Краевой конкурс учебно-исследовательских и проектных работ учащихся «Прикладные вопросы математики»

Математическое моделирование

Моделирование всплытия подводной лодки

Землянухин Александр Дмитриевич,
МОУ «Лицей №1» г. Перми, 11 кл.
Шабрыкина Наталья Сергеевна,
к. ф.-м. н., доцент ПНИПУ

Введение

В наши дни очень важно правильно определять поведение военных объектов. Сейчас для этих целей существуют приборы, с помощью которых легко можно определить поведение объекта, при введении начальных условий. Целью работы было смоделировать всплытие подводной лодки. В работе будет выведена формула описывающая поведение лодки и также построен график.

Концептуальная постановка задачи

Система, которую мы моделируем, будет подводная лодка размеры и масса которой заранее известны. Она находится на некоторой глубине, которая также известна, и движется с постоянной скоростью. После получения приказа подняться лодка выкачала из резервуаров воду и наполнила их воздухом.

Основные параметры, от которых будет зависеть траектория движения, это: начальная скорость, сила сопротивления воды, а также плотность лодки.

Допущения, которые будут использованы в решении задачи, это: постоянная сила тяжести, время заполнения резервуаров считается пренебрежимо малым, а также сила сопротивления воды пропорциональна скорости движения лодки.

Математическая постановка задачи

Используя выше описанные допущения, запишем второй закон Ньютона в векторном виде.

$$\overline{F}_{спр} + \overline{F}_{арх} + m\overline{g} = m\overline{a}$$

где $\overline{F}_{спр}$ -сила сопротивления воды, $\overline{F}_{арх}$ -сила Архимеда, m -масса лодки, a -полное ускорение лодки.

Спроецируем на оси координат.

$$x : F_{спрх} = ma_x \, .$$

$$y : F_{спру} + F_{арх} - mg = ma_y \, .$$

Подставим

$$F_{арх} = \rho_{ж} V_{л} g \, .$$

где $\rho_{ж}$ плотность воды, $V_{л}$ объем лодки

$$F_{спр} = kv \, .$$

где v скорость лодки, k коэффициент сопротивления

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \, .$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} \, .$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \, .$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \, .$$

И получим следующие уравнения

$$x: k\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \, .$$

$$y: \rho_{ж} V_{л} g + k\frac{dy}{dt} - mg = m\frac{d^2y}{dt^2} \, .$$

Решим данные уравнения, используя начальные условия.

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0 .$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = V_x .$$

Решение будет проводиться в математическом пакете Maple. Пример такой программы приведен ниже.

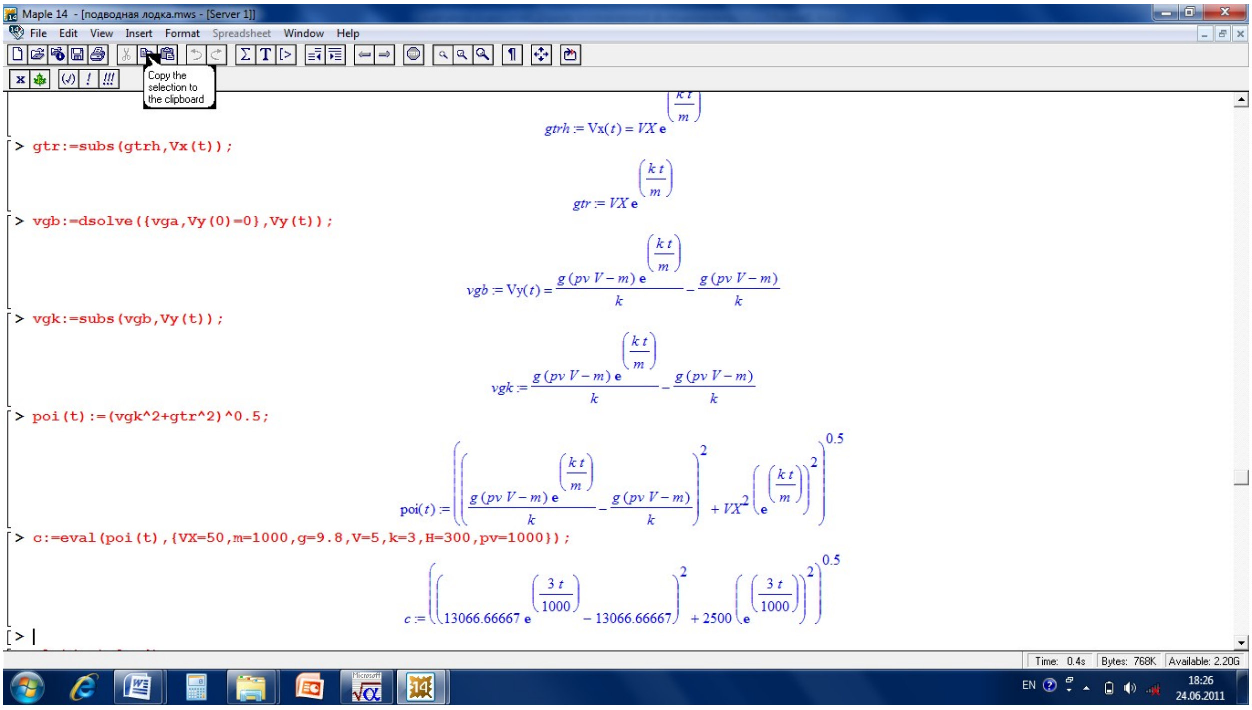


Рисунок 1

$$x(t) = -\frac{Vx\,m}{k} + \frac{Vx\,m\,e^{\left(\frac{k\,t}{m}\right)}}{k}.$$

$$y(t) = \frac{m\,e^{\left(\frac{k\,t}{m}\right)}\,g\,(pv\,V - m)}{k^2} - \frac{g\,(pv\,V - m)\,t}{k} - \frac{H\,k^2 + m\,pv\,V\,g - m^2\,g}{k^2}.$$

Результаты решения

С помощью Maple был построен график, показывающий траекторию движения лодки (Рисунок 2) .

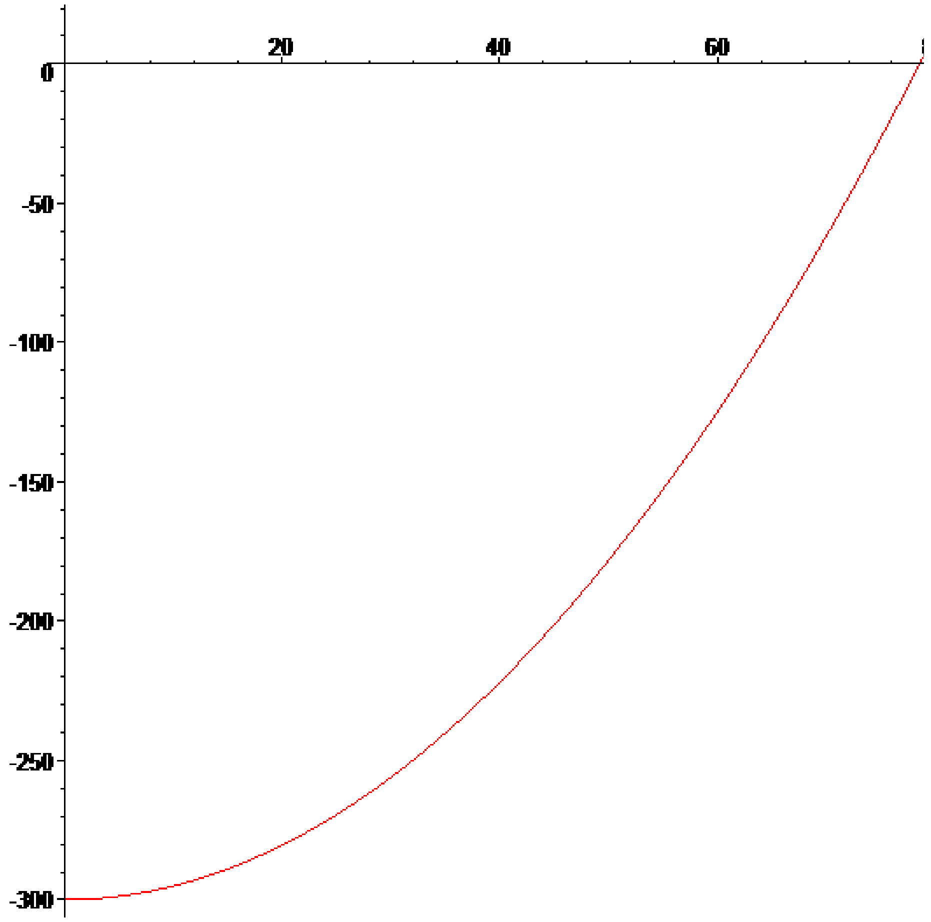


Рисунок 2

Из графика видно, что лодка всплывает по параболической траектории. Также было рассчитано изменение модуля скорости лодки (Рисунок 3). График изменения модуля скорости также парабола, но с течением времени все больше напоминает прямую.

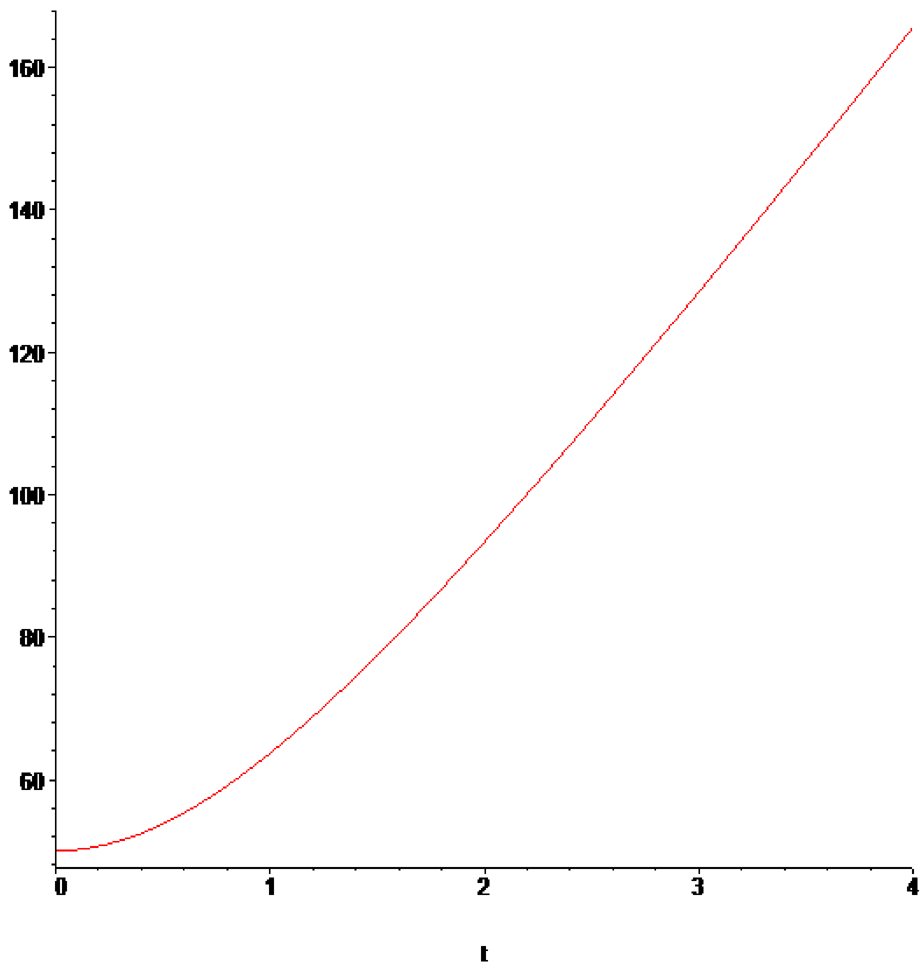


Рисунок 3

Потом заменена масса лодки с 1000 кг на 10 кг и было замечено, что лодка всплывет уже через 0,32 секунды.(Рисунок 4)

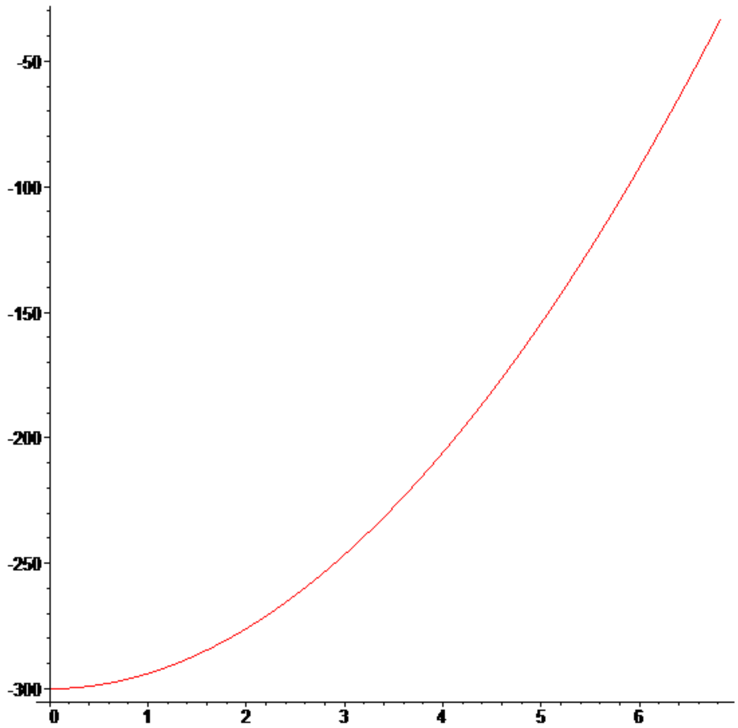


Рисунок 4

Если заменить объем с 5 на 2 то лодка будет всплывать медленней. (Рисунок 5)

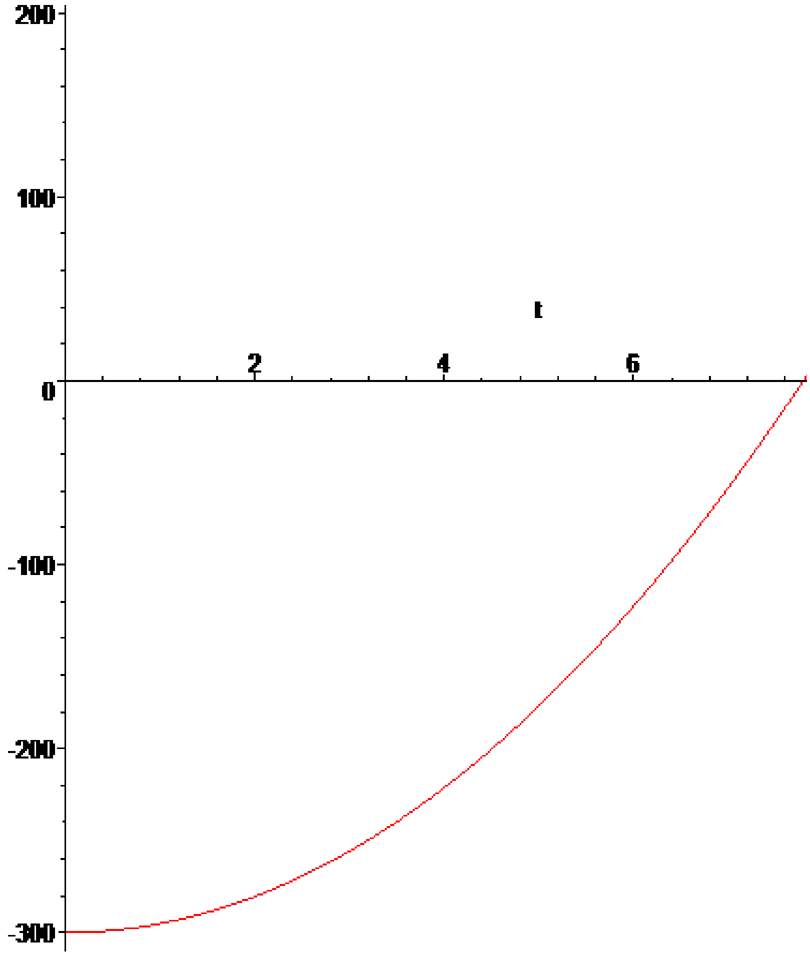


Рисунок 5

Заключение

В этой работе была вычислена траектория движения подводной лодки, при заданных условиях. Построена математическая модель движения лодки. Составлены дифференциальные уравнения, описывающие изменения координат от времени, с их помощью получена траектория, анализ этой траектории показывает, что лодка всегда будет двигаться по параболической кривой.

Список литературы

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М., 1963.
2. Мякишев Г.Я, Буховцев Б.Б, Сотский Н.Н Физика. 10 кл. Учебник 2008 .

Приложение

Здесь указан исходный код.

```
> pl:=k*diff(x(t),t)=m*diff(diff(x(t),t),t);
```

$$pl := k\left(\frac{d}{dt}\mathrm{x}(t)\right) = m\left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{x}(t)\right)$$

```
> pls:=pv*V*g+k*diff(y(t),t)-m*g=m*diff(diff(y(t),t),t);
```

$$pls := pv\,V\,g + k\left(\frac{d}{dt}\mathrm{y}(t)\right) - m\,g = m\left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{y}(t)\right)$$

```
> plst:=dsolve({pl,x(0)=0,D(x)(0)=Vx},x(t));
```

$$plst := \mathrm{x}(t) = -\frac{Vx\,m}{k} + \frac{Vx\,m\,\mathbf{e}^{\left(\frac{k\,t}{m}\right)}}{k}$$

```
> p:=subs(plst,x(t));
```

$$p := -\frac{Vx\,m}{k} + \frac{Vx\,m\,\mathbf{e}^{\left(\frac{k\,t}{m}\right)}}{k}$$

```
> plstr:=dsolve({pls,y(0)=-H,D(y)(0)=0},y(t));
```

$$plstr := \mathrm{y}(t) = \frac{m\,\mathbf{e}^{\left(\frac{k\,t}{m}\right)}g\,(pv\,V - m)}{k^2} - \frac{g\,(pv\,V - m)\,t}{k} - \frac{H\,k^2 + m\,pv\,V\,g - m^2\,g}{k^2}$$

```
> with(Plot);
```

[*ColorRange*, *DualAxisPlot*, *FormatText*, *IsCoordinateSystem*, *IsOption*, *LogPlot2D*, *MergeAXIS*, *ModuleApply*, *Plot2D*, *Plot3D*, *PlotArray*, *PointPlot*, *PolarPlot*, *PolygonPlot*, *Preprocess*, *ProcessUnits*, *SetColors*, *SetColours*, *Structure*, *TextPlot*, *TranslateOptions*, *Utilities*]

```
> l:=subs(plstr,y(t));
```

$$l := \frac{m\,\mathbf{e}^{\left(\frac{k\,t}{m}\right)}g\,(pv\,V - m)}{k^2} - \frac{g\,(pv\,V - m)\,t}{k} - \frac{H\,k^2 + m\,pv\,V\,g - m^2\,g}{k^2}$$

```
> a:=eval(l,{m=1000,g=9.8,V=5,k=3,H=300,pv=1000});
```

$$a := 0.4355555556\ 10^7\,\mathbf{e}^{\left(\frac{3\,t}{1000}\right)} - 13066.66667\ t - 0.4355855556\ 10^7$$

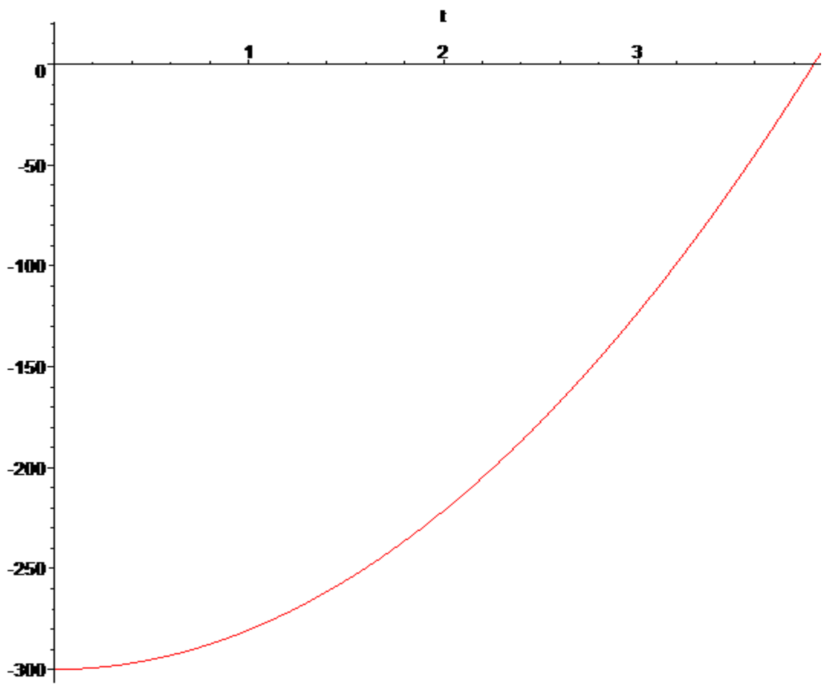
```
> u:=subs(plst,x(t));
```

$$u := -\frac{Vx\,m}{k} + \frac{Vx\,m\,\mathbf{e}^{\left(\frac{k\,t}{m}\right)}}{k}$$

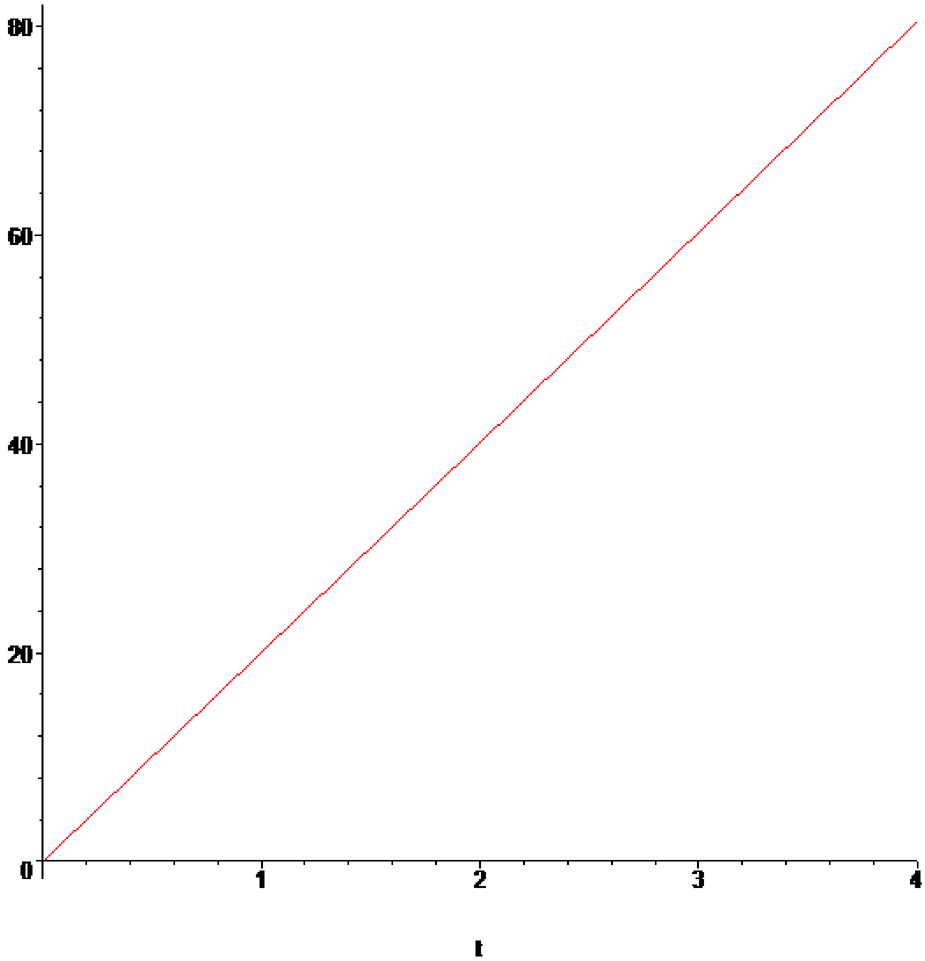
```
> b:=eval(u,{Vx=20,k=3,m=1000});
```

$$b := -\frac{20000}{3} + \frac{20000}{3}\,\mathbf{e}^{\left(\frac{3\,t}{1000}\right)}$$

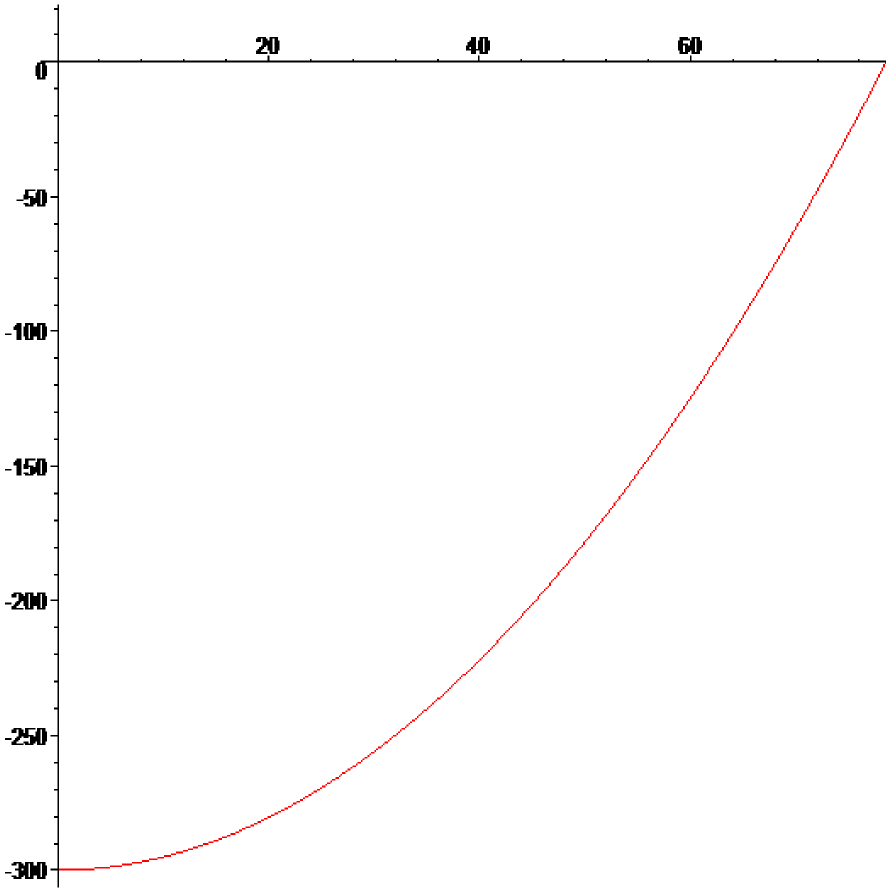
```
> plot(a,t=0..4);
```




```
> plot(b,t=0..4);
```




```
> plot([b(t),a(t),t=0..4]);
```




```
> gt:=k*Vx(t)=m*diff(Vx(t),t);
```

$$gt := k\,\mathrm{Vx}(t) = m\left(\frac{d}{dt}\mathrm{Vx}(t)\right)$$

```
> vga:=pv*V*g+k*Vy(t)-m*g=m*diff(Vy(t),t);
```

$$vga := pv\,V\,g + k\,\mathrm{Vy}(t) - m\,g = m\left(\frac{d}{dt}\mathrm{Vy}(t)\right)$$

```
> gtrh:=dsolve({gt,Vx(0)=VX},Vx(t));
```

$$gtrh := \mathrm{Vx}(t) = VX\,\mathbf{e}^{\left(\frac{k\,t}{m}\right)}$$

```
> gtr:=subs(gtrh,Vx(t));
```

$$gtr := VX\,\mathbf{e}^{\left(\frac{k\,t}{m}\right)}$$

```
> vgb:=dsolve({vga,Vy(0)=0},Vy(t));
```

$$vgb := \mathrm{Vy}(t) = \frac{g\,(pv\,V - m)\,\mathbf{e}^{\left(\frac{k\,t}{m}\right)}}{k} - \frac{g\,(pv\,V - m)}{k}$$

```
> vgk:=subs(vgb,Vy(t));
```

$$vgk := \frac{g\,(pv\,V - m)\,\mathbf{e}^{\left(\frac{k\,t}{m}\right)}}{k} - \frac{g\,(pv\,V - m)}{k}$$

```
> poi(t):=(vgk^2+gtr^2)^0.5;
```

$$\mathrm{poi}(t) := \left(\left(\frac{g\,(pv\,V - m)\,\mathbf{e}^{\left(\frac{k\,t}{m}\right)}}{k} - \frac{g\,(pv\,V - m)}{k}\right)^2 + VX^2\left(\mathbf{e}^{\left(\frac{k\,t}{m}\right)}\right)^2\right)^{0.5}$$

```
> c:=eval(poi(t),{VX=50,m=1000,g=9.8,V=5,k=3,H=300,pv=1000});
```

$$c := \left(\left(13066.66667\ \mathbf{e}^{\left(\frac{3\,t}{1000}\right)} - 13066.66667\right)^2 + 2500\left(\mathbf{e}^{\left(\frac{3\,t}{1000}\right)}\right)^2\right)^{0.5}$$

```
>
> plot(c,t=0..4);
```