Краевой конкурс творческих работ учащихся
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Методические аспекты изучения математики

Тела, заполняющие пространство с помощью движения

Аликина Алла Сергеевна,

11 кл., МБОУ «Гимназия №4 имени братьев Каменских», г. Пермь

Мартюшева Надежда Николаевна,

учитель математики, почетный работник образования РФ

Пермь. 2012.

Оглавление

Введение

Симметрия во все времена привлекала людей. Это заложено в человеке от природы, так как окружающий мир демонстрирует это свойство в представителях флоры, фауны, в организме самого человека, в неживой природе.

Ученый – минеролог Фёдоров Евграф Степанович обращал внимание на симметрию минералов и перевел свойства реальных представителей многогранников в природе на язык геометрии. Одним из его открытий были так называемые тела Фёдорова или параллелоэдры.

Параллелоэдры – выпуклые многогранники, параллельным перенесением которых можно заложить пространство, то есть покрыть пространство так, чтобы многогранники не входили друг в друга и не оставляли пустот между собой. Начало теории параллелоэдров было положено в 19 веке трудами Фёдорова Е.С. и Минковского. В 20 веке теорию параллелоэдров развивали Делоне, Б.А. Венков, С.С. Рышков, П.Пакмаллен и другие.

В трехмерном пространстве существует ровно пять типов параллелоэдров: куб, правильная шестиугольная призма, ромбический додекаэдр, усеченный октаэдр и «двусторонне заточенный карандашик». Все параллелоэдры являются центрально – симметричными многогранниками.

На плоскости существует две разновидности аналогичного понятия параллелоэдрам: параллелограммы и центрально – симметричные шестиугольники. Они заполняют плоскость с помощью параллельного переноса. Таким образом, получаются паркеты – множество многоугольников, покрывающих плоскость без просветов и двойных покрытий. Понятие паркета актуально в совершенном мире, так как используется в дизайне окружающего нас пространства.

Главные представители симметричности пространства – тела Платона. Тела Платона – выпуклые многогранники, все грани которых правильные многоугольники. Все многогранные углы правильного многогранника равны.

Данная работа представляет собой попытку расширить понятие параллелоэдров за счет рассмотрения других видов движений многогранников кроме параллельного переноса.

Цель исследования – найти и смоделировать многогранники, заполняющие пространство с помощью движений.

Глава 1. Геометрические паркеты

Паркет (мозаика) – бесконечное семейство многоугольников, покрывающее плоскость без просветов и двойных покрытий. Иногда паркетом называют покрытие плоскости правильными многоугольниками, при котором два многоугольника имеют либо общую сторону, либо общую вершину, либо совсем не имеют общих точек; но мы будем рассматривать как правильные, так и неправильные многоугольники.

Итак, какими же многоугольниками можно выложить плоскость?

Паркеты из одинаковых правильных многоугольников

Выясним, из каких правильным многоугольников может состоять паркет.

Сумма всех углов n – угольника равна 180^0 *(n – 2)*. Все угла правильного многоугольника равны; следовательно, каждый из них равен 180^0 *(n – 2)/n*. В каждой вершине паркета сходится целое число углов; поэтому число 2×180^0 должно быть целым кратным числа 180^0 *(n – 2)/n*. Преобразуем отношение этих чисел:

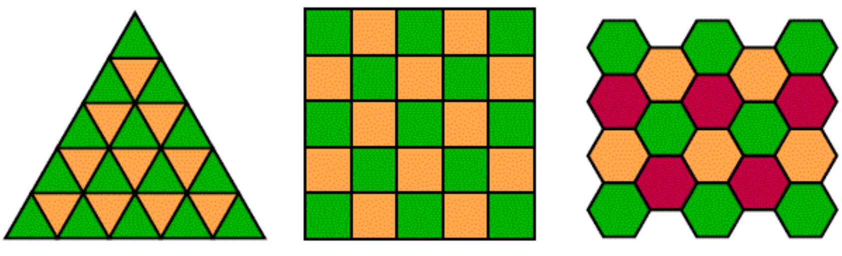
□□□□(□−□)

□□□−□ =

2 +

□□−□

Разность *(n – 2)* может принимать лишь значения 1, 2 или 4; поэтому n может быть равно только 3, 4 или 6. Значит, можно получить паркеты, составленные из правильных треугольников, квадратов или правильных шестиугольников.



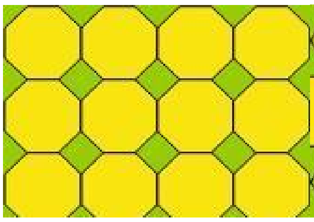
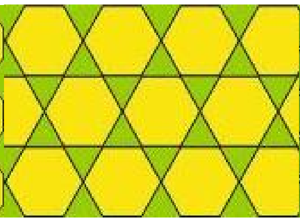
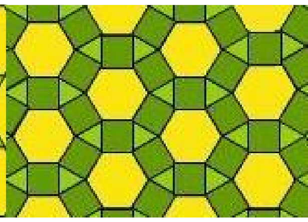
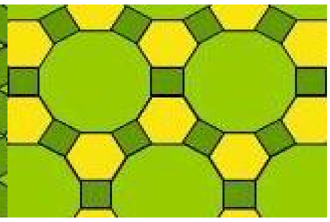
Мы доказали теорему: Паркет можно составить либо из правильных треугольников, либо из квадратов, либо из правильных шестиугольников.

Паркеты из разных правильных многоугольников.

Сначала выясним, какое количество различных правильных многоугольников (с одинаковыми длинами сторон) может находиться вокруг каждой точки. Величина угла правильного многоугольника должна находиться в интервале от

60^0 до 180^0 (не включая); следовательно, число многоугольников, находящихся в окрестности точки, должно быть больше $2\times(360^0/180^0)$ и не может превышать $6\times(360^0/60^0)$.

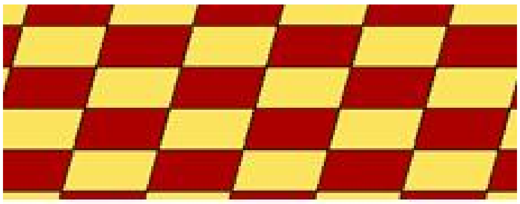
Можно показать, что существуют следующие способы уложить паркет комбинациями правильных многоугольников: (3,12,12); (4,6,12); (6,6,6); (3,3,6,6) – два варианта паркета; (3,4,4,6) – четыре варианта; (3,3,3,4,4) – четыре варианта; (3,3,3,3,6); (3,3,3,3,3,3) (цифры в скобках - обозначения многоугольников, сходящихся в каждой вершине: 3 - правильный треугольник, 4 - квадрат, 6 - правильный шестиугольник, 12 - правильный двенадцатиугольник). Некоторые варианты паркета показаны на следующих иллюстрациях:

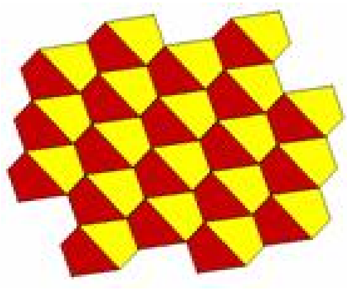
(4,8,8) (3,3,6,6) (3,4,4,6) (4,6,12)

Паркеты из неправильных многоугольников

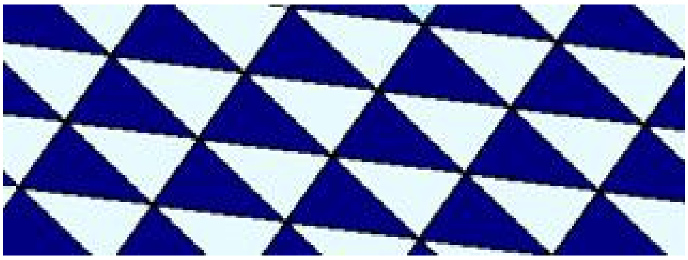
Легко покрыть плоскость параллелограммами:



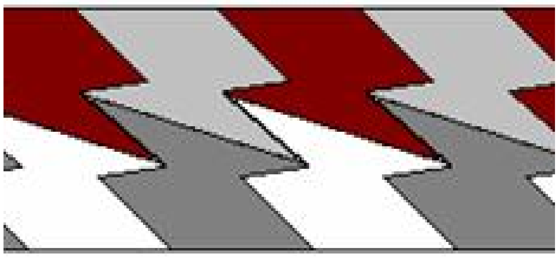
Вообще можно замостить плоскость копиями произвольного четырехугольника, необязательно выпуклого:

Можно составить паркет из копий произвольного треугольника: из двух равных треугольников можно сложить параллелограмм, и покрыть плоскость копиями этого параллелограмма.



Еще плоскость можно покрыть копиями центрально-симметричного шестиугольника, или копиями пятиугольника с двумя параллельными сторонами. До сих пор не найдены все типы выпуклых пятиугольников, из которых складываются паркеты. Зато доказана теорема, утверждающая: «Нельзя сложить паркет из копий выпуклого семиугольника». В то же время существуют паркеты из невыпуклых семиугольников:



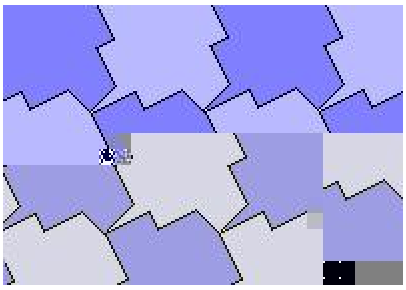
Паркеты из произвольных многоугольников

Некоторые определения паркета не ограничиваются многоугольниками; в этом случае паркетом называется покрытие плоскости без пропусков и перекрытий заданными фигурами (в частном случае - многоугольниками, правильными или неправильными, выпуклыми или невыпуклыми). В таком случае даже для паркетов из многоугольников может не соблюдаться требование "два многоугольника должны иметь общую вершину, общую сторону или совсем не иметь общих точек"; кроме того, появляется множество разнообразных паркетов, состоящих не из многоугольников, а из криволинейных фигур. Рассмотрим способы построения нового паркета, исходя из этого "расширенного" определения. Итак, как нарисовать паркет? (некоторые из возможных способов)

<u>Способ первый</u>

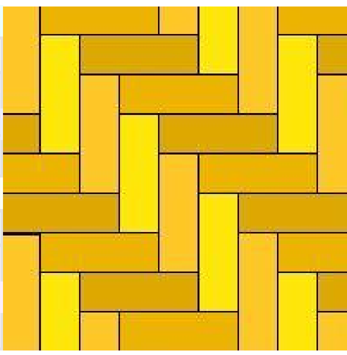
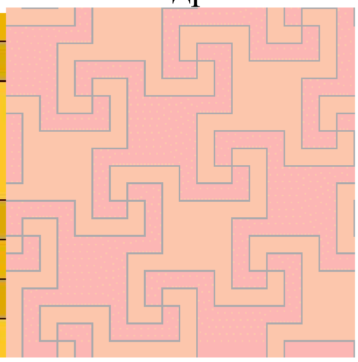
Берем некоторую сетку (уже известный нам паркет) - из правильных треугольников, шестиугольников, квадратов, или из произвольных многоугольников, и выполняем преобразования: сжатие/растяжение, замена прямолинейных отрезков кривыми с началом и концом в тех же точках, что и у отрезков...

Пример: паркеты, полученные заменой отрезков "квадратной" сетки некоторыми кривыми или ломаными.

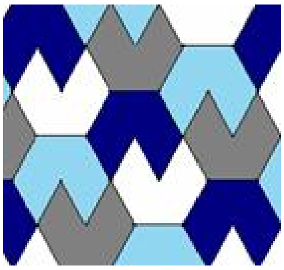


Способ второй

Объединяем отдельные элементы уже существующих паркетов. Примеры: паркеты, полученные в результате объединения элементов квадратной сетки:



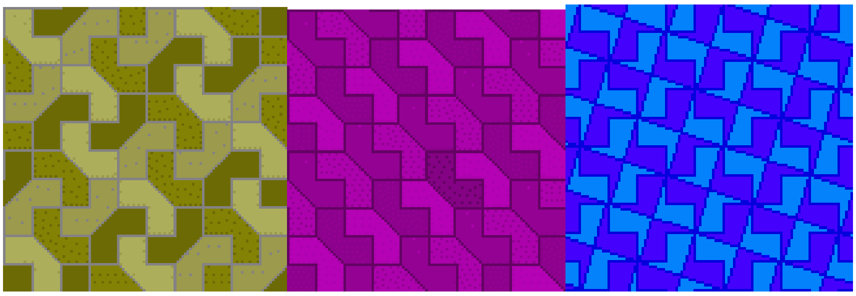
Паркет, каждый элемент которого получен в результате объединения пяти правильных треугольников:



Способ третий

Берем существующую сетку и дополняем ее новыми линиями. Получаем разбиение плоскости на фигуры, которые затем можно по-новому объединить. В частном случае - накладываем друг на друга две (или более) сетки уже известных паркетов, смещая или поворачивая одну сетку относительно другой; фигуры, образовавшиеся при пересечении линий, считаем элементами паркета.

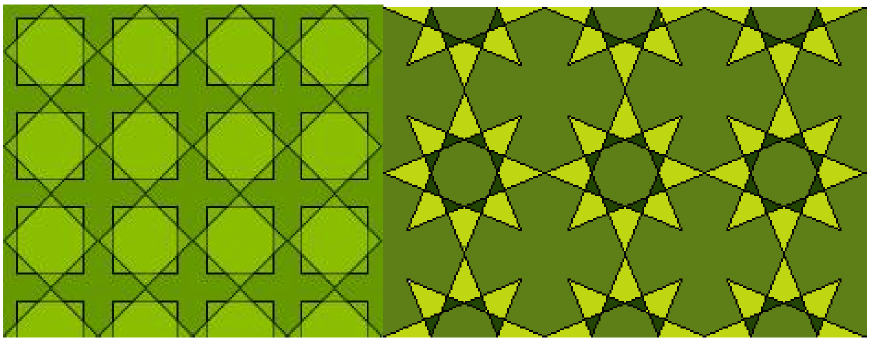
Пример (разбиения сетки из греческих крестов):



<u>Способ четвертый</u>

Выбираем некоторую кривую или ломаную и начинаем ее переносить на некоторый вектор, поворачивать, отражать... получившиеся кривые или ломаные размещаем на плоскости таким образом, чтобы они образовали замкнутые контуры (которые в дальнейшем будут рассматриваться как элементы паркета). Если рассматривать только незамкнутые кривые и ломаные, паркеты будут напоминать полученные первым способом.

А вот паркеты, полученные с помощью параллельного переноса звездчатых многоугольников:



Совмещая вершины звездчатых многоугольников, получаем паркеты, состоящие из правильных восьмиугольников, равнобедренных прямоугольных треугольников, а также из невыпуклых 16-угольников, напоминающих крест. На первом рисунке есть еще один элемент - выпуклый четырехугольник.

Глава 2. Тела Платона

Тела Платона по-другому называют *правильными многогранниками.*

Платон (427 – 347 до н.э.) - древнегреческий философ, который признавал под влиянием пифагорейцев, что знания математики необходимо каждому образованному человеку. На дверях в его академии была надпись: «Пусть тот, кто не знает геометрии, не входит сюда». Платон ввел традицию давать безукоризненные определения и определять, какие положения в математических соображениях можно принимать без доказательства. Он предложил термины «анализ» и «синтез», обосновал метод наведения и метод доказательства от противного. Особое внимание в школе Платона уделялось решению задач на построение, сформировалось понятие о геометрическом месте точек, разработана методика решения задач на построение с помощью циркуля.

Большой вклад ученый сделал в сфере выпуклых правильных многогранников. В честь Платона были названы такие тела, как тетраэдр, октаэдр, гексаэдр (куб), додекаэдр и икосаэдр. Эти тела многогранники принято называть «Платоновыми телами», хотя они были известны задолго до него.

В пифагорово время философское объяснение устройства мира было геометризировано. Атомы четырех стихий (огонь, земля, вода, воздух) – первые основы материального мира – Пифагор мыслил в виде определенного многогранника. Сохраняя и развивая эти идеи, Платон сформировал концепцию Высшей ступени развития античной атомистики для атомов пяти сущностей (земля, огонь, вода, воздух, мировой эфир):

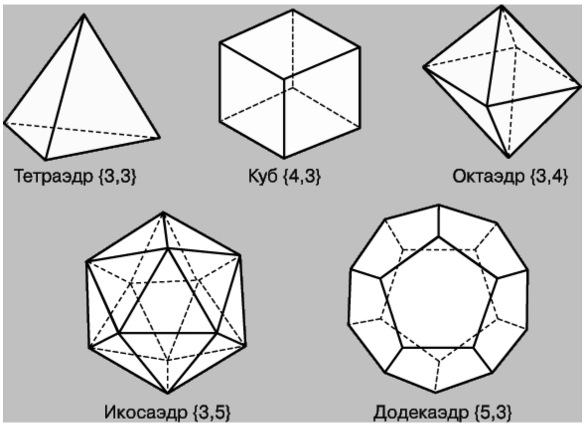
«Земле представляем мы вид кубический…телесный вид пирамиды должен быть у нас стихиею и семенем огня… второй по рождению вид признаем стихиею воздуха, а третий – воды. Но так как оставалось еще одно – пятое соединение, то Бог употребил его для очертания вселенной».

Атомистическая теория материи Платона привлекает внимание исследователей нашего времени, как источник традиции приписывать Платону открытие пяти правильных выпуклых многогранников (называть правильные многогранники Платоновыми телами).

Название каждого многогранника связано с числом его граней. Так тетраэдр имеет четыре грани, в переводе с греческого «тетра» - четыре, «эдрон» - грань, вот и получается четырехгранник – тетраэдр. Гексаэдр (куб) имеет шесть граней, «гекса» - шесть. Октаэдр – восьмигранник, «окто» - восемь. Додекаэдр – двенадцатигранник, «додэка» - двенадцать. Икосаэдр имеет двадцать граней, «икоси» - двадцать.

<u>Тетраэдр</u> – четырехгранник, все грани которого треугольники, т.е. треугольная пирамида; правильный тетраэдр ограничен четырьмя равносторонними треугольниками; один из пяти правильных многоугольников.

Куб или правильный гексаэдр – правильная четырехугольная призма с равными ребрами, ограниченная шестью квадратами.



Октаэдр – восьмигранник; тело, ограниченное восемью треугольниками; правильный октаэдр ограничен восемью равносторонними треугольниками; один из пяти правильных многогранников.

Икосаэдр – двадцатигранник; тело, ограниченное двадцатью многоугольниками; правильный икосаэдр ограничен двадцатью равносторонними треугольниками; один из пяти правильных многогранников.

Додекаэдр – двенадцатигранник; тело, ограниченное двенадцатью многоугольниками; правильный пятиугольник; один из пяти правильных многогранников.

Определение правильных многоугольников можно задать по-разному. Попробуем построить научное определение.

Рассмотрим, какой многогранник называется правильным. Для этого необходимо перечислись свойства правильных многогранников:

- Все ребра многогранника равны
- Все плоские углы равны
- Все грани – равные правильные многоугольники
- Все двугранные углы равны
- Все многогранные углы равны
- Все многогранные углы имеют одно и то же число граней, и в каждой вершине сходится одно и то же число ребер.

Какие же свойства правильным многогранников отнести к определению правильного многогранника? При этом помнить, что определения должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Определение должно быть полным, то есть перечисленные в нем свойства должны полностью определять данное понятие. Другими словами, любое свойство данного понятия выводится из свойств, перечисленных в определении.

Определение не должно содержать лишних свойств, то есть ни одного из перечисленных свойств не должно выводиться из остальных.

Таким образом, задача сводится к тому, чтобы отбросить лишние свойства. Следуя из вышеперечисленного, мы можем дать два определения правильным многогранникам.

- Правильным многогранником называется многогранник, у которого все грани – правильные равные многоугольники и все двугранные углы его равны.
- Выпуклый многогранник называется правильным, если его грани являются правильными многоугольниками с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число ребер.

Тела Платона - это самые симметричные многогранники, поскольку в них все симметрично и расположение вершин, и расположение ребер, и расположение граней и сами грани – правильны многоугольники. То есть это выпуклые многогранники, все грани которых правильные многоугольники. Все многогранные угла правильного многогранника равны. Поэтому они и были выделены человечеством самыми первыми. А Архимед сначала пытался найти 6-е такое тело и только после осознания глупости своих попыток, снизил требования на симметрию – разрешил неодинаковость граней, сохраняя их правильность и эквивалентность вершин.

Как это следует уже из подсчета суммы плоских углов при вершине, выпуклых правильных многогранников не больше пяти. Указанным ниже путем можно доказать, что существует именно пять правильных многогранников (это доказал Евклид). Они – правильный тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.

Соотношение элементов в правильных многогранниках:

Многогранник	Число ребер при вершине	Число сторон грани	Число граней	Число ребер	Число вершин
Тетраэдр	3	3	4	6	4
Куб	3	4	6	12	8
Октаэдр	4	3	8	12	6
Додекаэдр	3	5	12	30	20
Икосаэдр	5	3	20	30	12

Куб и октаэдр дуальны, т.е. получаются друг из друга, если центры тяжести граней одного принять за вершины другого и обратно. Аналогично дуальны додекаэдр и икосаэдр. Тетраэдр дуален сам себе. Правильный додекаэдр получается из куба построением «крыш» на его гранях (способ Евклида), вершинами тетраэдра являются любые четыре вершины куба, попарно не смежные по ребру. Так получаются из куба все остальные правильные многогранники. Сам факт существования всего пяти действительно правильных многогранников удивителен, ведь правильных многоугольников на плоскости бесконечно много!

Все правильные многогранники были известны еще в Древней Греции, и им посвящена заключительная, XII книга знаменитых начал Евклида. Эти многогранники часто называют также Платоновыми телами в идеалистической картине мира, данной великим древнегреческим мыслителем Платоном. Четыре из них олицетворяли четыре стихии: тетраэдр – огонь, куб – землю, икосаэдр – воду и октаэдр – воздух; пятый же многогранник, додекаэдр, символизировал все мироздание его по латыни стали называть quinta essentia (пятая сущность).

Придумать правильный тетраэдр, куб, октаэдр, по-видимому, было не трудно, тем более что эти формы имеют природные кристаллы, например: куб – монокристалл поваренной соли (NaCl), октаэдр – монокристалл алюмокалиевых квасцов ($(KalSO_4)2*12H_2O$). Существует предположение, что форму додекаэдра древние греки получили, рассматривая кристаллы пирита (сернистого колчедана FeS). Имея же додекаэдр нетрудно построить и икосаэдр: его вершинами будут центры двенадцати граней додекаэдра.

Алюминиевый квасец

Пирит

Поваренная соль

Глава 3. Федоровские тела

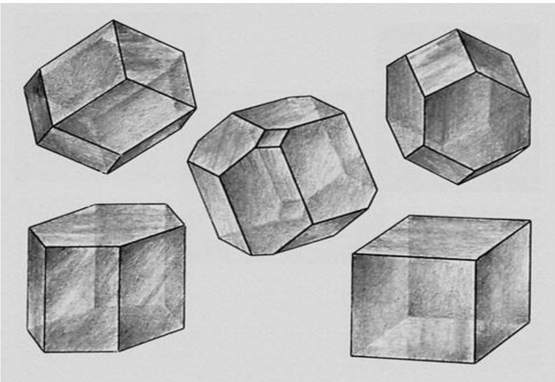
Федоров Евграф Степанович (22.12.1853 – 21.05.1919) - русский кристаллограф, один из основоположников структурной кристаллографии и минерологи, геометр, петрограф и геолог, стал основоположником теории строения кристаллов. Математика, химия, геология, минералогия, петрография, горное дело – в каждую из этих областей внес Федоров немалый вклад. С детских лет он увлекался точными науками. В 5 лет он хорошо знал арифметику, а в 7 лет «для удовольствия» за 2 дня изучил учебник геометрии. Сын военного инженера и сам в молодости военный инженер, он оставил военную службу, чтобы целиком отдаться науке. Он снова поступил учиться, сначала в Военно-медицинскую академию, затем закончил Химико-технологический институт, наконец, в *27* лет поступил в Петербургский горный институт.

В 1890 году Е. С. Федоров строго математически вывел все возможные геометрические законы сочетания элементов симметрии в кристаллических структурах, иначе говоря, симметрии расположения частиц внутри кристаллов. Оказалось, что число таких законов ограничено. Федоров показал, что имеется 230 пространственных групп симметрии, которые впоследствии в честь ученого были названы Федоровскими. Это был исполинский труд, предпринятый за 10 лет до открытия рентгеновских лучей, за 27 лет до того, как с их помощью доказали существование самой кристаллической решетки.

Федоров установил, что красота внешних форм кристаллов подчиняется простым и строгим законам симметрии. Многие многогранники, прежде всего правильные, полуправильные, правильные звездчатые и др., по образному выражению Федорова, «буквально блещут симметрией».

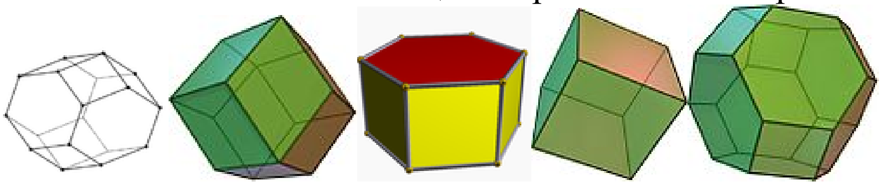
Большое значение для развития теории многогранников как самостоятельного раздела геометрии имели его исследования кристаллографических культур.

Федоров Е.С. разрабатывал геометрию, в которой основными элементами являются круги, сферы, векторы плоскости и другие геометрические образы. Ему принадлежит «Новая геометрия как основа черчения» (1907). Книги «Правильное деление плоскости и пространства» (1899), «Начала учения о фигурах» (1885), «Симметрия и структура кристаллов» составили трехтомник избранных трудов по геометрии пространства, симметрии и структуре кристаллов в серии «Классики науки». Первым из ученых Федоров исчерпывающе рассматривал законы выполнения пространства в четвертом разделе «Начало учения о фигурах». Выводил многогранники, которые всецело выполняют пространство, будучи равными, параллельно расположенным и смежными по целым граням. Устанавливает, что таких многогранников только четыре типа:



Кубы и продукты их однородных деформаций, гексагональные призмы с пинакоидом (простая форма, состоящая из двух взаимно параллельных граней) и продукты их деформации, ромбододекаэдры и продукты их деформаций, кубооктаэдры и продукты их деформаций. Удлиненный – растянутый – ромбододекаэдр рассматривается как пятый тип. Однородные деформации – сдвиги и растяжения.

Пять тел Федорова (параллелоэдры) — выпуклые многогранники, параллельным перенесением которых можно замостить пространство, то есть покрыть евклидово пространство так, чтобы многогранники не входили друг в друга и не оставляли пустот между собой. Заложить пространство параллелоэдрами можно только с помощью параллельного переноса.



Король геометрии 20-го века Б.Н. Делоне (1890-1980) эти 5 многогранников называл телами Федорова, подчеркивая этим, что они имеют такое же значение, как и тела Платона и Архимеда. Борис Николаевич считал Федорова выдающимся интуитивным геометром. Однако, Федоров не чуждался и других областей математики. О своем же учебнике Делоне говорил, что он старался включать в задачник только те задачи, которые имели принципиальный геометрический интерес, чтобы не расхолаживать школьников всякими выдумками. Но при этом строгость изложения материала не должна превалировать над его доступностью.

Заметим теперь, что двумерные Федоровские группы симметрии были найдены задолго до их открытия наукой. Уже в конце первого тысячелетия ими стали украшать мечети, символизирую ими бесконечные пути, ведущие к Аллаху, как к недостижимому пределу абстрактного мышления. Возникновение Ислама привело к бурному развитию наук в арабских государствах, который продолжался до завоевания этих государств кочевниками.

Таким образом, симметрийный подход к изложению школьного курса геометрии, который собственно и начат был Федоровым в его знаменитой книге, охватывает все стороны человеческой культуры.

Глава 4. Моделирование тел, заполняющих пространство с помощью движений

Моделирование – исследование каких – либо явлений, процессов или систем объектов путем построения и изучения их моделей; использование моделей для определения или уточнения характеристик и рационализации способов построения вновь конструируемых объектов. Моделирование – одна из основных категорий теории познания: на идее моделирования по существу базируется любой метод научно исследования – как теоретической (при котором используются различного рода знаковые, абстрактные модели), так и экспериментальный (использующий предметные подели).

Геометрическое моделирование – это методическое моделирование геометрическими методами.

Геометрическое моделирование отличается от начертательной геометрии тем, что изображение здесь рассматривается не как фигура на плоскости изображений, подобная параллельной проекции оригинала, а как интерпретация (модель) оригинала на плоской модели пространства. Другими словами, в геометрическом моделировании модель есть оригинал. Такой подход к понятию изображения имеет большие методические преимущества. Во – первых, все методы изображений (проекционный чертеж, метод Монжа и различные аксонометрии) объединяются в один – проекционную модель пространства, что значительно облегчает их изучение. Во – вторых, позволяет инвариантно (независимо от выбора аксонометрического репера иди другой геометрической конструкции) изучать сами изображения. В – третьих, освобождает от формализма, связанного с понятием полноты и метрической определенности изображения. Наконец, в – четвертых, делает терминологию более простой, так как модель и является оригиналом.

Моделирование или построение моделей многогранников осуществляется например, с помощью разверток.

Развертки выпуклого многогранника

Развертка – совокупность конечного числа многоугольников с указанным правилом склеивания их сторон или отрезков сторон. При этом склеивание двух отрезков означает установление между их точками соответствия, сохраняющего расстояния (соответствующие части отрезков имеют равные длины), и сопоставляемые точки считаются за одну точку развертки.

Правила черчении:

1. Сначала необходимо выделить особенности развертки, которую нужно начертить, то есть определить, из каких фигур она состоит.
2. Вторым шагом нужно сделать для каждой фигуры шаблон из плотной бумаги (картона).
3. Из шаблонов составить развертку, а затем аккуратно обвести карандашом. Так же необходимо сделать клапаны для склеивания.

Правила склеивания:

1. Некоторые стороны многоугольников разделены на отрезки, которые объявлены сторонами, а их концы – вершинами.
2. Каждая сторона склеивается, самое большее, с одной стороной другого того же самого многоугольника.
3. От каждого многоугольника можно перейти к любому другому через их склеенные стороны.

Для того, чтобы из развертки можно было склеить замкнутый выпуклый многогранник, должны выполняться следующие необходимые условия:

Условие замкнутости

Развертка не должна иметь края, то есть каждая сторона каждого многоугольника склеивается с какой – либо стороной.

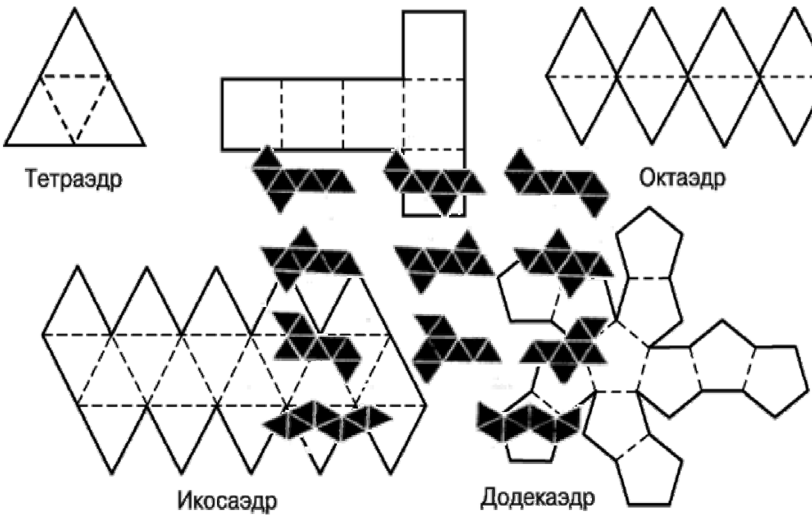
Условие выпуклости

Сумма углов, сходящихся в одной вершине, не более 360^0 ни для одной вершины.

Основные этапы работы

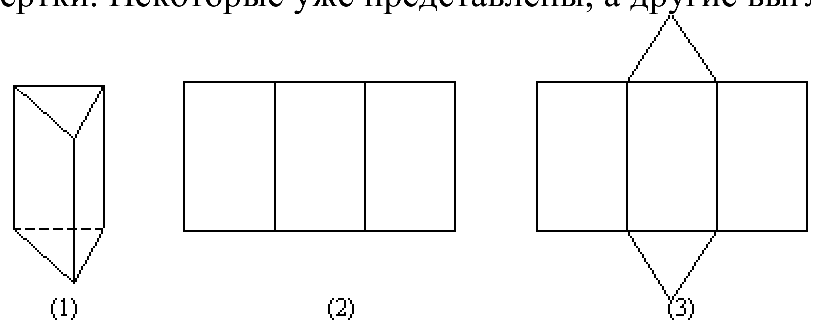
- Начертить развертку многогранника (с клапанами для склеивания)
- Вырезать развертку
- Согнуть по линиям сгиба
- Склеить
- Произвести окантовку ребер или окрашивание граней, наклейку на грани многогранника тонкой бумагой и так далее.

Развертки правильных многоугольников



Причем для каждого многогранника существует немало комбинаций разверток. Так, например, у октаэдра их больше десяти видов.

При моделировании многогранников, заполняющих пространство, пришлось выполнить развертки. Некоторые уже представлены, а другие выглядят так:



Развертка прямой треугольной призмы

Глава 5. Тела, заполняющие пространство с помощью движений

Обобщим понятие тел Федорова – рассмотрим тела, заполняющие пространство с помощью движений. Проведем с помощью геометрического моделирования следующие опыты: попробуем заполнить пространство телами: прямой треугольной призмой, октаэдром, тетраэдром, прямым параллелепипедом.

Попытка геометрического моделирования

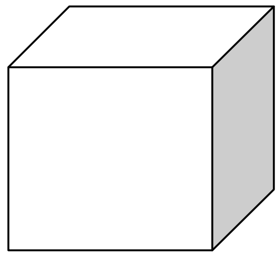
Опыт 1

Выполним развертки октаэдра. Из них изготовим несколько моделей октаэдра. Различные способы их совмещения показали, что из них нельзя заложить пространства.

Опыт 2

Выполним развертки прямого параллелепипеда. Из них изготовим несколько моделей. Различные способы их совмещения показали, что из них можно заполнить пространство.

Результаты опыта позволяют сформулировать теорему.

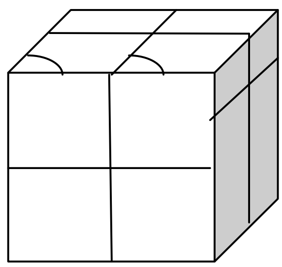


Теорема:

Прямой параллелепипед заполняет пространство. Выполним заполнение пространства с помощью паркетов, которые будем выкладывать слоями.

Доказательство:

Пусть дан прямой параллелепипед. Выполним его параллельный перенос вдоль трех его ребер, исходящих из одной вершины. Заполнение «в высоту» очевидно, так как боковые ребра перпендикулярны плоскости основания.



Заполнение «в длину» и «в ширину» осуществляется за счет того, что противолежащие стороны параллелограмма, а именно он является основанием прямого параллелепипеда, параллельны, а значит соответственные углы, образующиеся этими сторонами, равны.

Таким образом, пространство будет заполнено прямыми параллелепипедами.

Опыт 3

Попробуем моделями равных треугольных призм заполнить пространство. Различные способы совмещения моделей показали, что ими можно заполнить пространство.

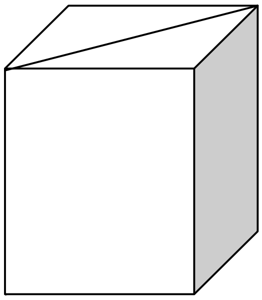
Теорема:

Прямая треугольная призма заполняет пространство.

Доказательство:

Используем результат предыдущей теоремы. Если провести через диагональ основания прямого параллелепипеда перпендикулярно ему, то он разделится на две равнее прямые треугольные призмы. Одна из другой получится с помощью осевой симметрии относительно прямой, проходящей через середины соответствующих ребер, лежащих в разных основаниях.

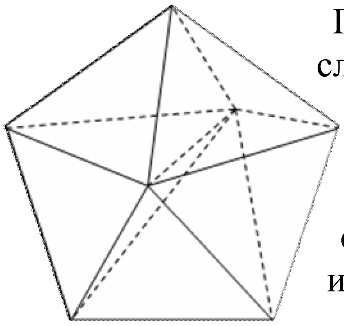
Таким образом, прямая треугольная призма заполняет пространство с помощью параллельного переноса и осевой симметрии.



Опыт 4

Попробуем моделями равных тетраэдров заполнить пространство. Допустим, что ими можно заполнить пространство.

Гипотеза: Тетраэдр заполняет пространство.

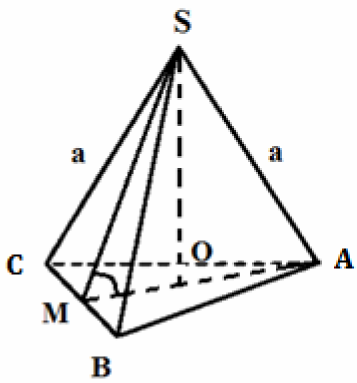


Проверим эту гипотезу. Попробуем сложить тетраэдры следующим образом (как показано на рисунке).

Чтобы это заполнение имело место, необходимо доказать, что сечение тетраэдра, проходящее через боковое ребро и высоту, имеет угол 72°, так как это пятая часть от полного угла.

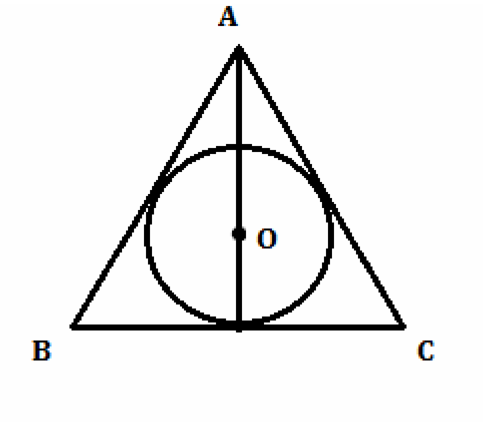
Рассмотрим правильный тетраэдр. Все ребра в правильном тетраэдре равны – а. Высота – SO.

На боковой грани тетраэдра проведем апофему SM, которая будет являться высотой в треугольнике CSB, а т.к. этот треугольник правильный (правильный тетраэдр), то SM является биссектрисой медианой.



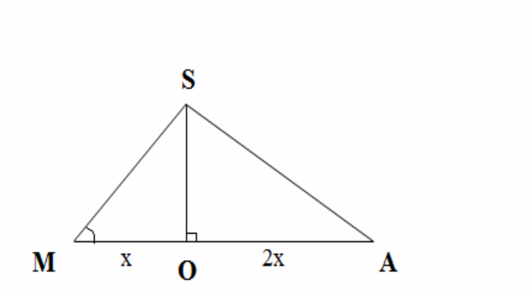
Рассмотрим треугольник SMC. По теореме Пифагора найдем SM:

грани тетраэдра – равносторонние треугольники, то высота SM и AM равны.



□*32*

O – центр вписанной и описанной окружности в треугольнике ABC.



Рассмотрим треугольник SMA. Обозначим отрезок OM
за x, тогда OA – 2x.

Обозначим угол SMO через

, тогда

72°≠70°30□
Отсюда следует, что таким образом заполнить пространство невозможно..

Заключение

Первоначально геометрия носила чисто практический характер в силу необходимости решения задач реальной действительности. Окружающие людей тела имели, как правило, форму многогранников. Поэтому особенное развитие имела теория многогранников.

Также актуальным вопросом во все времена была симметричность фигур, в том числе и многогранников. Это обусловлено симметричностью окружающего нас мира. Данное исследование посвящено этим двум вопросам, а точнее общей их части.

В ходе работы изучались многогранники, заполняющие пространство. Была поставлена задача расширить понятие параллелоэдров за счет рассмотрения других видов движений многогранников кроме параллельного переноса. Параллелоэдры – это выпуклые многогранники, параллельным перенесением которых можно заполнить пространство так, чтобы многогранники не входили друг в друга и не оставляли пустот между собой. Заложить пространство параллелоэдрами можно только с помощью параллельного переноса. В данном исследовании сделана попытка расширить круг движений, кроме параллельного переноса, за счет рассмотрения других его видов: осевой симметрии, поворота.

Прообразом таких преобразований в пространстве являются подобные преобразования на плоскости, с помощью которых получаются паркеты. Паркетами являются множество многоугольников, покрывающих плоскость без просветов и двойных покрытий. Поэтому сначала были рассмотрены способы построения паркетов. Было выяснено, какие многоугольники могут входить в состав паркета и доказана теорема о том, что паркет может состоять либо из правильных треугольников, либо из квадратов, либо из правильных шестиугольников.

Следующий вопрос исследования – выпуклые многогранники, заполняющие пространство с помощью параллельного переноса. Такими являются тела Федорова или параллелоэдры. Таких многогранников существует ровно пять. Это куб, ромбический додекаэдр, гексагональная призма, кубооктаэдр, правильная шестиугольная призма.

Для изучения тел, заполняющих пространство с помощью движений мы прибегли к практике. С помощью геометрического моделирования многогранников была сделана попытка заполнить пространство. Результаты тех опытов, которые увенчались успехом, были оформлены в виде доказательства теорем. В первую очередь были испытаны правильные многогранники. На практике мы убедились, что можно с помощью движений заложить пространство из таких тел, как прямая треугольная призма, куб, прямой параллелепипед.

Таким образом, мы пришли к выводу, что названные выше тела заполняют пространство. Данное утверждение было доказано.

Полученный результат позволяет расширить класс многогранников, заполняющих пространство с помощью параллельного переноса, на класс, заполняющих пространство с помощью различных видов движений, а не только параллельного переноса.

Список используемой литературы

1. Баврин И.И., Садчиков В.А. Новые задачи по стереометрии. Фигуры вращения правильных многогранников – М.: Владос, 2000
2. Колмогоров А.Н. Паркеты из правильных многоугольников. Журнал «Квант» №3, 1970
3. Костицын В.Н. Моделирование на уроках геометрии - М.: Владос, 2000
4. Смирнова И.М. В мире многогранников – М.: Просвещение, 1995
5. Совертков П.И., Слива М.В., Хохлов Д.Н. Геометрический паркет на экране компьютера. Журнал «Информатика и образование», 1999 – 2002
6. Тарасов Л.В. Этот удивительно симметричный мир – М.: Просвещение, 1982