Краевой конкурс творческих работ учащихся

«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Математическое моделирование

Нелинейная математическая модель спроса-предложения

Фарберов Александр Сергеевич,

11 кл., МБОУ «Лицей №1» г. Перми,

Волегов Павел Сергеевич,

доцент ПНИПУ, к.ф.-м. н.

Пермь. 2012.

Оглавление

Введение

Спрос - это зависимость между ценой и количеством товара, которое покупатели могут и желают купить по строго определенной цене, в определенный промежуток времени.

Предложение - понятие, отражающее поведение товаропроизводителя на рынке, его готовность произвести (предложить) какое-либо количество товара за определённый период времени при определённых условиях.

Спрос и предложение зависят друг от друга, поэтому предугадать их очень сложно, но можно рассчитать.

Цель работы, задачи

В настоящее время математическое моделирование все настойчивее вторгается в область экономики. Возможность использования математического моделирования связана с существованием устойчивых тенденций, которые характеризуют многие экономические процессы.

Значение моделирования как метода исследований определяется тем, что модель представляет собой концептуальный инструмент, ориентированный на анализ изучаемых процессов и их прогнозирование.

Необходимость освоения математического моделирования экономических процессов как метода анализа не ограничивается чисто практическими потребностями: владение этим методом способствует формированию нелинейного мышления. Таким образом, помимо решения сугубо практических задач использование этого метода имеет большое мировоззренческое значение.

Целью моей исследовательской работы является изложение и анализ базовых моделей экономических процессов.

Глава 1. Линейная модель спроса-предложения

В данной главе мы рассмотрим линейную модель спроса-предложения [1]. То есть спрос и предложение зависят от цены линейно.

Содержательная постановка задачи

Производитель каждый год делает товар на продажу. Товар он не хранит больше года. Решение о том, сколько товара производить, принимается с учетом цен предыдущего года. Причем если цены были высокие — в этом году надо выпускать товара больше, а если низкие — меньше. Спрос на товар в течение года зависит от его цены в момент продажи. Когда цена растет, спрос падает.

Необходимо описать поведение цен в ближайшие годы как функцию от первоначальной цены.

Концептуальная постановка задачи

В качестве параметров модели используем следующие:

- p_n – цена за единицу товара в n-й год;
- s_n – предложение (объем поставок) товара в n-й год;
- d_n – спрос на товар в n-й год.

Построение модели будем вести при следующих предпосылках:

- Объектом исследования является зависимость цены p_n на товар от ее первоначальной цены p_0.
- Предположим, что предложение s_{n+1} будущего года зависит линейно от цены p_n в этом году, причем, чем выше p_n, тем больше s_{n+1}:

$$s_{n+1} = a\,p_n - b,$$

где a и b – положительные константы, неизменные на протяжении всего анализируемого периода времени. Очевидно, что цена на товар не должна быть меньше некоторой минимальной величины, покрывающей затраты на ее производство, лишь в этом случае величина предложения s_{n+1} будет больше нуля.

- Предположим, что спрос будущего года d_{n+1} зависит линейно от цены p_{n+1} в том же году, причем, чем выше цена p_{n+1}, тем меньше спрос d_{n+1}:

$$d_{n+1} = -cp_{n+1} + g,$$

где c и g – положительные константы, неизменные на протяжении всего анализируемого периода времени. Очевидно, что самый большой спрос на товар должен существовать при $p_{n+1}=0$.

- Предположим, что рыночная цена p_{n+1} определяется равновесием между спросом d_{n+1} и предложением s_{n+1}.

Требуется описать поведение цен p_1, p_2, p_3, ... в зависимости от значения цены p_0.

Математическая постановка задачи

Считая значение p_0 заданным, найти последовательность значений p_1, p_2, p_3,..., удовлетворяющих следующей системе уравнений:

$$s_{n+1} = ap_n - b, \quad (1.1)$$

$$d_{n+1} = -cp_{n+1} + g, \quad (1.2)$$

$$s_{n+1} = d_{n+1} \quad (1.3)$$

где a, b, c, g — положительные вещественные числа, причем отношения b/a и g/c характеризует, соответственно, минимально и максимально допустимые цены, а величина g – максимально возможный спрос (рис. 1).

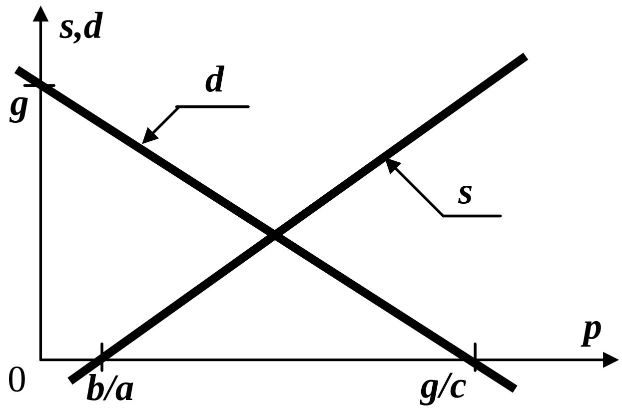

Рис. 1

Методика решения задачи

Подставляя в уравнение (1.3) уравнения (1.1) и (1.2), а также делая подстановки:

$$\boldsymbol{A = a/c>0, \quad B= (b/c + g/c) >0,}$$

получили уравнение:

$$\boldsymbol{p_{n+1} = -Ap_n + B.} \tag{1.4}$$

Уравнение (1.4) представляет линейное рекуррентное соотношение, которое позволяет построить последовательность интересующих нас решений $\boldsymbol{p_1, p_2, p_3}$, ... Перепишем (1.4) в виде

$$\boldsymbol{p_{n+1} + Ap_n = B.} \tag{1.5}$$

Так как нас интересует функциональная зависимость $\boldsymbol{p_n(p_0)}$, рассмотрим следующую схему решения. Будем искать *n*-ое решение в виде суммы решения однородного уравнения

$$\boldsymbol{p_{n+1} + Ap_n = 0} \tag{1.6}$$

и частного решения уравнения (1.5).

Решение однородного уравнения: $\boldsymbol{p_{n+1} = - A \cdot p_n}$

Предположим, что $\boldsymbol{p_0 = C}$. Тогда

$$\boldsymbol{p_1 = C\cdot (- A)}; \qquad \boldsymbol{p_2 = C\cdot (- A)^2}; \qquad \boldsymbol{p_3 = C\cdot (- A)^3}; \qquad \ldots$$

или в общем случае $\boldsymbol{p_n= C\cdot (- A)^n}$.

Частное решение неоднородного уравнения:

Исходя из вида правой части (1.5), решение будем искать в виде константы $p_n = D$ для всех n. Подставим в (1.5), получим $D + AD = B$ или $D = B/(A+1)$. Следовательно, общее решение (1.5) имеет вид

$$p_n = C\,(-A)^n + B/(A+1). \tag{1.7}$$

Из (7) при $n=0$ получим

$$C = p_0 - B/(A+1). \tag{1.8}$$

Подставим (8) в (7) и окончательно получим решение задачи в виде:

$$p_n = p_0\,(-A)^n + [B/(A+1)]\,[1 - (-A)^n] \tag{1.9}$$

Анализ результатов

По условию $A>0$. Из рассмотрения соотношения (1.9) можно выделить три характерные области значений A:

1) При $0<A<1$ рынок получается сбалансированным (цена p_n стремится к $B/(A+1)$)[Рис. 2].
2) При $A=1$ рынок получается неустойчивым (идет периодическое снижение и повышение цены)[Рис. 3].
3) При $A>1$ рынок получается полностью нестабильным (коллапс) (с возрастанием n растет амплитуда колебаний p_n)[Рис. 4].

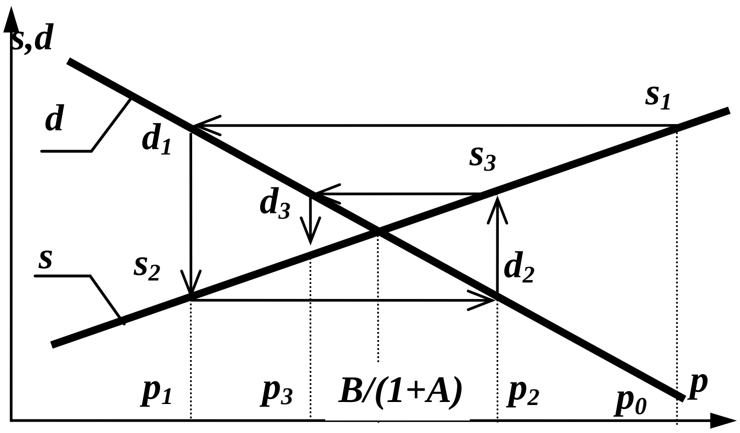

Рис. 2

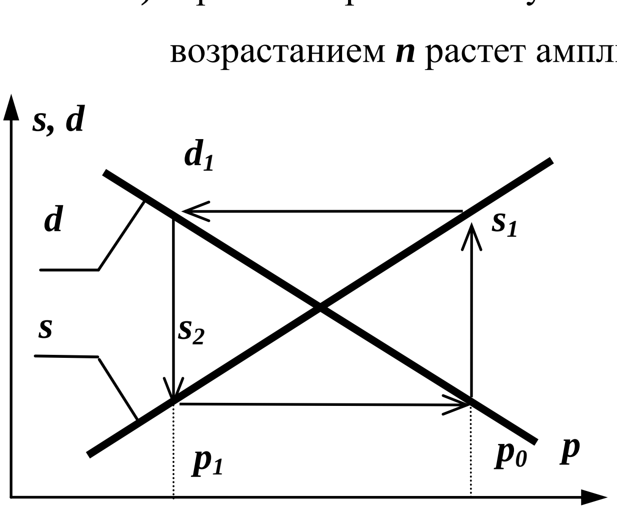

Рис. 3

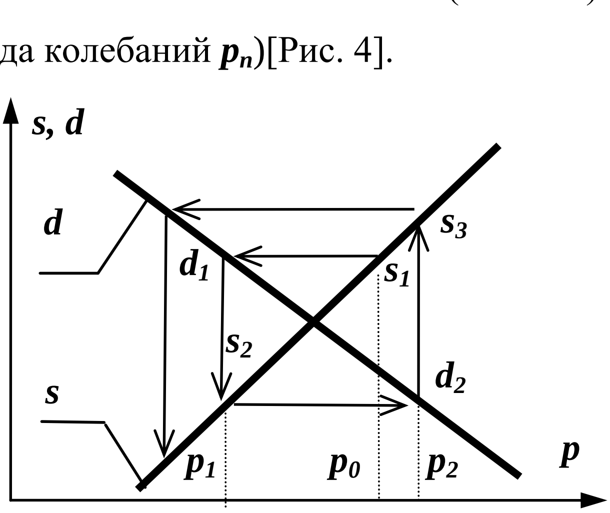

Рис. 4

Однако рынок устроен гораздо сложнее, и для него нужно придумать другую модель. Нужно учесть, что предложение не может расти вечно, так как продукцию невозможно создавать бесконечно много, спрос и предложение в какой-то момент острее реагируют на изменение цены

Глава 2. Нелинейная модель спроса-предложения

В данной главе мы рассмотрим нелинейную модель спроса-предложения. То есть спрос и предложение зависят от цены как более сложные функции, чем линейная.

Содержательная постановка задачи

Производитель каждый год делает товар на продажу. Товар он не хранит больше года. Решение о том, сколько товара производить, принимается с учетом цен предыдущего года. Причем если цены были высокие — в этом году надо выпускать товара больше, а если низкие — меньше. Спрос на товар в течение года зависит от его цены в момент продажи. Когда цена растет, спрос падает.

Необходимо описать поведение цен в ближайшие годы как функцию от первоначальной цены.

Концептуальная постановка задачи

В качестве параметров модели используем параметры из главы 1 за исключением следующих:

- Предположим, что предложение s_{n+1} будущего года зависит как степенная функция от цены p_n в этом году, причем, чем выше p_n, тем больше s_{n+1}:

$$s_{n+1} = a\, p_n^{m} - b,$$

где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – положительные константы, а $\boldsymbol{m}$ – принадлежит от 0 до 1, неизменные на протяжении всего анализируемого периода времени.

- Предположим, что спрос будущего года $\boldsymbol{d_{n+1}}$ зависит как экспонента от цены $\boldsymbol{p_{n+1}}$ в том же году, причем, чем выше цена $\boldsymbol{p_{n+1}}$, тем меньше спрос $\boldsymbol{d_{n+1}}$:

$$d_{n+1} = g\ exp(-cp_{n+1}),$$

где $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{g}$ – положительные константы, неизменные на протяжении всего анализируемого периода времени.

Математическая постановка задачи

Считая значение $\boldsymbol{p_0}$ заданным, найти последовательность значений $\boldsymbol{p_1, p_2, p_3}$,..., удовлетворяющих следующей системе уравнений:

$$s_{n+1} = ap_n^m - b, \tag{2.1}$$

$$d_{n+1} = g\ exp(-cp_{n+1}), \tag{2.2}$$

$$s_{n+1} = d_{n+1}, \tag{2.3}$$

□□/□ – минимальная цена, а $\boldsymbol{g}$ – максимально возможный спрос. [Рис. 5]

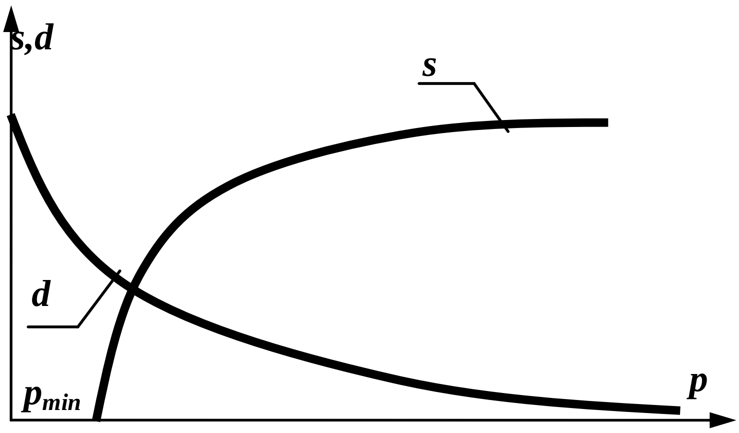

Рис. 5

Решение задачи

Подставляя в уравнение (2.3) уравнения (2.1) и (2.2) мы получим:

$$ap_n^m - b = g\ exp(-cp_{n+1}) \tag{2.4}$$

Преобразуя и введя новые константы:

$$A=a/g>0,\ B=b/g>0 \text{ и } C=c^{-1}<0$$

мы получаем:

$$p_{n+1}=C\ ln(Ap_n^m-B). \tag{2.5}$$

Так как уравнение (2.5) не имеет аналитического решения, то мы используем прямое моделирование. Для этого разработаем алгоритм на языке Lazarus, что позволит нам определить последовательность цен. Скриншот рабочего окна программы приведен на рис. 6.

Анализ результатов

Определённо, что коэффициент ***g*** должен быть больше коэффициентов ***a, b, c,***причём ***A, B*** ~ 10^{-2}, и ***C*** ~ ***g***. Так же было обнаружено, что при коэффициентах ***a, b, g*** больше 10^4 модель не работает. Следует заметить, что период расчета цен не должен быть слишком большим, так как на протяжении большого времени коэффициенты могут поменяться.

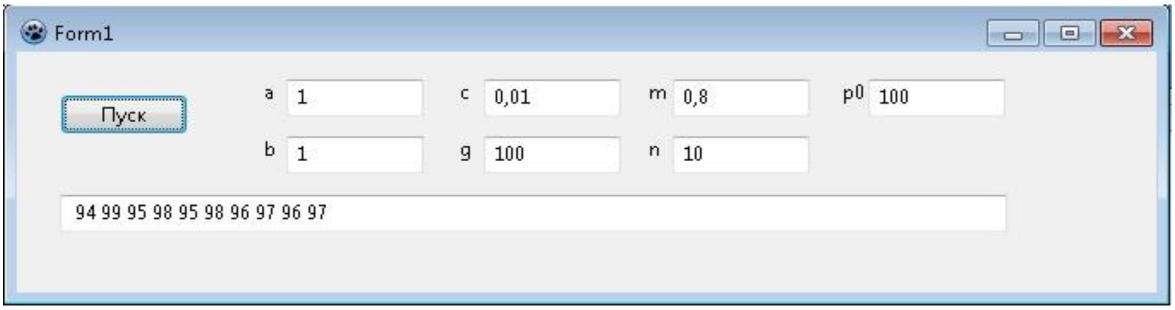

Рис. 6.

Заключение

В данной работе рассмотрена задача построения математической модели спроса-предложения. Были исследованы две модели: линейная и нелинейная. Были получены результаты анализа коэффициентов. Тем самым получены готовые для использования формулы роста-падения цен.

Список литературы

1. Введение в математическое моделирование. Учебное пособие. Под ред. П. В. Трусова.