Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ учащихся

«Прикладные вопросы математики»

Алгебра

Приложение теории чисел к решению задач ЕГЭ

Желнин Максим Сергеевич,

МОУ «Лицей №1» г. Перми, 11 кл.

Грайфер Лазарь Борисович,

к. ф.-м. н., доцент ПНИПУ

Наука арифметика зародилась в глубокой древности, и является старейшей отраслью математики. Научным обобщением арифметики является теория чисел. Интерес к теории чисел был высок во все времена, а результатами теории чисел и арифметики, полученными древними учеными, активно пользуются и в сегодняшнее время. В середине XX века и XXI веке существенно изменилась роль теории чисел. Если в предыдущие три века она была красивейшим разделом математики, привлекавшим внимание лучших математиков своего времени, таких как Ферма, Эйлер, Лагранж, Гаусс, Риман, Гильберт, то с появлением компьютеров теория чисел нашла многочисленные приложения при обработке, передаче и защите информации, представимой в числовом виде. Поэтому в школьный курс математики вошли некоторые разделы теории чисел, ранее не изучавшихся, например: алгоритм Евклида и решение уравнений в целых числах. Задачи теории чисел из школьного курса входили в олимпиады и вступительные экзамены лучших ВУЗов страны, а сегодня представлены в ЕГЭ в виде задачи С6.

Следует отметить, что особое место задач С6 – теоретический материал для их решения. Он преподается достаточно рано (в 6 – 7-ом классах), а некоторые разделы не входят в обязательную программу и изучаются только в профильных классах (с 7 по 9). Поэтому для успешного решения задач С6, следует повторить школьный материал по теории чисел. Исходя из этого, первая часть учебно-исследовательской работы посвящена классификации задач С6 по темам и сравнительному анализу методов их решения.

Итак, целями учебно-исследовательской работы являются классификация задач по арифметике и алгебре, прилагаемых в заданиях С6 ЕГЭ из открытых материалов ЕГЭ по математике, и сравнительный анализ методов их решения.

В данной учебно-исследовательской работе мы приводим решения задач по арифметике и алгебре С6 ЕГЭ, давно включаемых во вступительные экзамены в ведущих ВУЗах России, но в ЕГЭ появившееся с 2010 года. Все задачи, решение которых мы представили в работе, взяты из книг по подготовке к ЕГЭ 2010 – 2011, демонстрационных вариантов ЕГЭ 2010 -2011 и пособий для поступающих в ВУЗы. Так как некоторые задачи из данных источников решены авторами, то мы приводим свое решение, которое тоже может представлять интерес.

Рассмотрев задачи из описанных выше источников, мы выделили следующие классы задач:

- Делимость и признаки делимости.
- Десятичная запись числа.
- Целочисленные (диофантовые) уравнения, целочисленные неравенства.
- Числовые прогрессии.
- Текстовые задачи.

Все необходимые теоретические сведения для решения задач по теории чисел, изучаются в школах в профильных классах, их можно найти в учебниках по алгебре и началам анализа (10 класс, профильный уровень), например [5].

1.1. Делимость и признаки делимости чисел.

Данный класс задач очень широко представлен во всех открытых источниках ЕГЭ. В нашей классификации мы не приводим много задач этого класса, так как делимость и признаки делимости чисел встречаются практически во всех задачах арифметики и алгебры, представленных в ЕГЭ, из-за чего свойства делимости и признаки делимости чисел будут встречаться в других классах задачах из нашей классификации.

Задача № 1.1.1.

Решение этой задачи мы приводим такое же, как у ее авторов. Эта задача представлена в демонстрационном варианте ЕГЭ 2010-2011, поэтому мы решили включить ее в свою классификацию.

Условие задачи.

Найдите все такие пары взаимно простых натуральных чисел (то есть чисел, наибольший общий делитель которых равен 1) *a* и b, что если к десятичной записи числа *a* приписать справа через запятую десятичную запись числа *b,* то получится десятичная запись числа, равного ba.

Решение.

Предположим, что в числе b – n цифр. Тогда по условию задачи можно записать уравнение:

a+b10n=ba <=> 10na2+ab=10nb<=>ab=10n(b-a2);

Рассмотрим уравнение ab=10n(b-a2). Т.к. числа a и b натуральные, то ab ≥ 0 => b>a2≥a; Т.к. числа a и b взаимно простые, то числа (b-a2) и ab тоже взаимно простые.

Докажем это утверждение методом от противного.

Пусть числа (b-a2) и ab делятся на простое число p.

ab ⋮ p => a ⋮ p (1)b ⋮ p (2)

Рассмотрим (1): a ⋮ p=>a2 ⋮ p.

(b-a2) ⋮ p. По свойству делимости разность делиться на число, когда разность остатков, полученных при делении на это число уменьшаемого и вычитаемого, делиться на число.

a2 ⋮ p=>остаток при делении равен 0=>b ⋮ p=>

=>a и b не взаимно простые числа.

Рассмотрим (2): b ⋮ p и (b-a2) ⋮ p.

Так же, как и в предыдущем случае, остаток от деления b на p равен 0 =>чтобыb-a2 ⋮ p, число a тоже должно делиться на p=> a и b не взаимно простые числа .

В обоих случаях пришли к противоречию с условием, следовательно, утверждение доказано.

Числа (b-a2) и ab взаимно простые и ab=10n(b-a2). Для того чтобы выполнялось равенство, нужно:

ab=10nb-a2=1.

a и b взаимно простые, ab=10n и b>a2≥a=>

b=10na=1b=5na=2n

Рассмотрим первый случай и проверим удовлетворяет ли он равенству:. ba2=1 •

b=10na=1b-a2=1=>10n-1≠1, т.к.в числе b не может быть 0 цифр.

Рассмотрим второй случай:

b=5na=2nb-a2=1=>5n-4n=1=>a=2b=5

Докажем, что это решение единственно.

Преобразуем уравнение 5n-4n=1 к виду:
54n=1+45n
Функция fn=54n возрастет, т.к. аргумент больше 1.
Функция gn=1+45n убывает, т.к. ее аргумент меньше 1. Следовательно, уравнение fn= gn имеет единственно решение: n=1.

Ответ: a=2; b=5.

Задача №1.1.2.

Следующая задача представлена в виде целочисленного уравнения, но мы смело можем отнести ее к классу задач на делимость. Так как в данной задаче очень активно используются признаки делимости и разложение чисел на простые множители.

Условие задачи.

Решите уравнение y3- 58x=2010+xy2- 58 y , если
y – простое число, x∈Z

Решение.

y3- 58x=2010+xy2- 58 y
y3- 58x+ 58 y+ xy2=2010
y2y-x+ 58y-x=2010
(y2+ 58)y-x=2010

Разложим число 2010 на простые множители (используя признаки делимости):
2010 = 1 * 2 * 3 * 5 * 67 =>(y2+ 58)y-x=1*2*3*5*67
Т.к. y2 и y – простое число, то y2>0 => y2+58>58.
Т.к. y – простое число, x∈Z, то для того чтобы выполнялось равенство (y2+ 58)y-x=1*2*3*5*67 , нужно, чтобы число
y2+58 и число y-x были равны множителям числа 2010, и при умножении этих чисел их произведение было равно 2010. Но т.к. y2+58>58 , то число y2+58 может быть равно только: 67, 134, 201, 335, 502, 670, 1005, 2010.
Исходя из этого, рассмотрим все возможные случаи;

y2+58 = 67 => y2=9 =>y=±3, но т.к. y – простое число => y=3.
y2+58 = 134 => y2=76 =>y=±√76, но т.к. y – простое число => данное значение y не подходит.
y2+58 = 201 => y2=143 =>y=±√143, но т.к. y – простое число => данное значение y не подходит.
y2+58 = 335 => y2=277 =>y=±√277, но т.к. y – простое число => данное значение y не подходит.
y2+58 = 502 => y2=444 =>y=±√444, но т.к. y – простое число => данное значение y не подходит.

y2+58 = 670 => y2=612 =>y=±√612, но т.к. y – простое число => данное значение y не подходит.
y2+58 = 1005 => y2=947 =>y=±√947, но т.к. y – простое число => данное значение y не подходит.
y2+58 = 2010 => y2=1952 =>y=±√1952, но т.к. y – простое число => данное значение y не подходит.

Рассмотрев все возможные, случаи мы установили, что y = 3.

y – простое число, x∈Zy=3(y2+ 58)y-x=1*2*3*5*67 =>
y – простое число, x∈Zy=3x= -27

Ответ: x = -27 , y = 3

Задача №1.1.3.

В данной задаче используется связь НОД с НОК, поэтому мы также отнесли ее к классу делимости чисел.

Условие задачи.

Произведение четырех натуральных чисел меньше, чем их сумма, а сумма трех из этих чисел равна 28. Найдите НОД и НОК этих чисел.

Решение.

Пусть a, b, c, d – данные числа, тогда:
a, b, c, d ∈N a*b*c*d<a+b+c+da+b+c=28

Произведение из четырех натуральных чисел может быть меньше суммы, состоящей из этих четырех чисел и равной 28, только тогда, когда три числа равны 1.

Доказательство этого утверждения методом от противного.

1. Пусть это не так, т.е.
a=b=d=1, c∈Na*b*c*d>a+b+c+da+b+c=28
a=b=d=1, c∈N1*1*c*1<1+1+c+1a+b+c=28
a=b=d=1, c∈N0>3-такого быть неможет a+b+c=28=> предположение неверно => утверждение доказано.

2. Предположим, что
a=b=1, c ,d∈N1*1*c*1<1+1+c+1сумма трех чисел была равна 28
a=b=1, c ,d∈N1*1*c*d<1+1+c+dсумма трех чисел равна 28
a=b=1, c ,d∈Nc*d<2+c+d сумма трех чисел была равна 28
c*d<2+c+d - данное неравенство имеет решение при:
c=d=2c=23, d=32c=24, d=4(2) , но при этих значениях c и d сумма трех чисел не будет равна 28 => предположение неверно = > утверждение доказано.
(случай, когда только одно число равно 1, доказывается аналогично).
Утверждение доказано.

Так как есть числа, равные 1, то НОД всех четырех чисел равен 1 (по определению НОД). => НОД(a, b, c, d) = 1
a,b,c,d= a*b*c*d(a,b,c,d) (по теореме о связи НОД с НОК)
a,b,c,d= 1 => a,b,c,d=a*b*c*d

Получаем систему:
a=b=d=1, c∈Na,b,c,d=a*b*c*da+b+c=28 <=> a=b=d=1,

c∈Na,b,c,d=a*b*c*da+b+c=28<=>
a=b=d=1, c∈Na,b,c,d=a*b*c*dc=26<=>a=b=d=1, c∈Na,b,c,d=26c=26

Ответ: НОД (a, b, c, d) = 1; НОК (a,b,c,d) = 26

1.2. Десятичная запись чисел.

В задачах этого класса очень часто кроме десятичной записи числа, очень широко используются свойства делимости чисел и признаки делимости чисел.

Задача №1.2.1.

Условие задачи.

Найдите несократимую дробь pq, такую что
pq=12345678…8 7654321123456789…987654321
(в числителе 2000 цифр 8, а в знаменателе 1999 цифр 9).

Решение.

Суть данной задачи сводиться к поиску НОДp,q.

Из условия видно, что в числителе 2014 цифр, а в знаменателе 2015 цифр, т.е. на одну цифру больше.

По свойству делимости чисел, если число делит числа, то оно делить и их разность. Поэтому найдем разность чисел p и q:
q-p=-123456789…98765432112345678…8 76543211…100000000
(цифр 9 – 1999, цифр 8 – 2000, цифр 1 – 2007)

По свойству делимости на 10 видно, что числа p и q не делятся на любые степени числа 10, поэтому они могут делиться только на число 1…1 (цифр 1 – 2007) или на его делители.

Проверим, делится ли число p на число 1…1 (цифр 1 – 2007).
12345678…8 7654321: 1…1=1111111.
(цифр 8 – 2000, цифр 1 – 2007)
Число p делится на число 1…1 (цифр 1 – 2007).
Следовательно, число q также поделится на число 1…1 (цифр 1 – 2007).
123456789…987654321:1…1=11111111
(цифр 9 – 1999, цифр 1 – 2007)
В итоге получаемдробь:pq=111111111111111

Ответ: pq=111111111111111

Задача №1.2.2.

Условие задачи.

Ученик должен был умножить двузначное число на трехзначное и разделить их произведение на четырехзначное. Однако он не заметил знака умножения и принял записанные рядом двузначное и трехзначное число за одно четырехзначное. Поэтому полученное частное (натуральное) оказалось в семь раз больше истинного. Найдите все три числа.

Решение.

Обозначим двузначное число за ab, трехзначное число за xyz, а четырехзначное за ***c*** (a,b,c,x,y,z –натуральные числа).

Из условия задачи получаем уравнение:
7(ab*xyz)c=abxyzc (1)

Преобразуем полученное уравнение.
7(ab*xyz)c=abxyzc<=>7(ab*xyz)c=ab*1000+xyzc <=>
<=>7(ab*xyz)=ab*1000+xyz<=>1000+xyzab= 7xyz (2)

Т.к. в уравнении (2) правая часть натуральное число, потому что xyz - натуральное число, то чтобы выполнялось равенство, нужно xyz ⋮ ab.
Оценим, в каком промежутке натуральных чисел лежит частное xyzab.

Наименьшее частное при делении трехзначного на двухзначное число: 10099≈1. Наибольшее частное: 99910≈100. Следовательно, натуральные числа, лежащие между этими двумя числами, составляют промежуток 2,99. Поэтому сумма 1000+xyzab лежит в промежутке 1002,1099.

Рассмотрим уравнение (2). Для того чтобы выполнялось равенство, 1000+xyzab ⋮7 и 1000+xyzab⋮ab . Сумма 1000+xyzab лежит в промежутке 1002,1099, следовательно, натуральное число xyz лежит в промежутке 144,157. Исходя из этого, найдем, в каком промежутке лежит частное xyzab. Наименьшее число при делении 144 на двузначное:14499≈2. Набольшее число при делении 157 на двузначное: 15710≈16. Следовательно, натуральное число xyzabлежит в промежутке 2,15. Значит, сумма 1000+xyzab лежит в промежутке 1002,1015. Из этого промежутка находим числа, которые делятся на 7. Это числа 1008 и 1015.

Рассмотрим число 1008.
xyz=10087=144=> ab=1441008-1000=18=>
=>abxyz=18144, xyz*ab=2592=>c=2592- это наибольшее четырехзначное число, на которое число 2592 будет делиться без остатка. Следующее четырехзначное число – это 1296. Больше четырехзначных чисел, удовлетворяющих условию нет.
Рассмотрим число 1015.
xyz=10087=145=> ab=1451008-1000- число не натуральное, следовательно, не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 18,144 2592 и 18,144,1296.

1.3. Целочисленные (диофантовые) уравнения и целочисленные неравенства.

В этом классе у нас находиться больше задач, чем в других классах. Это связано с тем, что при решении задач С6 очень часто можно составить уравнение или неравенство, которые нужно решить в целых (натуральных) числах. Вследствие чего полезно знать алгоритм решения диофантовых уравнений и иметь опыт в решении целочисленных уравнении и неравенств.

Задача №1.3.1.

Решение данной задачи сводится к решению линейного диофантового уравнения, решение которого мы представляем в двух вариантах. В первом варианте мы решаем полученное уравнение, используя алгоритм решения линейного диофантового уравнения, а во втором способе мы используем для решения уравнения конечный перебор . Мы решаем уравнения двумя способами, для того чтобы можно было увидеть преимущества как алгоритмического подхода, так и метода конечного перебора для решения линейных диофантовых уравнений.

Условие задачи.

Все обыкновенные правильные несократимые дроби, числители и знаменатели которых двузначные числа, упорядочили по возрастанию. Между какими двумя последовательно расположенными дробями находится

число 58.

Решение.

Пусть дробь 58 удволетворяет наравентсву: mn<58<kl , где m,n,k,l-натуральные числа в промежутке 10,99.

Для того чтобы число 58 лежало между двумя последовательными числами, разность чисел:

58-mn=5n-8m8n иkl-58=8k-5l8l, должна быть наименьшей.

Числители и знаменатели дробей являются натуральными числами, т.к. m,n,k,l-натуральные числа и m n<58<kl , поэтому разность чисел может принимать наименьшие значение, если их числитель принимает наименьшее значение, а знаменатель наибольшее. Наименьшее натуральное число 1, следовательно, получаем уравнения:

5n-8m=1 (1); 8k-5l=1(2)

Рассмотрим уравнение(1):

НОД5,8=1, 1⋮1=>уравнение имеет решение в целых числах. (по достаточному условию разрешимости линейного диофантового уравнения).

Решим уравнение (1), двумя способами.

Способ №1. Применим алгоритм для решения линейного диофантового уравнения.

5n-8m=1

a=5, b=-8=8=>b=p0a+r0, p0=1,r0=3;

a=p1r0+r1, p1=1,r1=2;r0= p2r1+r2 ,p2=1,r2=1;

1=r2=r0- p2r1=r0- p2a-p1r0=

=b-p0a- p2a-p1(b=p0a)

Подставляем вместо p их числовые значения.

1=b-a-a-b-a=2b-3a, т.к. b – отрицательное число, то получаем: -3a-2b=1=>n0=-3, m0=-2

Общее решение уравнения (1):

*n=n0-b(a,b)*t=-3+8t; m=m0+a(a,b)*t=-2+5t,*

где t-целое число.

Способ №2. Применим для решения уравнения конечный перебор.

Из 1 выражаем n через m: n=8m+15=5m5+3m+15. Подбираем m,

добиваясь, чтобы 3m+15 делилось на 5. Например, при m=3 получаем,

что n=3+3*3+15=5.

Общее решение уравнения (1) примет вид: n=5-(-8)t=5+8t;

m=3+5t, где t-целое число.

В итоге мы видим, что каким бы способом мы не решали линейное диофантовое уравнение, его общее решение будет одинаковым.

Рассмотрим уравнение (2).

НОД5,8=1, $1 \vdots 1$=>уравнение имеет решение в целых числах (по достаточному условию разрешимости линейного диофантового уравнения).

Так как в уравнении (2) коэффициенты при k и l отличаются от коэффициентов в уравнении(1) только знаками, поэтому частным решением данного уравнения будут: k0=2, l0=3.

Откуда общее решение уравнения (2) будут:

$k=2+5s$ и $l=3+8s$, где s-целое число.

Находим наибольшие натуральные числа m,n, которые будут лежать в промежутке 10,99 . Подбором находим t. При t=12 данное условие выполняется: n=93, m=58.

Таким же образом находим наибольшие натуральные числа k,l, которые принадлежат промежутку 10,99. В итоге: при s=12 получеам, что

k=99, l=62.

Ответ:5893<58<6299

Задача №1.3.2.

Решение данной задачи сводится к решению линейного диофантового уравнения, и если знать алгоритм решения таких уравнений, то получить ответ в таких задачах не составит труда.

Условие задачи.

Найти во множестве целых чисел решения уравнения

$113x+179y=17$, при $y+100>0$, $x>0$.

Решение.

$113x+179y=17$, при $y+100>0$, $x>0$

НОД (113,179) = 1, $17 \vdots 1$ => данное уравнение имеет решение в целых числах (по достаточному условию разрешимости линейного диофантового уравнения).

Найдем частное решение уравнения:

$113x+179y=1$

a1=113,b1=179,b1=a1*1+66, где 66=r1;

a1=r1p1+r2; 113=66p1+r2, p1=1,r2=47

r1=r2p2+r3; 66=47p2+r3, p2=1,r3=19

r2=r3p3+r4; 47=19p3+r4, p3=2,r4=9

r3=r4p4+r5; 19=9p4+r5, p4=2,r5=1

Сейчас выразим все остатки через pi, a1, b1.

1=r5=r3-r4p4=r3-p4r2-r3p3=

=r1-r2p2-p4r2-r1-r2p2p3

Для упрощения вычислений подставим значения p4 , p2и p3:

1=r5=r1-r2*1-2*r2-r1-r2*1*2=

=r1-r2-2*r2-2*r1+2*r2=

=r1-r2-2*3*r2-2*r1=r1-r2-6*r2+4*r1=

=5*r1-7*r2=5*r1-7a1-r1p1

Подставим значение p1:

1=r5=5*r1-7*a1+7*r1=12*r1-7*a1=

=12*b1-a1-7*a1=12*b1-19*a1.
Подставим значение a1 и b1:
1=r5=12*179-19*113, 1=113*x0+179*y0,
где x0=-19 , y0=12-частное решение уравнения
113x+179y=1.

Теперь найдем частное и общее решение уравнения:
113x+179y=17. Получаем, что частное решение уравнения равно:
x0'=17*x0 , y0'=17*y0; x0'=-323, y0=204.

Общее решение уравнения: x=-323+179t , y=204-113t t∈Z
(по теореме о нахождении множества целых решений линейного диофантового уравнения).

Найдем решение уравнений с учетом того, что y+100>0, x>0.
t=0=>x=-323, y=204 (не удволевторяет ограничениям)
t=1=>x=-144, y=90 (не удволевторяет ограничениям)
t=2=>x=35, y=90 (удволевторяет ограничениям)
t=3=>x=214, y=-135 (не удволевторяет ограничениям)
При всех других значениях t≥4 будут получаться значения *y*, которые меньше -100, а они не удовлетворяют ограничениям.
При t<0 будут получаться значения x, не удовлетворяющие ограничениям, т.к. при умножении отрицательного числа на положительное получается отрицательное число, а при сложении отрицательного числа с отрицательным обязательно получится отрицательное число, но x должен быть больше 0.

Ответ: x = 35, y = 90

Задача №1.3.3.

Решение данной задаче сводится к решению целочисленного уравнения, которое не является линейным диофантовым, поэтому для решения данного уравнения придется выполнить конечный перебор.

Условие задачи.

Найдите во множестве натуральных чисел решение уравнения:
x2-4xy+5y2=169

Решение.

x2-4xy+5y2=169<=>x2-4xy+4y2+y2=169<=>
<=>(x-2y)2+y2=169
(x-2y)2≥0 и y2>0 =>
0≤x-2y2≤1690≤y2≤169(x-2y)2+y2=169(иначе не будет выполняться равенство)
0≤y2≤169=>y≤13 , но т.к. y –натуральное число, то
y∈1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13

Рассмотрим все возможные значения y:
y=13=>y2=169=>x-262=0=>x=2612=>y2=144=>x-242=25=>x=19;x=2911=>y2=121=>x-222=48=>x-22=4810=>y2=100=>x-202=69=>x-20=699=>y2=81=>x-182=88=>x-18=888=>y2=64=>x-162=105=>x-16=√1057=>y2=49=>x-142=120=>x-14=1206=>y2=36=>x-122=133=>x-12=1335=>y2=25=>x-102=144=>x=22;x=-24=>y2=16=>x-82=153=>x-8=1533=>y2=9=>x-62=160=>x-6=1602=>y2=4=>x-42=165=>x-

4=1651=>y2=1=>x-22=168=>x-2=√168
Среди всех возможных значений y решением уравнения могут быть только числа x=26, y=13;x=19, y=12;x=29,y=12;
x=22,y=5 , все остальные числа не являются натуральными.

Ответ: x=26, y=13;x=19, y=12;x=29,y=12; x=22,y=5.

Задача №1.3.4.

Условие задачи.

Решить систему неравенств в целых числах:
m2+n2<16m-22n-17130m-n2>252+14n+m2

Решение.

m2+n2<16m-22n-17130m-n2>252+14n+m2
m2-16m+n2+22n+171<0m2-30m+n2+14n+252<0
m2-16m+64+n2+22n+121-14<0m2-30m+225+n2+14n+49-22<0
(m-8)2+(n+11)2-14<0(m-15)2+(n+7)2-22<0
(m-8)2+(n+11)2<14 (+)(m-15)2+(n+7)2<22 (*)
(m-8)2≥0 ; (n+11)2≥0 => для того чтобы неравенство (+) имело решения нужно, чтобы:
(m-8)2<14 (n+11)2<14(m-8)2+(n+11)2<14
(m-8)2<14 => m-8<14, но т.к m-число целое, то
и m-8 – целое число => m-8≤3 => m∈5;11.
(n+11)2<14 => n+11<14, но т.к n-число целое, то
и n+11 – целое число => n+11≤3 => n∈-13;-9.
(m-15)2>0, (n+7)2>0 => для того, чтобы неравенство (*) имело решения, нужно:
(m-15)2<22 (n+7)2<22(m-15)2+(n+7)2<22
(m-15)2<22 => m-15<22, но т.к m-число целое, то
и (m-15) – целое число => m-15≤4 => m∈11;19.
(m+7)2<22 => m+7<22, но т.к n-число целое, то и n+7 – целое число => n+7≤4 => n∈-10;-3.

После того, как мы провели оценку значений m и n, у нас получается система:
m∈11;19n∈-13;-9m∈5;11n∈-10;-3m-152+n+72<22(m-8)2+(n+11)2<14
Из того, что m∈11;19m∈5;11 следует, что m=11;
Из того, что n∈-13;-9n∈-10;-3 следует, что n∈-10;-9.
m=11n∈-10;-9m-152+n+72<22(m-8)2+(n+11)2<14<=> m=11n∈-10;-911-152+n+72<22(11-8)2+(n+11)2<14<=>
m=11n∈-10;-9n+72<6 #(n+11)2<5 (&&**)
n∈-10;-9, но т.к. n – целое число, то n∈-10,-9.

Подставим значение n неравенство (#) :
Если n=-10, то n+72=-10+72=9, но 9>6=>
n=-10 быть удовлетворяет условию задачи.
Если n=-9, то n+72=-9+72=4, 4<6=>n=-9 удовлетворяет условию задачи.

Подставим значение n=-9 в неравенство (**) и проверим, будет ли оно верно: n=-9, то n+112=-9+112=4, 4<5=>
=>n=-9 –решение.

Ответ: m=11, n=-9

Задача №1.3.5.

Данная задача представлена очень необычным неравенством, которое вполне может оказаться в задаче С6 ЕГЭ.

Условие задачи.

Решите неравенство в целых числах:

log22x+3y-6z+3+log23x-5y+2z-2+
+log22y+4z-5x+2>z2-9z+17

Решение.

log22x+3y-6z+3+log23x-5y+2z-2+
+log22y+4z-5x+2>z2-9z+17

Определим ограничения, при которых логарифмы будут иметь смысл.
Логарифм числа имеет смысл, если это число больше 0 =>
2x+3y-6z+3>03x-5y+2z-2>02y+4z-5x+2>0 , но т.к. x,y,z∈Z, то
2x+3y-6z+3≥13x-5y+2z-2≥12y+4z-5x+2≥1
Сложим полученную систему неравенств:
+2x+3y-6z+3≥13x-5y+2z-2≥12y+4z-5x+2≥1
3≥3
Пусть 2x+3y-6z+3=a; 3x-5y+2z-2=b;
2y+4z-5x+2=c (a,b,c∈Z).
Тогда a+b+c=3 => a=1b=1c=1 , т.к. иначе один из логарифмов будет не определен. Докажем это утверждение.

Доказательство.

Пусть a+b+c=3, но a≠1.
т.к. a,b,c∈Z и a+b+c=3, то a=2a=0 .
Если a=2, то b=0c=0, но тогда один из логарифмов будет не иметь смысла.
Если a=0, но тогда logna - будет не иметь смысла.
Утверждение доказано.
log2a+log2b+log2c>z2-9z+17.

Подставим значение a,b,c.

log21+log21+log21>z2-9z+17 <=>0+0+0>z2-9z+17 <=>
0>z2-9z+17.
Решим полученное неравенство.
z2-9z+17<0
Найдем точки, в которых неравенство обращается в 0.
z2-9z+17=0
D=81-68=13; D=√13;
z1=9-√132; z2=9+√132
z2-9z+17=z-4.5+13(z-4.5-13)
z-4.5+132z-4.5-132<0=>
z∈4.5-132;4.5+132, но т.к.z∈Z, то z∈3,4,5,6.

Вернемся к замене.

z∈3,4,5,62x+3y-6z+3=13x-5y+2z-2=12y+4z-5x+2=1
Подставим все значения z в систему уравнений:

2x+3y-6z+3=13x-5y+2z-2=1z∈3,4,5,6
(т.к. мы знаем, какие значение может принимать z, то третье уравнение нам не понадобится).

Решим полученную систему уравнение при всех значениях *z.*
Пусть z=3:
z=32x+3y-6z+3=13x-5y+2z-2=1<=>z=32x+3y-18+3=13x-5y+6-2=1<=>
<=>z=32x+3y=163x-5y=-3<=>z=3x=8-1.5y3(8-1.5y)-5y=-3
9.5y=25;   y=25095=5019- не является целым числом=>
при z=3 система уравнений не имеет решений в целых числах.
Пусть z=4:
z=42x+3y-6z+3=13x-5y+2z-2=1<=>z=42x+3y-24+3=13x-5y+8-2=1<=>
<=>z=42x+3y=223x-5y=-5<=>z=4x=11-1.5y3(11-1.5y)-5y=-3
9.5y=38;   y=38095=7619=4- является целым числом
z=4y=4x=11-1.5y=> z=4y=4x=5
Пусть z=5.
z=52x+3y-6z+3=13x-5y+2z-2=1<=>z=52x+3y-30+3=13x-5y+10-2=1<=>
<=>z=52x+3y=283x-5y=-7 <=>z=5x=14-1.5y3(14-1.5y)-5y=-7
9.5y=45;   y=49095=9819- не является целым числом=>
при z=5 система уравнений не имеет решений в целых числах.
Пусть z=6:
z=62x+3y-6z+3=13x-5y+2z-2=1<=>z=62x+3y-36+3=13x-5y+12-2=1<=>
z=62x+3y=343x-5y=-9<=>z=6x=17-1.5y3(17-1.5y)-5y=-9
9.5y=60;   y=60095=12019- не является целым числом=>
при z=6 система уравнений не имеет решений в целых числах.

Из всех возможных значений z, решение системы уравнений в целых числах, а => и решением неравенства в целых числах будет только значение z=4, при котором x=5, y=4.

Ответ: x=5,y=4,z=4

Задача №1.3.6.

Данная задача использует монотонность функций при исследовании решений трансцендентного уравнения.

Условие задачи.

Найти все пары натуральных чисел k и n таких, что k < n и
1nk=1kn

Решение.

Преобразуем исходное уравнение, взяв от обеих частей натуральный логарифм:
n-k= k-n< = >lnn-k=ln□(k-n)
*lnn-k=lnk-n< = >-k*lnn= -n*lnk*

Разделим обе части уравнения на дробь (-1)/(k*n)
(n, k ≠ 0 т.к. n, k - натуральные числа):
lnnn= lnkk

Рассмотрим выражения, lnnn и lnkk , как функцию:
fx= ln(x)x x > 0
Исследуем функцию f(x) на монотонность:

f(x) = ln(x)x (x> 0)
f/x=- lnxx2+ 1x2= -1x2 (lnx-1)
Найдем критические точки f/x: x=ex≠0
Получаем: f/x≥0, если 0<x≤ef/x≤0, если e≤x
Значит, fx ↗на 0;e и fx↘ на [e; +∞).

По условию k < n , следовательно, равенство f(n) = f (k) выполняется только при
k < e < n . На 0;e находятся только два натуральных числа 1, 2, поэтому k может равно либо 1, либо 2. В силу того, что при e≥x≥0
fx↗ , каждому k может соответствовать не более одного n.

Найдем n:
k=1, тогда ln(n)n=0 , =>n=1, но тогда условие k < n не выполняется.
k=2,тогда lnnn= ln22=>n=4, т.к. ln44=ln22.
Других значений n в силу монотонности f(x)для x≥e нет.

Ответ: k = 2, n = 4

1.4. Числовые прогрессии.

В задачах на числовые прогрессии в основном используются свойства арифметической прогрессии и геометрической прогрессии, а условия, чтобы числа были целые или натуральные, обычно уходят на второй план.

Задача №1.4.1.

Данная задача является типичной для этого класса, в ней необходимо использовать знания по арифметической и геометрической прогрессиям.

Условие задачи.

Три числа, сумма которых равна 12, образуют арифметическую прогрессию. Если второе число оставить без изменений, а первое и третье увеличить на 1, то получиться геометрическая прогрессия. Найдите эти числа.

Решение.

Обозначим первое число за *x,* второе число за *y*, третье число за *z*.

Из условия задачи следует, что x+y+z=12.

Так как эти числа образуют арифметическую прогрессию, то их сумму можно записать в виде:
x+z2*n=12, где n-число членов 2ой прогрессии=>n=3.

Получаем систему уравнений:

*x+y+z=12x+z2*3=12=>y=4.*

По свойству геометрической прогрессии, образованной из трех чисел, следует, что: y2=x+1*(z+1).
Учитывая, что y=4, получаем систему уравнений:
x+1*(z+1)=16x+z=8<=> z=8-x (1)(x+1)9-x=16 (2)

Рассмотрим уравнение (2) :
x+19-x=16<=> x2-8x+7=0=> x1=1; x2=7 (по т. Виета)

Возвращаемся к системе уравнений.

x=1z=8-1x=7z=8-7=>x=1z=7x=7z=1

Ответ: 1,4,7 или 7,4,1.

Задача №1.4.2.

В данной задаче используются только свойства геометрической прогрессии и делимость чисел.

Условие задачи.

Первый набор цифр является геометрической прогрессией 2, 4, 8, …210. Второй набор является геометрической прогрессией 3, 9, 27, … 310. Числа разбили на пары. В каждой паре на первом месте число из первого набора, а на втором – какое-то число из второго. Внутри пар числа умножили и полученные произведения сложили. Найдите наибольшее возможное значение полученной суммы.

Решение.

Пусть числа, берущиеся из второй геометрической прогрессии, составляют такую же или другую прогрессию. Тогда произведение чисел, взятых из первой геометрической прогрессии и из второй геометрической прогрессии, также составляют геометрическую прогрессию.

Сумма геометрической прогрессии выражается формулой:

*Sn=b1*1-qn1-q.*

В нашем случае *n = 10* , т.к. в исходных прогрессиях было всего по 10 членов.

Рассмотрим: n-ый член полученной прогрессии.

Формула n-ого члена геометрической прогрессии:

bn=bn-1*q=b1*qn-1

Следовательно, n-ый член нашей прогрессии равен:

2n3k=2n-1*3a*q.

Рассмотри два возможных случая для k и a.

k=a+1k=a-1=>2n3a+1=2n-1*3a*q2n3a-1=2n-1*3a*q=>q=6;q=23

Рассмотрим первый случай:

q=6=>b1=6, т.к. в данном случае степень числа 3 увеличивается, и 3a и 3a+1 должны образовывать геометрическую прогрессию, следовательно, она должна начинаться с наименьшего числа, т.е. числа 3.

Откуда получаем сумму равную:

S10=6*1-6101-6= 611-65

Рассмотрим второй случай:

q=23=> b1=2*310 , т.к. в данном случае степень числа 3 уменьшается, и 3a и 3a+1 должны образовывать геометрическую прогрессию, следовательно, она должна начинаться с наибольшего числа, т.е. числа 310.

В этом случае сумма равна:

S10=2*310*1-23101-23=2*310-211*3

Сравним два полученных числа:

611-65 ~ 2*310-211*3<=>610-1 ~ 5*(310-210)

Легко видеть, что 610-1 > 5*(310-210)

Ответ: 611-65

1.5. Текстовые задачи.

Текстовые задачи, связанные с повседневной практикой, мы выделили в отдельный класс, потому что в них могут использоваться любые сведения из теории чисел, изучаемые в школе.

Задача №1.5.1.

В данной задаче можно составить линейное диофантовое уравнение, решение которого, а, следовательно, решение задачи, можно получить с использованием алгоритма решения линейных диофантовых уравнений.

Условие задачи.

Ваня купил раков, вчера мелких, по цене 5,10 руб. за штуку, а сегодня – по 9,90 руб., но очень крупных. Всего на покупку истратил 252 руб., из них переплаты из-за отсутствия сдачи составили от 1,60 до 2 руб. Сколько Иван купил раков вчера и сколько сегодня.

Решение.

Переведем все цифры из рублей в копейки, для того чтобы они стали целыми. Получаем: 510 коп., 990 коп., 25200 коп., 160 коп., 200 коп.

Пусть Ваня вчера купил x раков, а сегодня y – раков($x,y \in N$).
Тогда получаем уравнение: 510x+990y=z, где z – общая сумма денег, потраченная на раков($z \in N$).

Для того чтобы уравнение имело решения, нужно
НОД510,990=d, $z \vdots d$ (по достаточному признаку решения линейных диофантовых уравнений).
НОД(510,990)=30, т.к. 550=2*5*17*3,
990=2*5*11*9. Так как Ваня заплатил за раков 25200 копеек, и из них переплата составили от 160 коп до200 коп., то z лежит в промежутке от 25000 до 25040 (причем $z \in N$). Т.к. число 30=2*3*5, то переплату и общую сумму денег, потраченную на раков, можно сократить в 10 раз.
Получаем, что переплата лежит в промежутке от 16 до 20, значит, общая сумма денег лежит в промежутке от 2500 до 2504(все рассматриваемые промежутке состоят только из натуральных чисел).
Подбором из промежутка 2500, 2504, в который входят натуральные числа, находим число, делящееся на 3 – это число равно 2502. Откуда z=25020.

Получаем уравнение: 510x+990y=25020. Преобразуем его:
510x+990y=25020<=>17x+99y=834 (*)

Применим для полученного уравнения алгоритм решения линейного диофантового уравнения.
17x+99y=1
a=17, b=99;b=p0a+r0; p0=1, r0=16.
a=p1r0+r1;p1=1,r1=1.
1=r1=a-p1r0=a-p1r0=a-p1b-p0a.
Подставляем вместо p их значения.
1=2a-b=> x0'=2, y0'=-1
Частным решением уравнения (*) будут:
x0=1668,
y0=-834.
Общее решение:
*x=x0-bd*t=1668-33t;y=y0+ad*t=-834+17t,*
где t – целое число.

Так как y-натуральное число, то $y>0$. Поэтому найдем t, при котором $y>0$.
-834+17t>0=>t>83417=>t≥50, т.к. t-целое число.
При t=50, x=18, y=16. Больше, чем 50, число t быть не может, т.к. тогда x будет отрицательным числом, а по условию оно натуральное.

Ответ: 18, 16.

Задача №1.5.2.

В данной задаче можно составить систему целочисленных уравнений, но решение этих уравнений потребует использование свойств делимости чисел.

Условие задачи.

Три фермера привели для продажи на ярмарку баранов: первый – 10, второй – 16, третий – 26. В первый день они установили одинаковую цену, и каждый продал не менее одного барана, но не всех. Во второй день они продали остальных баранов, опять же по одинаковой, но более низкой цене. По какой цене продавались бараны в первый и во второй день, если каждый из фермеров выручил от продажи по 3500 руб.

Решение.

Пусть за первый день фермерами было продано баранов в количестве:
a- первый фермер, b-второй фермер, c- третий фермер. По условию: $1\leq a<10$, $1\leq b<16$, $1\leq c<26$.

Обозначим за *x* – цену в первый день, за *y* – цену во второй день. По условию $x>y$. Также из условия ясно, что $c<b<a$, т.к. $x>y$, а у первого фермера меньше баранов, чем у второго и третьего, а у второго больше, чем у третьего, а все они продали баранов на одинаковую сумму денег.

a,b,c,x,y-натуральные числа. Тогда получаем систему уравнений:
ax+10-ay=3500 (1)bx+16-by=3500 (2)cx+26-cy=3500 (3)

Рассмотрим (1) – (2):
ax-bx+10y-ay-16y+by=0 <=> xa-b-ya-b=6y <=> <=> a-bx-y=6y

Рассмотрим (2) – (3):
bx+16y-by-cx-26y+cy=0 <=>xb-c-yb-c=10y <=>
<=>b-cx-y=10y

Рассмотрим(1) – (3):
ax+10y-ay-cx-26y+cy=0 <=>xa-c-ya-c=0<=>
<=>x-ya-c=16y

Получаем новую систему уравнений:
a-bx-y=6yb-cx-y=10ya-cx-y=16y<=> a-bx-y=2*3*yb-cx-y=2*5*ya-cx-y=2*23*y

По свойству делимости чисел:
a-bx-y=2*3*y, только если a-bx-y⋮2,
a-bx-y⋮3, a-bx-y⋮y .
Также из свойств делимости следует, что b-cx-y=2*5*y, только если a-bx-y⋮2, a-bx-y⋮5,a-bx-y⋮y
*a-cx-y=2*23*y, только если a-bx-y⋮2,*
a-bx-y⋮23, a-bx-y⋮y.

Легко видеть, что множители x-y, y, 2 повторяются.
Следовательно, $x-y=2y \Rightarrow x=3y. \Rightarrow$
$a-b=3, b-c=5, a-c=8 \Leftrightarrow a=3+b,\ b=5+c,$
$a=8+c$. Подставляем полученные значения в уравнение (1). Получаем:
$3y8+c+10-8-cy=3500 \Leftrightarrow 24y+3yc+2y-cy=3500 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y13+c=2*53*7$. Т.к. $c<b<a$, то $c\leq 8$.
Следовательно, $13+c=14 \Rightarrow y=125 \Rightarrow x=375$.

Ответ: 375, 125.

На текстовых задачах мы заканчиваем свою классификацию. Мы понимаем, что наша классификация не совсем полна, потому что известные из открытых источников задания С6 очень разнообразны. Однако, мы постарались выделить задачи на сведения из теории чисел, которые наиболее часто встречаются при решении задач С6 и знание которых может помочь в решении задачи С6 на экзамене. Более подробную классификацию задач приводит Корянов А.Г. в своем интернет-издании: «МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2010. Задание С6».

Список литературы.

1. Жафяров А. Ж. Математика. ЕГЭ 2010. Экспресс-консультация.– Новосибирск: Сиб. Унив. Изд-во, 2010.
2. Корянов А.Г. Математика ЕГЭ 2010. Задача С6. Интернет-издание. (akoryanov@mail.ru)
3. Мордкович А.Г. , Семенов П.В. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч.1. Учебник (профильный уровень). – М: Мнемозина, 2005.
4. Сергеев И.Н. МАТЕМАТИКА. Задачи с ответами и решениями: Пособие для поступающих в вузы. – М: КДУ, 2004. – 2-е изд., доп.
5. ЕГЭ 2011. Математика. Типовые текстовые задания / под ред. А. Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2011.
6. ЕГЭ – 2011. Математика: типовые экзаменационные варианты : 30 вариантов / под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: Национальное образование, 2010.
7. ЕГЭ 2011. Математика. Задача С6. Арифметика и алгебра. Пратусевич М.Я. и др / Под ред. А. Л. Семенова и И. В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2011.
8. Сайт Википедия. ru.wikipedia.org.