

Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ учащихся
«Прикладные вопросы математики»

Математическое моделирование

**Статический анализ конструкции балочного
моста. Прямой метод**

Сташков Максим Александрович
МОУ «Лицей №1» г. Перми, 11 кл.

Волегов Павел Сергеевич
к.ф.-м.н., доц. каф. ММСП

ПНИПУ

Пермь
2011

Оглавление

Введение.....	стр. 3
Глава 1. Концептуальная постановка задачи моделирования.....	стр. 6
Глава 2. Математическая постановка задачи моделирования	
§1. Прямой метод подсчета однопролетного моста.....	стр. 9
§2. Прямой метод подсчета двухпролетного моста.....	стр. 13
Глава 3. Выводы и заключения.....	стр. 23
Глава 4. Список литературы.....	стр. 24

Введение

Мост – одно из важнейших изобретения человека. Мосты существуют так же давно, как и сам человек. Их используют для различных целей: переправки людей, грузов через моря, пропасти, дороги и т.д. Мосты бывают различных видов. Самые распространенные из них – это балочные. Но какой мост будет самым надежным, удобным и дешевым?

Следует отметить, что именно с натуральных моделей мостов в середине XIX века моделирование стало развиваться как научная дисциплина, а сами модели – активно использоваться при проектировании новых конструкций. Оказывается, что использование балочных мостов требует принципиального изменения конструкции моста. В первую очередь это осознали строители. Как известно, во время пробок на мосту, жизнь людей зависит от прочности конструкции моста. Для балочных мостов положение равновесия определяется количеством балок. Поэтому чем выше требуемая прочность моста, тем большее количество балок необходимо использовать в конструкции. Все это утяжеляло мост и снижало его устойчивость с весом транспорта. Учитывая, что строительство одного моста занимало несколько лет, а его стоимость была весьма значительной, можно понять стремление строителей найти более быстрый и дешевый (по сравнению с традиционным методом проб и ошибок) способ поиска оптимальных параметров моста. Выход был найден в моделировании. Протягивая в бассейнах небольшие модели мостов и, измеряя силу сопротивления в балках, были найдены рациональные решения, как по форме, так и по мощности силовой установки.

В мире повсюду применяют мосты балочных типов (см. рис. 1).



Рис.1 Примеры балочных мостов [www.yandex.ru/image]

Актуальность работы заключается в необходимости исследовании моста на прочность для применения в строительстве наиболее надежных конструкций. Для этого нужно определить наиболее точный и действенный метод из существующих методов, доказать его применимость. Создадим для этого модель двухпролетного моста с одним уровнем.

Модель — это инструмент, ориентированный в первую очередь на исследование поведения и свойств конкретного объекта в целях управления этим объектом или предсказания его свойств [www.wikipedia.org].

Итак, разрабатываемая модель нужна для того, чтобы:

1. Понять, как устроен конкретный объект: какова его структура, внутренние связи и взаимодействия, свойства, законы существования, взаимодействие с другими объектами.
2. Научиться контролировать и управлять объектом и его поведением, определять наилучшие позиции, конструкции данного объекта при заданных целях или условиях.
3. Прогнозировать последствия реализации заданных условий и форм воздействия на объект других объектов.

Целью данной работы является разработка математической модели балочного моста, построенной на основе силового подхода, позволяющей определить наиболее надежную конструкцию моста.

Для этого нам необходимо:

1. Провести анализ моста в состоянии равновесия;
2. Вычислить силы реакции в шарнирах;
3. Определить характер сил действующих в балках (растяжение, сжатие);
4. Провести анализ и обобщение всего накопленного материала, разработка общего плана, создания математической модели.

1. Концептуальная постановка задачи моделирования

Статический анализ конструкции проведем при следующих допущениях:

- Объектом исследования является балочный мост (рис. 2).
- Балки крепятся с помощью шаровых шарниров.
- Все элементы конструкции будем считать абсолютно твердыми телами, т.е. пренебрегаем их деформациями при нагружении внешними усилиями.
- Пренебрегаем наличием люфта и трения в шарнирах.
- Скрепляется конструкция идеальными шарнирами, т.е. они представлены в виде материальных точек, в которых трение отсутствует
- На конструкцию не действуют внешние силы, кроме силы тяжести, приложенной к центру масс каждой балки.

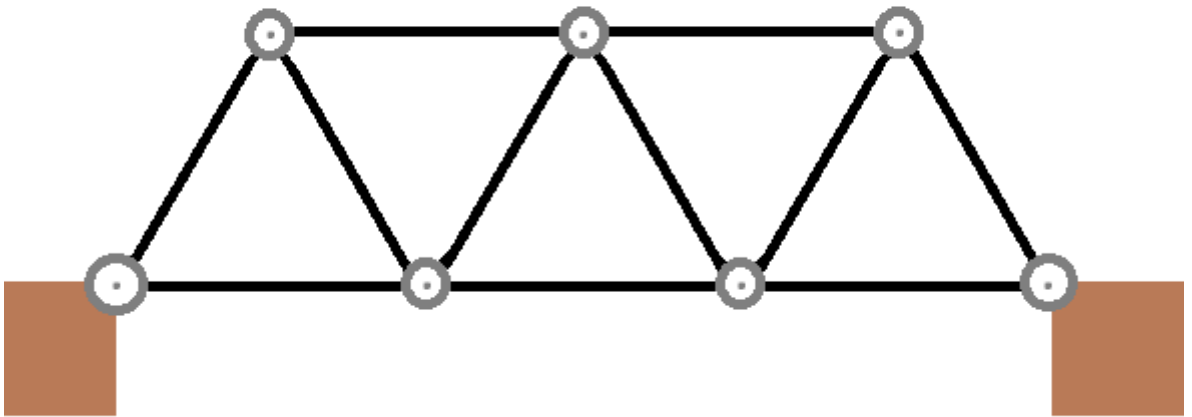


Рис. 2 Принципиальная схема конструкции

Мост состоит из балок, соединяющихся с помощью шаровых шарниров (рис. 2). К опорам мост крепится также с помощью двух шаровых шарниров. Балки в мосту составляют правильный треугольник, что способствует сохранению форм моста при изменении нагрузки на него и

воздействия силы земного притяжения. Известны геометрические размеры и характеристики элементов конструкции моста [www.docklad.ru]:

Обозначение стандарта: ГОСТ 19425-74

Статус стандарта: действующий

Название: Балки двутавровые и швеллеры стальные специальные.

Область и условия применения: Настоящий стандарт

распространяется на горячекатаные двутавровые балки для подвесных путей, армировки шахтных стволов и швеллеры для автомобильной промышленности

Взамен в части: ГОСТ 5157-53 в части балок двутавровых для подвесных путей

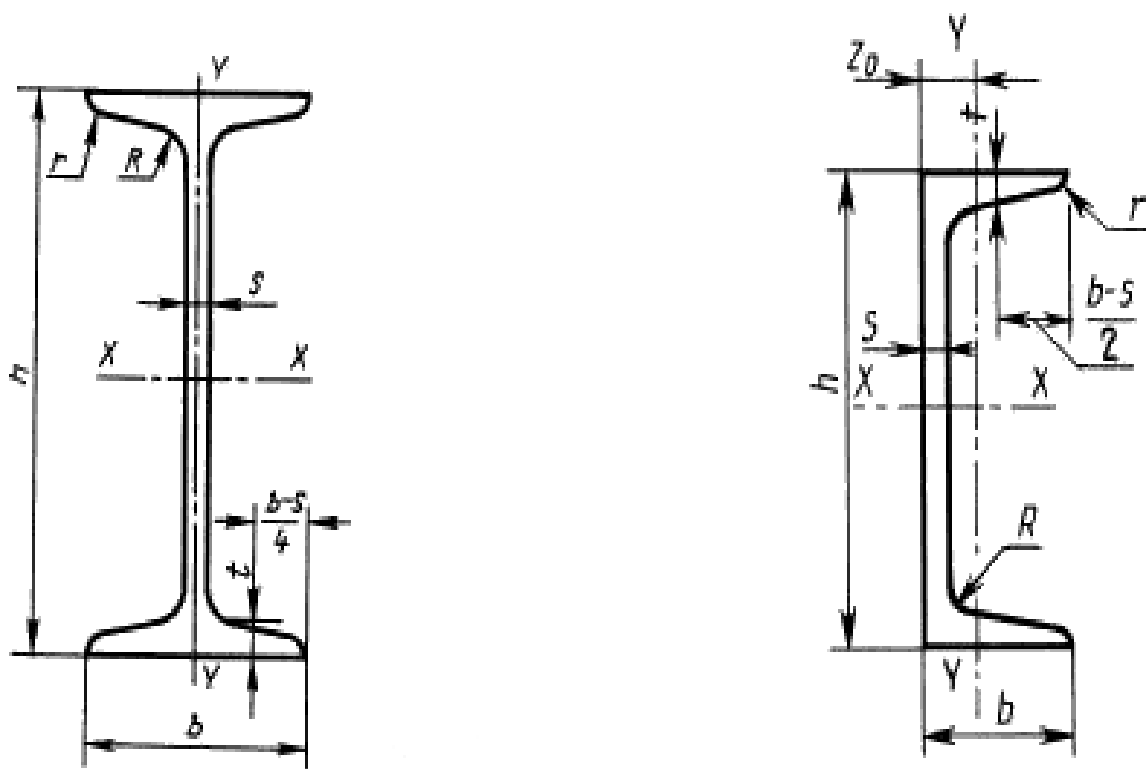


Рис. 3 Профиль двутавра (балки).

Основные размеры и характеристики размеров балок ГОСТ 19425

<i>h</i>	<i>b</i>	<i>s</i>	<i>t</i>	<i>R</i>	<i>r</i>	Площадь поперечного сечения, см ²	Масса 1 м, кг	Справочные величины для осей						<i>z</i> ₀ , см	
								<i>x - x</i>				<i>y - y</i>			
								<i>I</i> _x , см ⁴	<i>W</i> _x , см ³	<i>i</i> _x , см	<i>S</i> _x , см ³	<i>I</i> _y , см ⁴	<i>W</i> _y , см ³		<i>i</i> _y , см
мм															

Балки двутавровые

140	80	5,5	9,1	7,5	3,8	21,5	16,9	712	102	5,75	58,4	61,8	16,2	1,74	-
200	100	7,0	11,4	9,0	4,5	35,6	27,9	2370	237	8,16	136	159	31,8	2,11	-
200	102	9,0	11,4	9,0	4,5	39,6	31,1	2500	250	7,95	146	170	33,3	2,07	-
220	110	7,5	12,3	9,5	4,8	42,1	33,1	3400	310	9,00	178	228	41,5	2,32	-
270	122	8,5	13,7	10,5	5,3	54,5	42,8	6550	485	11,0	279	346	56,7	2,52	-
270	124	10,5	13,7	10,5	5,3	59,9	47,0	6870	507	10,7	297	366	59,0	2,47	-
360	140	14,0	15,8	12,0	6,0	90,9	71,3	17360	964	13,8	574	618	88,3	2,61	-
180	90	7,0	12,0	9,0	3,5	32,9	25,8	1760	196	7,32	113	130	28,9	1,99	-
240	110	8,2	14,0	10,5	4,0	48,7	38,3	4640	387	9,75	223	276	50,2	2,38	-
300	130	9,0	15,0	12,0	6,0	64,0	50,2	9500	633	12,2	364	480	73,9	2,74	-
360	130	9,5	16,0	14,0	6,0	73,8	57,9	15340	852	14,4	493	518	79,7	2,65	-
450	150	10,5	18,0	16,0	7,0	98,8	77,6	31900	1420	18,0	821	892	119	3,00	-

Швеллеры

180	68	7,0	10,5	10,5	5,3	25,7	20,2	1272	141	7,04	83,5	98,5	20,1	1,96	1,88
180	70	9,0	10,5	10,5	5,3	29,3	23,0	1370	152	6,84	91,6	111	21,3	1,95	1,84
200	73	7,0	11,0	11,0	5,5	28,8	22,6	1780	178	7,86	104,7	128	24,2	2,11	2,01
300	87	9,5	13,5	13,5	6,8	49,6	39,1	6500	433	11,4	259,7	289	44,0	2,41	2,13

h - высота;

b - ширина полки;

s - толщина стенки;

t - средняя толщина полки;

R - радиус внутреннего закругления;

r - радиус закругления полки;

I - момент инерции;

W - момент сопротивления;

i - радиус инерции;

S - статический момент полусечения;

*z*₀ - расстояние от оси *y - y* до наружной грани стенки.

2. Математическая постановка задачи моделирования

2.1. Прямой метод подсчета однопролетного моста.

Для того чтобы рассчитать усилия в балках, необходимо рассчитать силы, действующие на каждую балку в отдельности. Для подобного расчета будем использовать второй закон Ньютона. Так же для того чтобы узнать направление сил, действующих на балку, будем учитывать третий закон Ньютона, так как балки взаимодействуют друг с другом через шарниры. Согласно концептуальной постановке, шарниры являются материальными точками, следовательно, не учитываем взаимодействие балок с ними, поэтому исключается возможность прокрутки шарниров и трение между балками (рис. 2).

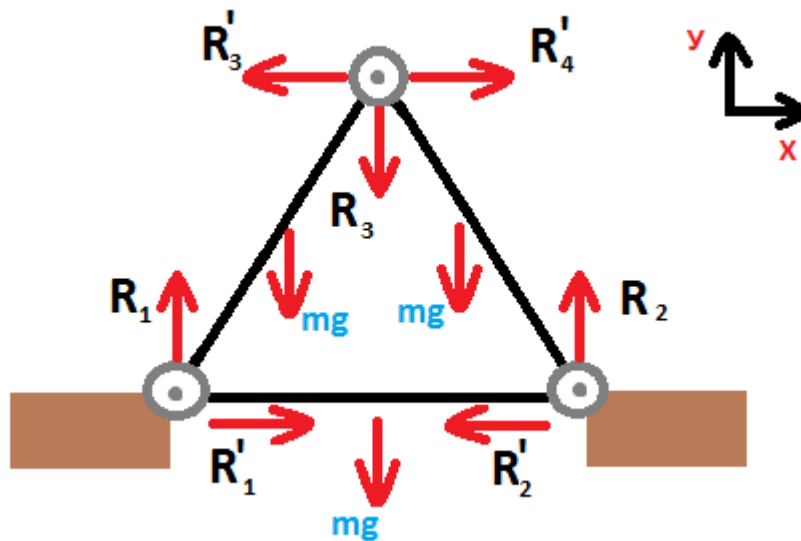


Рис. 4 Статический анализ конструкции

Если распишем второй закон Ньютона для каждой балки, у нас получается следующее:

$$m\vec{g} + \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{R}'_1 + \vec{R}'_2 = 0,$$

$$m\vec{g} + \vec{R}_1 + \vec{R}_3 + \vec{R}'_1 + \vec{R}'_3 = 0,$$

$$m\vec{g} + \vec{R}_2 + \vec{R}_3 + \vec{R}'_2 + \vec{R}'_4 = 0$$

В проекции на оси координат у нас получится:

$$X: R_1 = R'_2, \quad (1)$$

$$R_1 = R_3,$$

$$R_2 = R_4.$$

$$Y: mg = R_1 + R_2, \quad (2)$$

$$mg + R_3 = R_1,$$

$$mg + R_3 = R_2.$$

Система состоит из 6 уравнений, содержащих 7 неизвестных величин. Если число неизвестных больше числа уравнений, то задача является математически незамкнутой и не может быть решена однозначно. В статике, как разделе теоретической механики, задачи подобного типа относят к статически неопределимыми задачами. Для того чтобы количество уравнений и количество неизвестных уравнилось, запишем уравнение моментов сил для второй балки:

$$M: l \frac{mg}{4} + l \frac{R_3}{4} = l \frac{R'_3}{2},$$

где l – длина балки.

Решение задачи:

Решение можно получить непосредственно, выражая неизвестные из одних уравнений и подставляя в другие.

Из уравнений (1) и (2) видно, что

$$R_1 = R_2$$

$$R'_1 = R'_2 = R'_3 = R'_4$$

следовательно

$$mg = 2R_1 = 2R_2$$

$$R_1 = R_2 = \frac{mg}{2},$$

$$R_3 = -\frac{mg}{2}$$

Знак минус для компонента R_3 говорит о том, что направление реакции необходимо изменить на обратное.

$$\frac{l}{4} * (mg + R_3) = R'_3 * \frac{l}{2}$$

$$\frac{mg + R_3}{2} = R'_3,$$

$$\frac{mg}{2} = R'_3 + \frac{mg}{4},$$

$$R'_3 = \frac{3mg}{2}$$

отсюда следует что

$$R'_1 = R'_2 = R'_3 = R'_4 = \frac{3mg}{2}.$$

По формуле: $T = \sqrt{(R_{x_1} - R_{x_2})^2 + (R_{y_1} - R_{y_2})^2}$ находим реакции в балках

1)

$$T_1 = \sqrt{(R'_1 - R'_2)^2 + (R_1 - R_2)^2} \leftrightarrow T_1 = \sqrt{(3 * \frac{mg}{2} - (-3 * \frac{mg}{2}))^2 + (\frac{mg}{2} - \frac{mg}{2})^2}$$

$$\leftrightarrow T_1 = \sqrt{(3 * \frac{mg}{2} + 3 * \frac{mg}{2})^2} \leftrightarrow T_1 = \sqrt{(6 * \frac{mg}{2})^2} \leftrightarrow T_1 = 3mg$$

- балку сжимает сила равная $3 * mg$.

2)

$$\begin{aligned} T_2 &= \sqrt{(R'_1 - R'_3)^2 + (R_1 - R_3)^2} \leftrightarrow T_2 = \sqrt{(3 * mg/2 - (-3 * mg/2))^2 + (mg/2 - (-mg/2))^2} \\ &\leftrightarrow T_2 = \sqrt{(3 * mg/2 + 3 * mg/2)^2 + (mg/2 + mg/2)^2} \leftrightarrow T_2 = \sqrt{(6 * mg/2)^2 + (2 * mg/2)^2} \\ &\leftrightarrow T_2 = \sqrt{9mg^2 + mg^2} \leftrightarrow T_2 = mg\sqrt{10} \leftrightarrow T_2 \approx 3.16mg \end{aligned}$$

- балку сжимает сила равная 3.16*mg.

3)

$$\begin{aligned} T_3 &= \sqrt{(R'_3 - R'_2)^2 + (R_3 - R_2)^2} \leftrightarrow T_3 = \sqrt{(3 * mg/2 - (-3 * mg/2))^2 + (mg/2 - (-mg/2))^2} \\ &\leftrightarrow T_3 = \sqrt{(3 * mg/2 + 3 * mg/2)^2 + (mg/2 + mg/2)^2} \leftrightarrow T_3 = \sqrt{(6 * mg/2)^2 + (2 * mg/2)^2} \\ &\leftrightarrow T_3 = \sqrt{9mg^2 + mg^2} \leftrightarrow T_3 = mg\sqrt{10} \leftrightarrow T_3 \approx 3.16mg \end{aligned}$$

- балку сжимает сила, равная 3.16*mg.

Балка	Сила реакции	Вид реакции
Основание моста (№1)	3*mg	Сжатие
Левая наклонная (№2)	3.16*mg	Сжатие
Правая наклонная (№3)	3.16*mg	Сжатие

Итак, во всех балках моста действует сила сжатия, за счет которой мост (один пролет) прочно держится между двумя берегами.

2.2. Прямой метод подсчета двухпролетного моста с одним уровнем.

Для того чтобы рассчитать усилия в балках, необходимо рассчитать силы, действующие на каждую балку в отдельности. Для подобного расчета будем использовать второй закон Ньютона. Так же для того чтобы узнать направление сил, действующих на балку, будем учитывать третий закон Ньютона, так как балки взаимодействуют друг с другом через шарниры. Согласно концептуальной постановке, шарниры являются материальными точками, следовательно, не учитываем взаимодействие балок с ними, поэтому исключается возможность прокрутки шарниров и трение между балками (рис. 3). Мы раскладываем каждую силу на 2 составляющие по оси X и Y (R' и R)

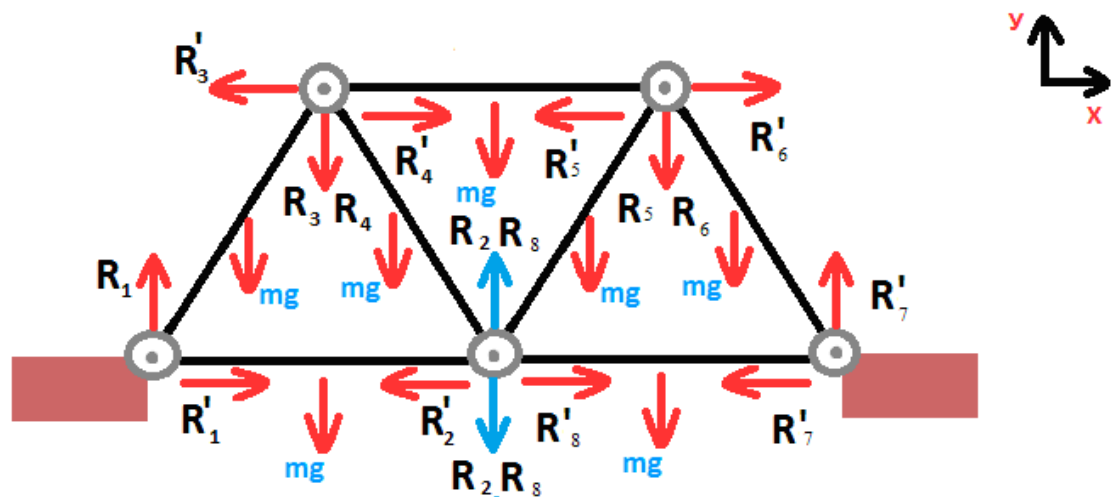


Рис. 2 Статический анализ конструкции два пролета

Если распишем второй закон Ньютона для каждой балки, у нас получается следующее:

$$m\vec{g} + \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{R}'_1 + \vec{R}'_2 = 0,$$

$$m\vec{g} + \vec{R}_1 + \vec{R}_3 + \vec{R}'_1 + \vec{R}'_3 = 0,$$

$$m\vec{g} + R'_4 + R'_2 + R_4 + R_2 = 0,$$

$$m\vec{g} + R'_4 + R'_5 + R_4 + R_5 = 0,$$

$$m\vec{g} + R'_8 + R'_5 + R_8 + R_5 = 0,$$

$$m\vec{g} + R'_6 + R'_7 + R_6 + R_7 = 0,$$

$$m\vec{g} + R'_7 + R'_8 + R_7 + R_8 = 0.$$

В проекции на оси координат у нас получится:

$$X: R'_1 = R'_2,$$

$$R'_1 = R'_3,$$

$$R'_6 = R'_7,$$

$$R'_7 = R'_8,$$

$$R'_5 = R'_8,$$

$$R'_2 = R'_4,$$

$$R'_3 + R'_5 = R'_4 + R'_6.$$

$$Y: R_1 = mg + R_3,$$

$$R_2 = mg + R_3,$$

$$R_2 = mg + R_5,$$

$$R_7 = mg + R_5,$$

$$R_3\{R_4\} + R_5\{R_6\} + mg = 0,$$

$$R_1 + R_2 = mg,$$

$$R_7 + R_7 = mg.$$

Система состоит из 14 уравнений, содержащих 15 неизвестных величин. Если число неизвестных больше числа уравнений, то задача является математически незамкнутой и не может быть решена однозначно. В статике, как разделе теоретической механики, задачи подобного типа относят к статически неопределимыми задачами. Для того чтобы количество уравнений и количество неизвестных уравнялось, запишем уравнение моментов сил для всех балок и получим:

$$\begin{aligned}R_1 &= R_2 = \frac{mg}{2} \\R_3 &= \frac{3mg}{2} \\R'_1 &= R'_3 = 3mg \quad , \\R'_2 &= R'_5 = 3mg \\R_5 &= R_2 + mg = \frac{3mg}{2}\end{aligned}$$

Мы видим противоречие в центральном нижнем шарнире, направление сил не может быть точно определено т. к. с направлением сил вверх или вниз, меняется сила реакции в балках и её характер.

Итог: Для нахождения сил реакции в балках мы не можем применять этот метод целиком, потому что мы не можем точно определить направление всех сил.

Выводы и заключение

На примере с однопролетным и двухпролетный мостом было доказано, что для расчета мат. модели моста силовым методом нужно использовать модифицированный метод. Метод прямого подсчета не дает точной информации о том как расположены силы взаимодействия между балками. Поэтому этот метод неприменим для расчетов конструкции в статическом состоянии подобного типа.

Список литературы

1. *Трусов П. В.* Введение в математическое моделирование. Учебное пособие – М.: "Логос". 2003.
2. *Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д.* Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. — М.: Финансы и статистика, 1983. 471с.