Краевой конкурс творческих работ учащихся

«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Прикладные вопросы математики

Математические модели в экономике

Гребенников Роман Александрович,

11 кл., МАОУ «Лицей №10», г. Перми

Золотухина Лариса Викторовна,

учитель математики МАОУ «Лицей №10»

Пермь. 2012.

Содержание

Введение

Математика неразрывно связана с другими науками. Она является аппаратом, с помощью которого можно исследовать, анализировать и решать задачи. Строить математические модели мы можем при решении различных задач физики, химии, экономики и т. д. Целью моей работы было рассмотреть примеры экономических задач с помощью математического аппарата. Основными задачами являлись построение математических моделей разного типа задач. В ходе работы я хотел бы увидеть применение математики в науке экономике. В задачах я попытался опираться на различные математические функции. Работа состоит из двух частей. В первой части рассматриваются теоретические вопросы о математических моделях в экономике. Во второй части показываю примеры – различные типы задач.

1. Экономико-математическая модель

Экономико-математическая модель – это выраженная в формально-математических терминах экономическая абстракция, логическая структура которой определяется как объективными свойствами предметами описания, так и субъективным целевым фактором исследования, для которого это описание предпринимается.

Процесс построения моделей называют моделированием. Очень важным является вопрос о возможности применения данной модели. Этот вопрос решается путем сравнения модели с оригиналом. Если это сравнение дает положительные результаты то модель используется. Если нет, создается новая модель.

Модели делятся на материальные и идеальные. Пример материальной модели - макет здания, фотография и т.д. Идеальные модели чаще имеют знаковую форму. Математическое моделирование относят к знаковому моделированию.

Из истории математического моделирования

Моделирование в научных исследованиях стало применяться еще в глубокой древности и постепенно захватывало все новые области научных знаний: техническое конструирование, строительство и архитектуру, астрономию, химию, биологию и, наконец, общественные науки. Большие успехи и признание практически во всех отраслях современной науки принес методу моделирования XX век. Однако методология моделирования долгое время развивалось независимо отдельными науками. Отсутствовала единая система понятий, единая терминология. Лишь постепенно стала осознаваться роль моделирования как универсального метода научного познания.

Термин «модель» в наше время широко используется в различных сферах человеческой деятельности и имеет множество смысловых значений. Главным свойством модели является – инструмент получения новых знаний. Модель – это такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе исследования замещает объект-оригинал так, что его непосредственное изучение дает новые знания об объекте-оригинале.

Под моделированием понимается процесс построения, изучения и применения моделей. Данное понятие тесно связано с такими категориями, как абстракция, аналогия, гипотеза и др. Процесс моделирования обязательно включает и построение абстракций, умозаключений по аналогии, и конструирование научных гипотез. Главная особенность моделирования в том, что это метод опосредственного познания с помощью объектов-заместителей. Модель выступает как своеобразный инструмент познания, который исследователь ставит между собой и объектом и с помощью которого изучает интересующий его объект. Именно эта особенность метода моделирования определяет специфические формы использования абстракций, аналогий, гипотез, других категорий и методов познания.

Необходимость использования метода моделирования определяется тем, что многие объекты мы не можем непосредственно исследовать или на это исследование уйдет большое количество времени.

Процесс моделирования включат в себя три элемента:

1. субъект (исследователь)
2. объект исследования
3. модель, опосредствующая отношение познающего субъекта и познаваемого объекта.

Пусть имеется некоторый объект А. Мы конструируем или находим в обыденной жизни другой объект В – модель объекта А. Этап построения модели предполагает наличие некоторых знаний об объекте оригинале. Познавательные возможности модели обуславливаются тем, что модель отражает какие-либо существенные черты объекта-оригинала. Вопрос о необходимости и достаточной мере сходства оригинала и модели требует конкретного анализа. Очевидно, модель утрачивает свой смысл как в случае тождества с оригиналом (тогда она перестает быть оригиналом), так и в случае чрезмерного во всех существенных отношениях отличия от оригинала.

Таким образом, изучение одних сторон моделируемого объекта осуществляется ценой отказа от отражения других сторон. Поэтому любая модель замещает оригинал лишь в строго ограниченном смысле. Из этого следует, что для одного объекта может быть построено несколько «специализированных» моделей, концентрирующих внимание на определенных сторонах исследуемого объекта или же характеризующих объект с разной степенью детализации. На втором этапе процесса моделирования модель выступает как самостоятельный объект исследования. Одной из форм такого исследования является проведение «модельных» экспериментов, при которых сознательно изменяются условия функционирования модели и систематизируются данные о ее «поведении». Конечным результатом этого этапа является множество знаний о модели. На третьем этапе осуществляется перенос знаний с модели на оригинал – формирование множества знаний об объекте. Этот процесс переноса знаний проводится по определенным правилам. Знания о модели должны быть с учетом тех свойств объекта-оригинала, которые не нашли отражения или были изменены при построении модели. Мы можем с достаточным основанием переносит какой-либо результат с модели оригинала, если этот результат необходимо связан с признаками сходства оригинала и модели. Если же определенный результат модельного исследования связан с отличием модели от оригинала, то этот результат переносить неравномерно. Четвертый этап – практическая проверка получаемых с помощью моделей знаний и их использование для построения обобщающих знаний об объекте, его преобразования или управления им.

Для понимания сущности моделирования важно не упускать из виду, что моделирование – не единственный источник знаний об объекте. Процесс моделирования «погружен» в более общий процесс познания.

Это обстоятельство учитывается не только на этапе построения модели, но и на завершающей стадии, когда происходит объединение и обобщение результатов исследования, получаемых на основе многообразных средств познания.

Моделирование – циклический процесс. Это означает, что за первым четырехэтапным циклом может проследовать второй, третий и т. д. При этом знание об исследуемом объекте расширяются и уточняются, а исходная модель совершенствуется. Недостатки, обнаруженные после первого цикла моделирования, обусловленные малым знанием объекта и ошибками в построении модели, можно исправить в последующих циклах. Таким образом, мы можем расширять и углублять наше познание об объекте.

Порядок построения экономико-математической модели

Для построения экономико-математической модели нужно:

1.) Определить объект исследование.
2.) Сформулировать цель исследования
3.) Постановка экономической проблемы
4.) Выделение наиболее важных качеств, свойств и параметров.
5.) Введение обозначений
6.) Составление системы ограничений и условий.

Затем проводятся расчеты по модели, анализ полученных результатов.

2. Применение экономико-математических моделей

2.1. Задачи линейного программирования

В настоящее время линейное программирование является одним из наиболее употребительных аппаратов математической теории оптимального принятия решений. Для решения задач линейного программирования разработано сложное программное обеспечение, дающее возможность эффективно и надежно решать практические задачи больших объемов.

Владение аппаратом линейного программирования необходимо каждому специалисту в области прикладной математики.

Линейное программирование – это наука о методах исследования и отыскания наибольших и наименьших значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения. Таким образом, задачи линейного программирования относятся к задачам на условный экстремум функции. По типу решаемых задач методы разделяются на универсальные и специальные. С помощью универсальных методов могут решаться любые задачи линейного программирования (ЗЛП). Специальные методы учитывают особенности модели задачи, ее целевой функции и системы ограничений.

Особенностью задач линейного программирования является то, что экстремума целевая функция достигает на границе области допустимых решений. Классические же методы дифференциального исчисления связаны с нахождением экстремумов функции во внутренней точке области допустимых значений. Отсюда — необходимость разработки новых методов.

Линейное программирование представляет собой наиболее часто используемый метод оптимизации. К числу задач линейного программирования можно отнести задачи:

рационального использования сырья и материалов;

задачи оптимального раскроя;

оптимизации производственной программы предприятий;

оптимального размещения и концентрации производства;

составления оптимального плана перевозок, работы транспорта (транспортные задачи);

управления производственными запасами;

и многие другие, принадлежащие сфере оптимального планирования.

Линейное программирование является одной из основных частей того раздела современной математики, который получил название математического программирования. В общей постановке, задачи этого раздела выглядят следующим образом. Рассмотрим пример.

Задача №1. Небольшая фирма производит книжные шкафы и столы. На изготовление одного книжного шкафа расходуются 1,5 $м^2$ древесно-стружечной плиты, 1 $м^2$ пластика и 3 человеко-часов рабочего времени. Аналогичные данные для стола даются цифрами: 2 $м^2$ древесно-стружечной плиты; 2/3 $м^2$ пластика и 2,5 человеко-часа. Прибыль от реализации одного книжного шкафа составляет 500 руб, а стола-400 руб. В течение одного месяца в распоряжении фирмы имеются: 360 $м^2$ древесно-стружечной плиты, 160 $м^2$ пластика и 560 человеко-часов рабочего времени. В каких количествах следует ежемесячно выпускать книжные шкафы и столы, чтобы ожидаемая месячная прибыль была максимальной? Какова эта прибыль? [1]

Решение. Обозначим через x1 число выпускаемых книжных шкафов и через x2 число столов. Всего будет изготовлено $z=500x_1+400x_2$. Древесно-стружечной плиты потребуется $1{,}5x_1+2x_2$ единиц в месяц. Запас древесно-стружечной плиты ограничен величиной 360$м^2$, значит, требуется ввести ограничение:

$$1{,}5x_1 + 2x_2 \leq 360$$

Для пластика получаем аналогичное второе ограничение:

$$x_1 + 2/3x_2 \leq 160$$

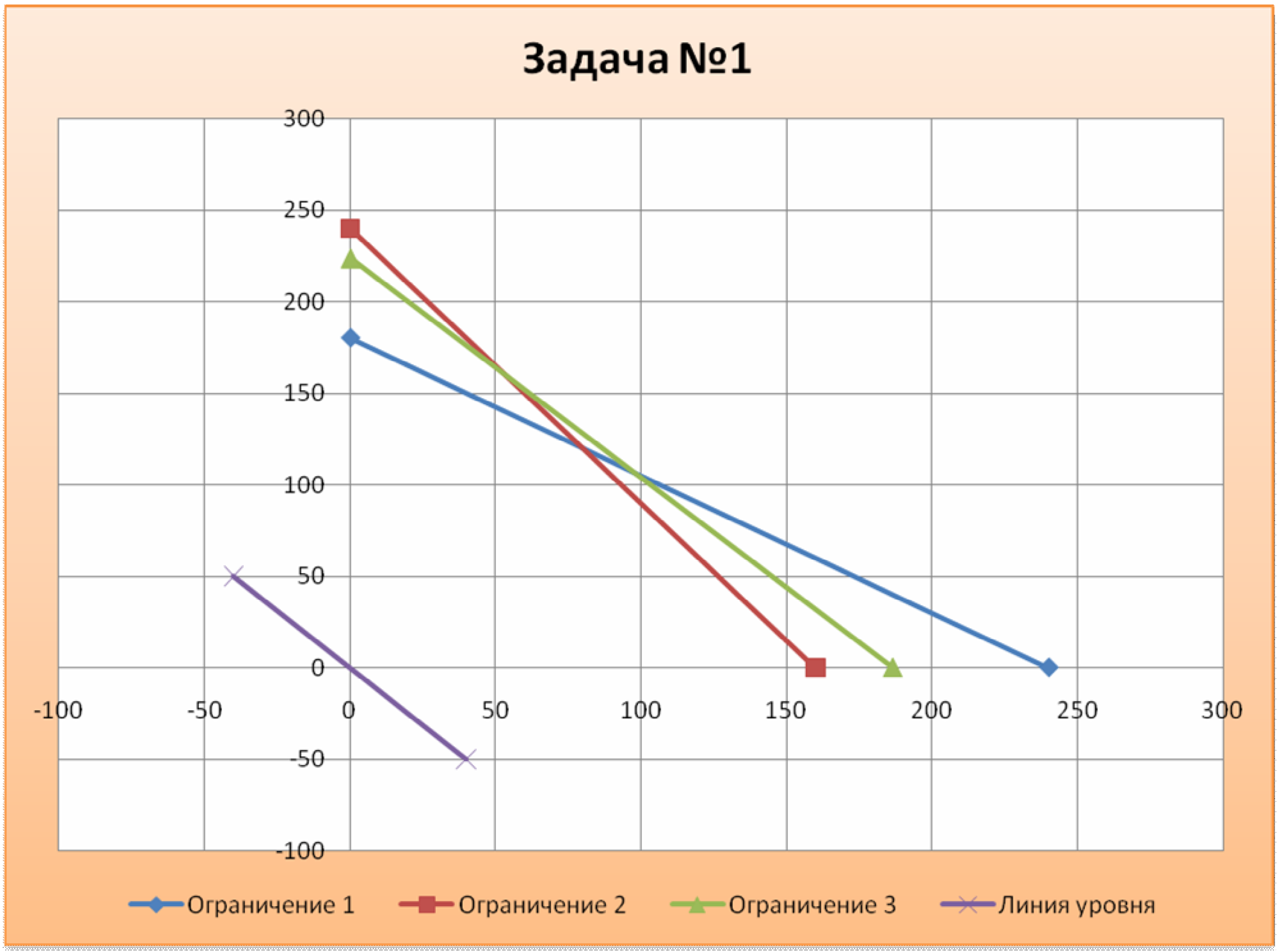
И третье ограничение:

$$3x_1 + 2{,}5x_2 \leq 560$$

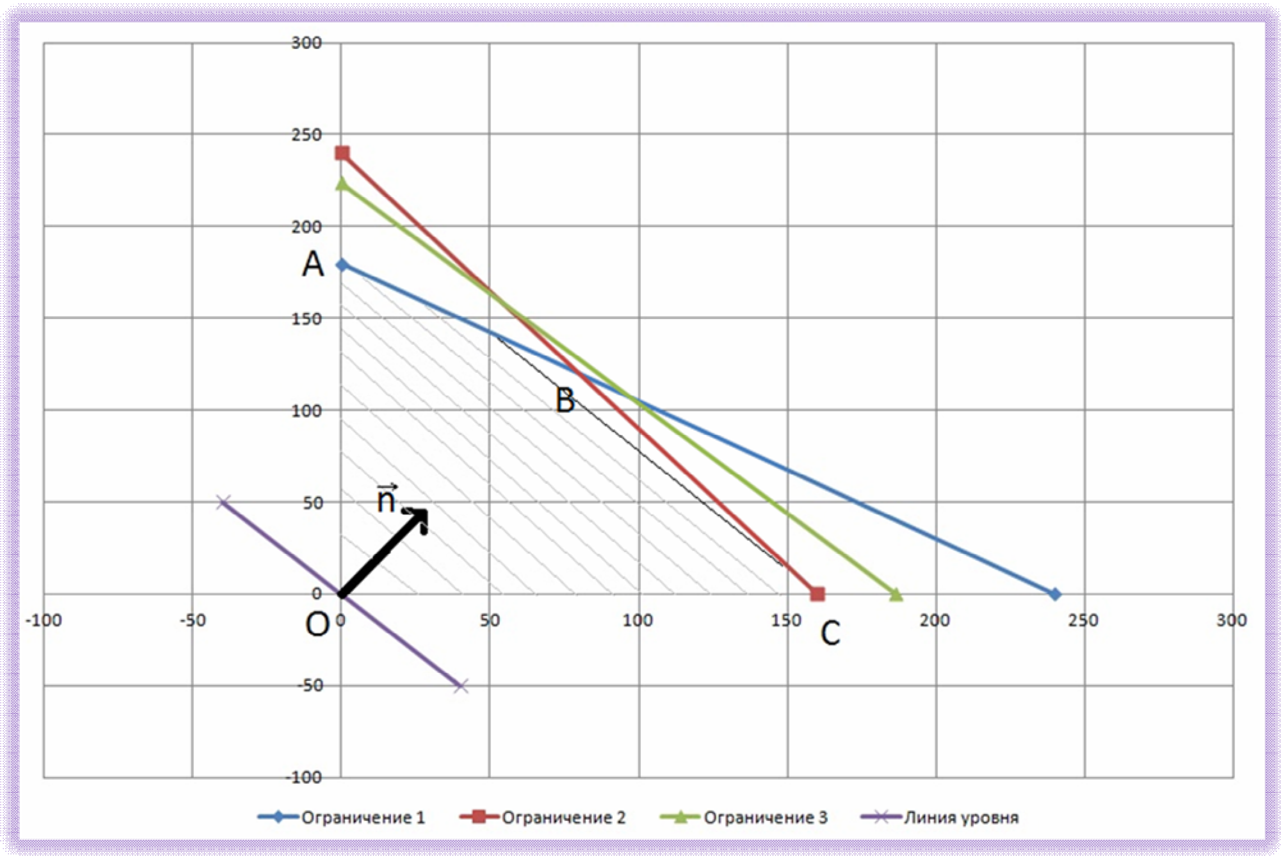
Получим задачу линейного программирования:

$$z = 500x_1 + 400x_2 \ (\rightarrow \max)$$

$$\begin{cases} 1{,}5x_1 + 2x_2 \leq 360 \\ x_1 + 2/3x_2 \leq 160 \\ 3x_1 + 2{,}5x_2 \leq 560 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Решим эту задачу графически. Допустимые планы располагаются в 1-ой четверти, т.к. $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.



Ограничения выделяют четырехугольник OABC-область допустимых значений.

Исследуем функцию $z=500x_1 + 400x_2$

Для всех точек прямой, перпендикулярной вектору n функция имеет одно и то же значение. Таким образом, двигая линию уровня перпендикулярно вектору n, можно найти точку максимума. В точке максимума прямая полностью выходит из области определения, значит точка B будет точкой максимума.

Найдем координаты точки B:

$$\begin{cases} 1{,}5x_1 + 2x_2 = 360 \\ x_1 + 2/3x_2 = 160 \end{cases}$$

$x_1=80$, $x_2=120$

Наконец, найдем максимум прибыли:

$Z=500*80 + 400*120 = 88000.$

Ответ: 80; 120; 88000.

В Задаче №1 в направление нормального вектора лежала только одна точка, рассмотрим задачу, когда нужно выбирать из двух точек оптимальный вариант.

Задача №2. Небольшая мебельная фирма производит книжные шкафы и письменные столы. На изготовление одного книжного шкафа расходуются 1,5 $м^2$ сосновых досок стандартного сечения, 1 $м^2$ берёзовых досок и 3 человеко-часа рабочего времени. Аналогичные данные для письменного стола даются цифрами: 1 $м^2$ сосновых досок; 1 $м^2$ березовых досок и 6 человеко-часов. Прибыль от реализации одного книжного шкафа составляет 900 руб, а письменного стола-1200 руб. В течение одного месяца в распоряжении фирмы имеются: 120 $м^2$ сосновых досок, 100 $м^2$ берёзовых досок и 540 человеко-часов рабочего времени. В каких количествах следует ежемесячно выпускать книжные шкафы и столы, чтобы ожидаемая месячная прибыль была максимальной? Какова эта прибыль? [1]

Решение. Обозначим через x_1 число книжных шкафов, а через x_2-число письменных столов, выпускаемых фирмой ежемесячно. Заданы ограничения:

$$1{,}5x_1 + x_2 \le 120$$
$$x_1 + x_2 \le 100$$
$$3x_1 + 6x_2 \le 540$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

Уравнение прибыли:

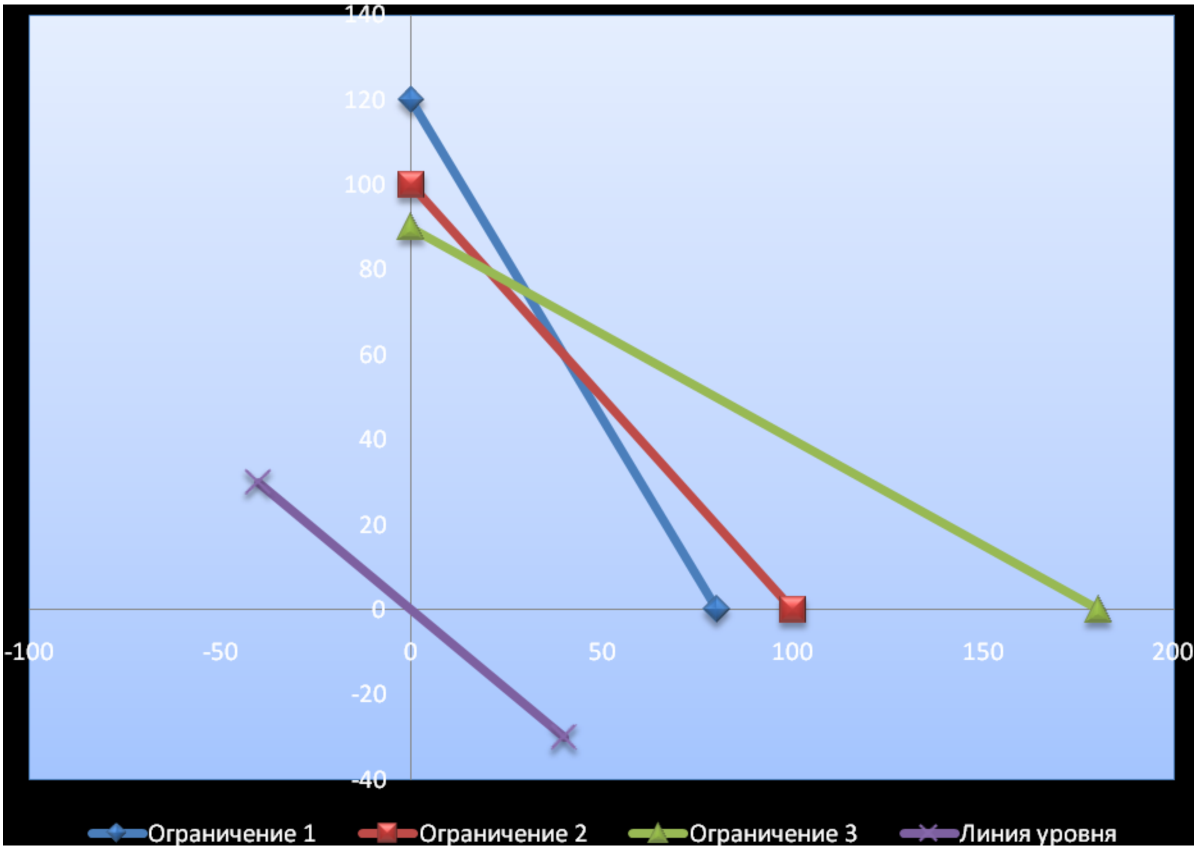
$$z = 900x_1 + 1200x_2$$

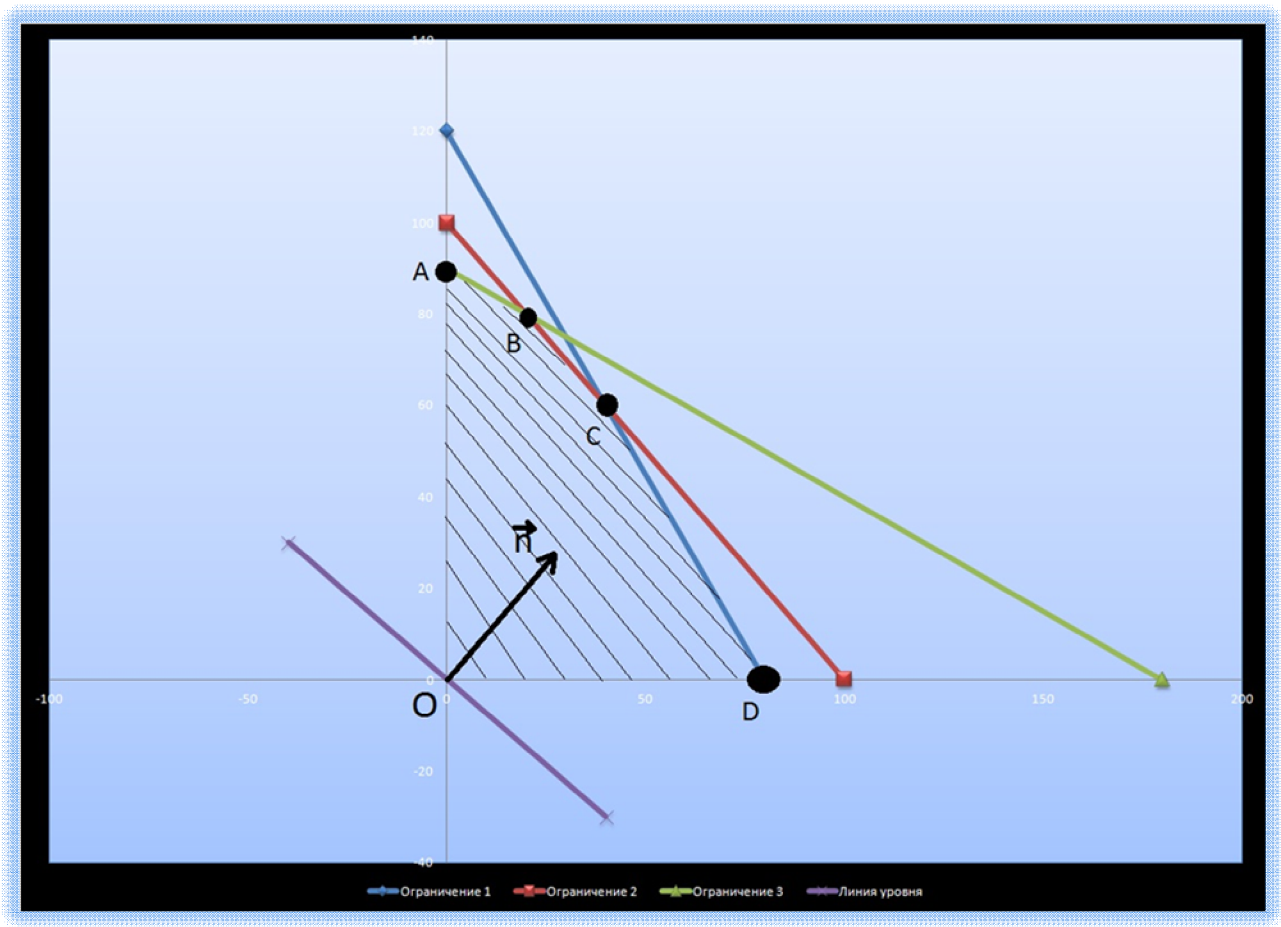
Получим задачу линейного программирования:

$$z = 900x_1 + 1200x_2\ (\to \max)$$

$$\begin{cases} 1{,}5x_1 + x_2 \le 120 \\ x_1 + x_2 \le 100 \\ 3x_1 + 6x_2 \le 540 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Решим её графически:





Точкой максимума будет точка B, найдем координаты:

$$\begin{cases} 1{,}5x_1 + x_2 = 120 \\ 3x_1 + 6x_2 = 540 \end{cases}$$

$$x_1 = 20,\ x_2 = 80$$

$$z = 900*20 + 1200*80 = 114000$$

Ответ: 20; 80; 114000

2.2 Линейная зависимость

Линейная модель - модель, отображающая состояние или функционирование системы таким образом, что все взаимозависимости в ней принимаются линейными. Соответственно она может формулироваться в виде одного линейного уравнения или системы линейных уравнений. Рассмотрим задачу.

Задача себестоимости. Пусть С – себестоимость товара количеством x, расходы которые зависят от выпуска продукции (расходы первой группы) обозначим k, а постоянные расходы (расходы второй группы) – b. Функция себестоимости выглядит следующим образом: C=kx+b.

В экономических расчетах используют уравнение прямой, проходящей через две точки: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

где (x_1, y_1) - координаты первой точки, (x_2, y_2) - координаты второй точки.

Задача №3.

Перевозка лесоматериала по железной дороге со станции Ставрополь до станции Григорополисская (расстояние 150 км) стоит 44 руб. , а до станции Прохладный (расстояние 505 км) - 105 руб. Определить стоимость перевозки такого же объема материала до станции Кисловодск (472 км) и Пятигорск (434 км).

Решение.

Стоимость перевозки до станции Прохладный больше, чем до станции Григорополисская на (105-44) руб., а расстояние больше на (505-150)км. Пусть перевозка такого же груза на x км стоит y руб. Это дороже, чем до станции Григорополисская, на (у-44) руб. и дальше на (х-150) км. Получаем пропорцию: $\frac{y-44}{105-44}=\frac{x-150}{505-150}$,

Следовательно $y=0{,}172x+18{,}2$.

Найдем стоимость перевозки до станции Пятигорск: $y=0{,}172\cdot 434+18{,}2=92{,}55$.

Стоимость перевозки до Кисловодска: $y=0{,}172\cdot 472+18{,}2=99{,}38$.

Ответ: 92,55 руб; 99,38 руб.

2.3 Использование дифференциального исчисления в экономике

Дифференциальное исчисление – математический аппарат, который помогает изучить величину, записываемую в виде функции. В экономике (задачах) очень часто требуется найти оптимальное значение какого-нибудь показателя (наибольшую производительность, максимальную прибыль, минимальные издержки). Нахождение оптимального значения показателя сводится к нахождению экстремума (максимума или минимума) функции.

Задача №3.

Предприятие производит х – единиц продукции в месяц и реализует его по цене $P=25-\frac{1}{30}x$. Суммарные издержки производства составляют: $K=\frac{1}{15}x^2+5x+300$. Определите, при каком объеме производства прибыль предприятия будем максимальной.

Решение.

Прибыль (П) – будет находиться по формуле выручка минус издержки, где выручка равна $P\cdot x$. Значит, прибыль равна: $П=P\cdot x-Л$, $\Pi=25x-\frac{1}{30}x^2-\frac{1}{15}x^2-5x-300$. Найдем производную этой функции: $\Pi'=-0.2x+20$. При х=100 производная обращается в нуль. Значит при х=100 - критическая точка. Исследуем ее. Вычислим значение в критической точке. П=-1000+2000-300=700.

Ответ: 700.

Заключение

Математические методы являются важнейшим инструментом анализа экономических явлений и процессов, позволяющих отобразить существующие связи в экономической жизни. Знания по математике мне помогают во многом рассматривать экономические задачи. В ходе работы было наглядно продемонстрировано, что математический аппарат во многом помогает исследовать экономические проблемы. Я рассмотрел лишь несколько математических инструментов, с помощью которых решаются задачи экономики. Было интересно и занимательно строить модели к задачам. Математика намного упрощает решать экономические задачи.

Список используемой литературы

1. Иванов А. П. Тесты и контрольные работы по математике.: учеб. пособие .-4-е изд. – М.: Физматкнига, 2006.-304с.
2. Красс М.С. "Математика в экономике. Основы математики". М., ФБК-Пресс, 2005 г.
3. Музенитов Ш. А, Задачи с экономическим содержанием//Математика в школе.- 2011,№10. – С.48.
4. http://otherreferats.allbest.ru/emodel/00028595_0.html>Математическое моделирование в экономике.