Краевой конкурс творческих работ учащихся

«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Математическое моделирование

Моделирование всплытия подводной лодки

Анферов Егор Павлович,

11, МБОУ «Лицей №1» г. Перми,

Шабрыкина Наталья Сергеевна,

доцент ПНИПУ, к.ф.-м. н.

Пермь. 2012.

Введение

Развитие военной техники сейчас идет очень быстро, и времени на проведения экспериментов в натуральную величину совсем нет, для этих целей существуют компьютерные модели, с помощью которых легко можно определить поведение объекта, при известных начальных условиях. Сейчас основное вооружение подводных сил военно-морского флота многих государств мира является подводная лодка, но, вместе с тем, это еще и очень опасное вооружение для экипажа подлодки. Существует множество примеров, в которых подлодки тонули и в мирное время, в нашей истории – это атомная подводная лодка «Курск». Для того чтобы предостеречь экипаж, необходимо знать траекторию движения подводной лодки, ее координаты в конкретный момент времени.

Целью работы было смоделировать всплытие подводной лодки. В работе будут составлены дифференциальные уравнения, описывающие траекторию движения подлодки, построены графики зависимости глубины от горизонтального расстояния, глубины от времени и горизонтального перемещиния подлодки от времени.

Концептуальная постановка задачи

Система, которую мы моделируем, будет подводная лодка размеры и масса, которой заранее известны. Она находится на некоторой глубине, которая также известна. Основные параметры, от которых будет зависеть траектория движения, это:

- начальная скорость,
- сила сопротивления воды,
- плотность лодки.

Допущения, которые будут использованы в решении задачи, это:

- постоянная сила тяжести,
- время, за которое цистерны подводной лодки освобождаются от воды и заполняются воздухом, считается пренебрежимо малым,
- сила сопротивления воды пропорциональна скорости движения лодки,
- жидкость несжимаема.

Математическая постановка задачи

Используя вышеописанные допущения, запишем второй закон Ньютона в векторном виде.

$$\vec{F}_{\text{спр}} + \vec{F}_{арх} + m\vec{g} = m\vec{a}, \tag{1}$$

где $\vec{F}_{спр}$ - сила сопротивления воды, $\vec{F}_{арх}$ - сила Архимеда, m - масса лодки, $\vec{a}$ - полное ускорение лодки.

Спроецируем на оси координат уравниние (1):

$$F_{\text{спр x}} = ma_x, \tag{2}$$

$$F_{\text{спр y}} + F_{арху} - mg_y = ma_y, \tag{3}$$

где $F_{арх} = \rho_{ж} V_{л} \mathrm{g}$ - выталкивающая сила(Архимеда), $F_{спр} = -kv$ - сила сопротивления, где v скорость лодки, k коэффициент сопротивления.

Из уравнений (2) и (3), учитывая зависимости скорости от координаты, получаем следующие дифференциальные уравнения уравнения:

$$k\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}, \tag{4}$$

$$\rho_{ж} V_{л} g - k\frac{dy}{dt} - mg = m\frac{d^2y}{dt^2}, \tag{5}$$

Решим данные уравнения, используя начальные условия. Проэкция скорости на ось y в начальный момент времени равна 0, прэкция скорости на ось x в начальный момент времени равна v_x, прэкции координаты на ось x и y в начальный момент времени соответственно равны x_0 и y_0.

$$\frac{dy}{dt}\Big|_{t=o} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = v_x, \tag{7}$$

$$x(0) = x_0, \tag{8}$$

$$y(0) = y_0. \tag{9}$$

Решение и результаты решения

Решение уравнений (4) и (5) с начальными условиями (6)-(9) было получено аналитически в математическом пакете Maple. Решение здесь не приводится, так как оно слишком большое. Текст программы приведен в приложении.

Из этих уравнений было выражено $x(t)$ и $y(t)$. С помощью полученных уравнений, был построен график, показывающий траекторию движения лодки (рис. 1). Параметры данной тректории движения подлодки: m=155000, g=9.8, V=10000, k=5, H=300, ρ=1000, v=100.

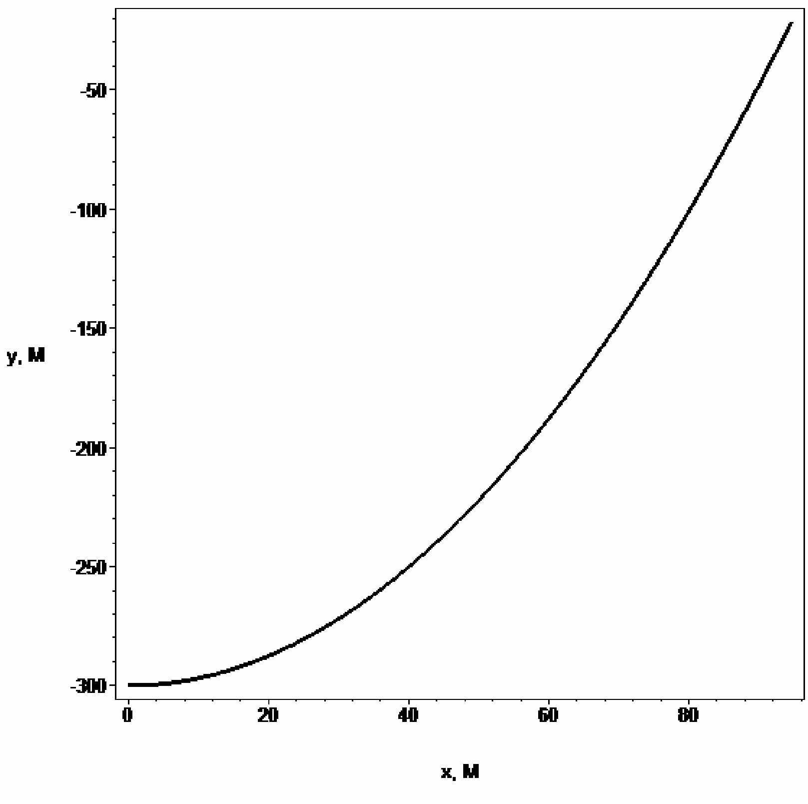

Рис. 1. Траектория движения *подводной лодки*

Из графика видно, что лодка всплывает по параболической траектории.

Также были построены графики зависимости глубины от времени (рис.2) и график зависимости горизонтального движения лодки относительно времени (рис.3).

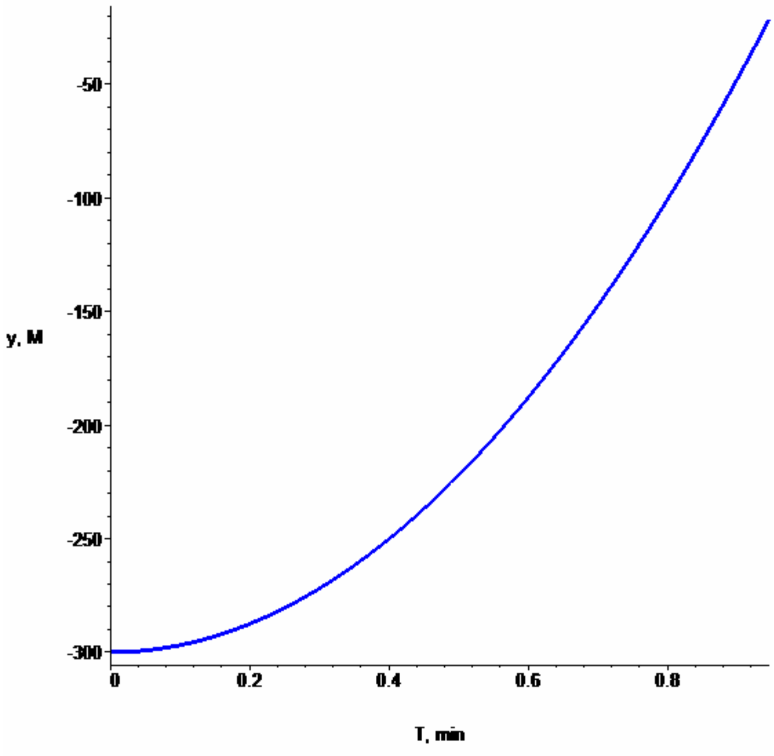

Рис.2. Зависимость глубины от времени

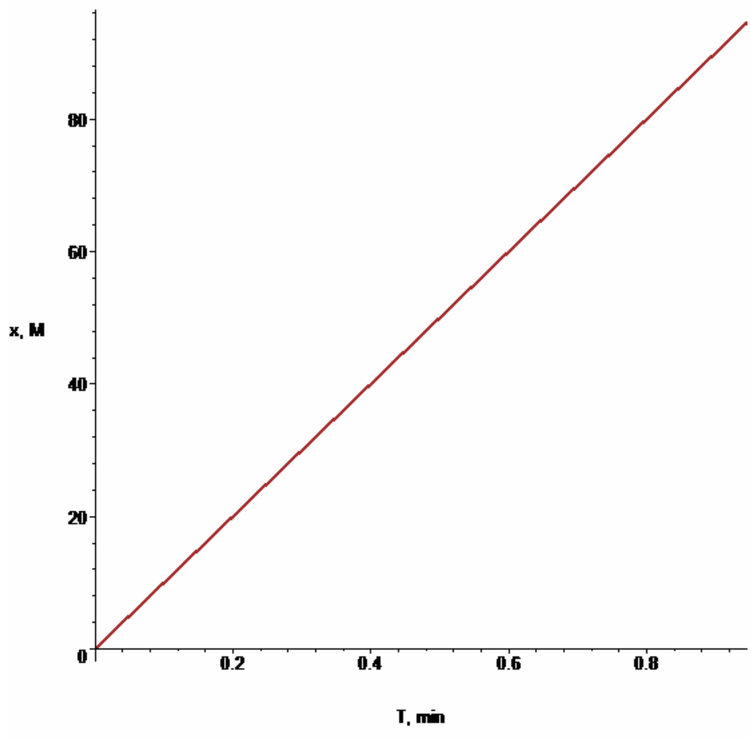

Рис.3.Зависимость горизонтального перемещения от времени

Было произведено изменение массы лодки с 155000кг на 50000кг и было замечено, что лодка всплывет уже через 5.57386 минуты. (Рис.4). Если изменить объем с 10000м^3 на 5000м^3, то лодка будет всплывать медленнее, за 13.9307 минуты.

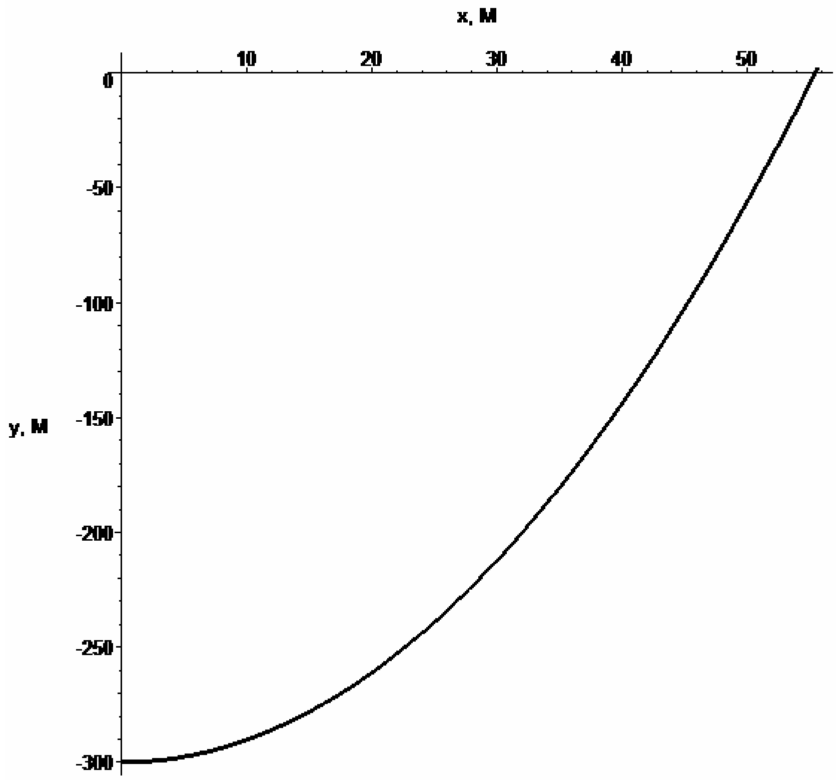

Рис.4.Траектория движения подлодки при m=50000

Также программа выводит время всплытия подводной лодки, которое было посчитано при помощи математического пакета. Программа считает время, когда проэкция координаты на ось равна нулю:

$$t_y(0) = tp \qquad (10)$$

Заключение

В этой работе была построена математическая модель всплытия подводной лодки. Составлены дифференциальные уравнения, описывающие изменения координат от времени. С их помощью получена траектория движения подлодки и время всплытия, проанализирована зависимость результатов от начальных условий, лодка всегда будет двигаться по параболе.

Приложение

Текст программы:

```
> restart;
m:=1000;g:=9.8;V:=5;k:=3;H:=300;pv:=1000;Vx:=20;m:=1000;Lx:=60
;
> eq(x):=-k*diff(x(t),t)=m*diff(x(t),`$`(t,2));
> eq(y):=pv*V*g-k*diff(y(t),t)-m*g=m*diff(diff(y(t),t),t);
> x1(t):=dsolve({eq(x),x(0)=0,D(x)(0)=Vx},x(t));
> y1(t):=dsolve({eq(y),y(0)=-H,D(y)(0)=0},y(t));
> with(plots):
> y:=subs(y1(t),y(t));
> graf(y):=eval(y);
> x:=subs(x1(t),x(t));
> graf(x):=eval(x);
> sol1:=solve({y=0,t>0},t);
tp:=evalf(eval(t,sol1));
> plot(graf(y),t=0..tp,color=blue,thickness=3,labels=["T,
C","y, M"]);
>plot(graf(x),t=0..tp,color=brown,thickness=3,labels=["T,
C","x, M"]);
>plot([graf(x),graf(y),t=0..tp],color=black,thickness=3,labels=
["x, M","y, M"]);
```