметры математической модели.

## Концептуальная постановка задачи

В этой работе моделируются элементы фигурного катания – прыжки.

Определяется зависимость высоты и длины прыжка от количества оборотов: начальной скорости, угла вылета, начального крутящего момента.

Рассматривается фаза полета от момента отталкивания до момента приземления.

Предположения:

1. В модели будет учитываться сила тяжести, действующая на фигуриста
2. Для простоты вычислений, считаем, что фигурист движется в плоскости, перпендикулярной поверхности льда.
3. Согласно обзору литературы для скоростей, характерных для скоростей фигуриста, сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости.

## Математическая постановка

По сделанным предположениям, что на фигуриста действуют только лишь сила тяжести и сила сопротивления воздуха, был записан второй закон Ньютона:

$$m \vec{g} + \vec{C} = m \{ \vec{a} \dot{t} \quad (1),$$

Где  $m$  - масса фигуриста,  $g$  - ускорение свободного падения,  $a$  - ускорение фигуриста,  $C$  – сила сопротивления, действующая на фигуриста.

Спроецируем (1) на ось  $x$ :

$$C = -ma \quad (2)$$

Спроецируем (1) на ось  $y$ :

$$-mg - C = ma \quad (3)$$

Так как сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости, то можно записать:

$$C = kV(t)V(t) \quad (4),$$

где  $V(t)$  - скорость фигуриста,  $k$  - коэффициент пропорциональности.

Подставим (4) в (3):

$$-mg - kV_y(t)V_y(t) = m \frac{dV_y(t)}{dt} \quad (5),$$

где  $V_y(t)$  - проекция скорости на ось  $y$ .

Подставим (4) в (2):

$$kV_x(t)V_x(t) = -m \frac{dV_x(t)}{dt} \quad (6),$$

где  $V_x(t)$  - проекция скорости на ось  $x$ .

Получилась система дифференциальных уравнений относительно  $V_y(t)$  и  $V_x(t)$ , для решения этой системы, то есть уравнений (5) и (6) необходимы начальные условия:

1.  $V_x(0) = V_{x0}$
2.  $V_y(0) = V_{y0}$

Запишем зависимость горизонтальной координаты от времени:

$$V_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad (7),$$

Где  $x(t)$  - координата по оси  $x$ .

Запишем зависимость вертикальной координаты от времени:

$$V_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} \quad (8),$$

Где  $y(t)$  - координата по оси  $y$ .

Для решения дифференциальных уравнений (7) и (8) необходимы начальные условия:

1.  $x(0) = x_0$
2.  $y(0) = y_0$

## Решение и анализ результатов

Задача была решена аналитически с помощью математического пакета Maple. Зависимости компонент скорости от времени имеют вид:

$$V_x(t) = \frac{mV_{x0}}{V_{x0}tk + m} \quad (9)$$

$$V_y(t) = \operatorname{tg} \left( \frac{-t\sqrt{mkg} + m \operatorname{arctg} \left( \frac{kV_{y0}}{\sqrt{mkg}} \right)}{m} \right) \frac{\sqrt{mkg}}{k} \quad (10)$$

Также были рассчитаны такие величины, характеризующие прыжок, как время полета, высота и длина прыжка. Эти величины сравнивались с аналогичными величинами, полученными с помощью видеосъемки авторами работ [2-4]. Результаты сравнения приведены в таблицах 1 и 2.

При этом в модель подставлялись значения компонент начальной скорости и массы фигуриста, взятые из экспериментальных данных. Значение коэффициента сопротивления воздуха взято из литературы [1].

Приведенные результаты показывают хорошее соответствие между экспериментальными данными и результатами моделирования.

фигурист	эксперимент						модель без сопротивления воздуха					
	прыжок	время, с	Vx вылета, м/с	Vy вылета, м/с	длина, м	высота, м	время, с	длина, м	высота, м	□ (время), %	□ (длина), %	□ (высота), %
Овчинников Ю.	2Л	0,59	5,42	2,9	3,2	0,43	0,59	3,20	0,43	0,21	0,14	0,32
Овчинников Ю.	2А	0,7	5	3,44	3,5	0,6	0,70	3,51	0,60	0,19	0,19	0,52
Бобрин И.	2Л	0,56	5	2,73	2,8	0,39	0,56	2,78	0,38	0,61	0,61	2,60
Бобрин И.	2А	0,62	4,65	3,16	2,9	0,47	0,64	3,00	0,51	3,91	3,30	8,29
Лисовский И.	2Л	0,5	6,2	2,46	3,1	0,31	0,50	3,11	0,31	0,31	0,31	0,50
Лисовский И.	2А	0,65	5,05	3,2	3,28	0,52	0,65	3,29	0,52	0,37	0,45	0,37

Таблица 2. Сравнение с экспериментальными данными для прыжка аксель в один, два и три оборота [4]

Фигурист	Вид прыжка	Vx(0)	Vy(0)	Экспер. длина	Посчит. длина	Экспер. высота	Посчит. высота	Время
А	Одинарный	4.2	3.3	3.8	2.76	0.56	0.55	0.6702
	Двойной	4.8	3.4	3.7	3.25	0.66	0.59	0.6903
	Тройной	3.8	3.1	3.4	2.35	0.58	0.49	0.6299
В	Одинарный	6.8	3.1	4.1	4.1	0.79	0.49	0.6297
	Двойной	4.4	3.3	3.8	2.9	0.66	0.58	0.6699
	Тройной	4.7	3.3	3.6	3.1	0.64	0.55	0.6699
С	Одинарный	6.2	3.6	4.7	4.2	0.79	0.63	0.7307
	Двойной	4.7	3.6	4.2	3.35	0.73	0.63	0.7307
	Тройной	3.3	3.4	4.3	2.25	0.81	0.59	0.6905
D	Одинарный	5.2	3.4	4.2	3.5	0.71	0.58	0.6918
	Двойной	5.2	3.6	3.9	3.7	0.69	0.65	0.7307
	Тройной	2.9	3.4	4.0	2.0	0.69	0.57	0.6902
E	Одинарный	4.2	2.8	5.0	2.35	0.56	0.38	0.5693
	Двойной	4.5	3.0	4.4	2.7	0.53	0.46	0.6101
	Тройной	3.3	3.4	4.2	2.25	0.58	0.59	0.6907



## Список литературы

1. [http://student.km.ru/ref\\_show\\_frame.asp?id=F1D57B6806E9486391F53A77A73C944E](http://student.km.ru/ref_show_frame.asp?id=F1D57B6806E9486391F53A77A73C944E)
2. Мишин Н. А. Биомеханика движений фигуриста. - М: Физкультура и спорт, 1981. — 144 с, ил.
3. Мишин А,Н, Прыжки в фигурном катании, -М: «Физкультура и спорт», 1976
4. A kinematic comparison of single, double and triple axels / King D., Arnold A., Smith S.// J. Applied Biomechanics (1994) 10: 51-60.