

Краевой конкурс творческих работ учащихся
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Методические аспекты изучения математики

Признаки квадрата

Хасяя Елена Паатовна,

8 кл., МАОУ «СОШ №59», г. Пермь

Пачина Наталья Петровна,

учитель математики МАОУ «СОШ №59»

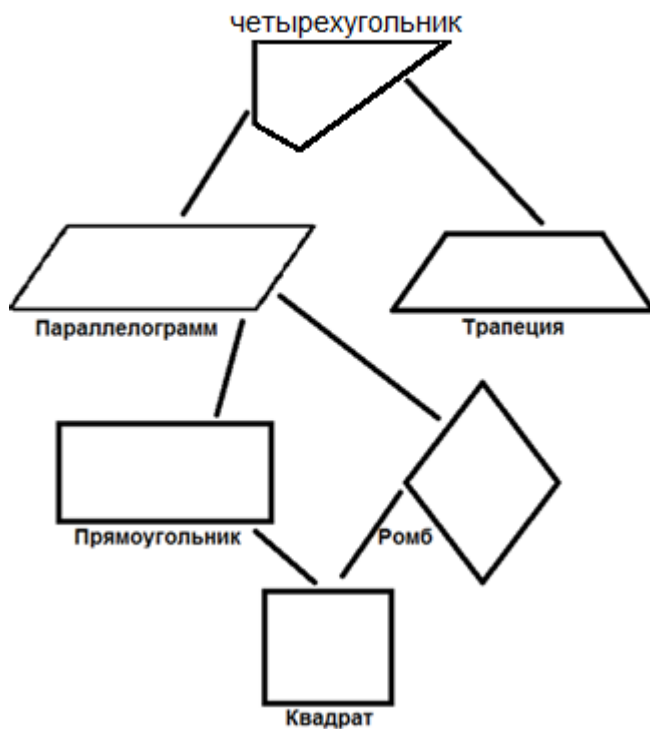
Пермь. 2012.

Содержание:

Введение. <i>Квадрат как четырехугольник</i>	3
§ 1. «Односоставные» признаки	5
§ 2. «Двусоставные» признаки	8
§ 3. «Трехсоставные» признаки	10
§ 4. Квадрат и окружность	15
§5. Система признаков квадрата	18
Заключение	19
Список литературы	20

Введение

В курсе геометрии, изучая четырехугольники, выделяют параллелограмм и трапецию. Среди параллелограммов рассматривают прямоугольник, ромб и квадрат. Попробуем образовать некую «родословную» четырехугольников.



Итак, квадрат является «прямым родственником» прямоугольника и ромба. Следовательно, можно ввести два определения квадрата:

1. Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны.
2. Квадратом называется ромб, у которого все углы прямые.

Очевидно, что квадрат имеет все свойства прямоугольника и ромба: у него все углы прямые, все стороны равны, диагонали равны, взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.

Прежде, чем употреблять свойства данной фигуры, необходимо распознать её вид, а для этого применяют признаки.

Если требуется решить вопрос, является ли четырехугольник квадратом и не удастся использовать определение, то нужно прибегнуть к признакам квадрата.

В школьных учебниках признаки отдельно не формулируются. Некоторые из них рассматриваются как задачи, поэтому есть необходимость исследовать и систематизировать признаки квадрата.

§ 1.« Односоставные» признаки

1. Если в прямоугольнике диагонали перпендикулярны, то он квадрат.
2. Если в прямоугольнике диагонали являются биссектрисами его углов, то это квадрат.
3. Если в ромбе диагонали равны, следовательно, это квадрат.

Теорема

Если в прямоугольнике диагонали перпендикулярны, то он квадрат

Доказательство.

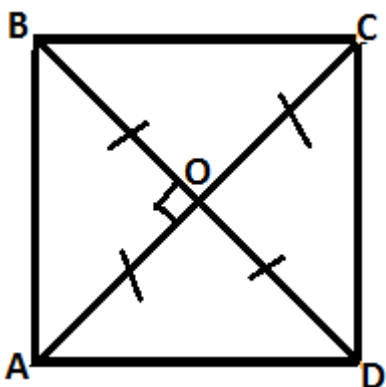
Пусть ABCD- данный прямоугольник. Проведем диагонали AB, CD.

Рассмотрим треугольник ABC:

1. $AO=OC$ (свойство параллелограмма), следует BO - медиана
2. $\angle AOB=\angle BOC=90^\circ$ (AC перпендикулярна BD), следует BO -высота

Если в треугольнике медиана является высотой, то треугольник ABC- равнобедренный, поэтому сторона $AB=BC$.

Итак, в прямоугольнике стороны $AB=BC=CD=AD$, отсюда, по определению, следует, что это квадрат. Теорема доказана.



Теорема

Если в прямоугольнике диагонали являются биссектрисами его углов, то это квадрат.

Доказательство.

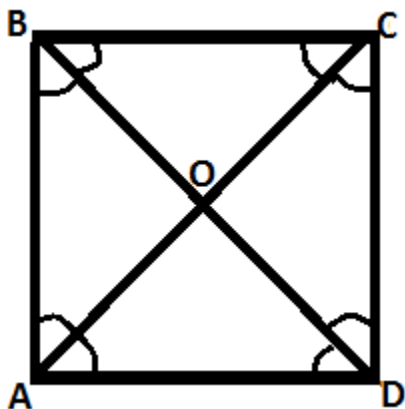
Пусть ABCD- данный прямоугольник. Проведем диагонали AB, CD.

Рассмотрим треугольник ABC:

1. $AO=OC$ (свойства параллелограмма), следует BO - медиана.
2. $\angle ABO=\angle CBO$ (AC, BD являются биссектрисами его углов), следует BO -биссектриса треугольника ABC.

Если в треугольнике биссектриса является медианой, то треугольник ABC- равнобедренный, поэтому сторона $AB=BC$.

Итак, в прямоугольнике стороны $AB=BC=CD=AD$, отсюда, по определению, следует, что это квадрат. Теорема доказана.



Теорема

Если в ромбе диагонали равны, следовательно, это квадрат.

Доказательство.

Пусть ABCD- данный ромб. Проведем диагонали AC, BD.

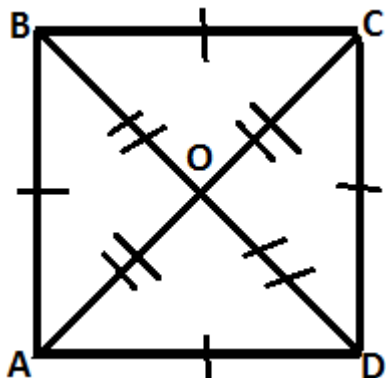
Рассмотрим треугольник ABC, BCD:

$AB=BC=CD$ (ABCD-ромб)

$AC=BD$ (условие)

По третьему признаку равенства треугольники ABC и BCD равны, следует $\angle B = \angle C$ и эти углы являются внутренними односторонними, поэтому их сумма равна 180° . Значит, $\angle B = \angle C = 90^\circ$

Итак, в ромбе все углы прямые, отсюда, по определению, следует, что это квадрат. Теорема доказана.

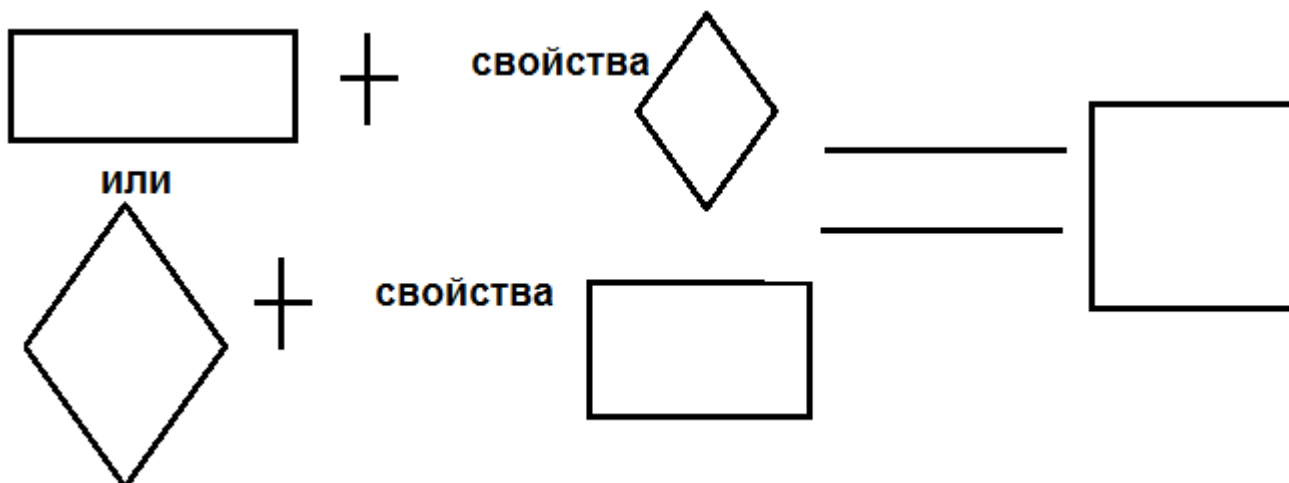


В данных трех теоремах для доказательства используется только одно условие

Формулировки укладываются в следующую схему:

Фигура (прямоугольник или ромб) + условие из свойств другой фигуры = квадрат

Поэтому назовем эти признаки односоставными.



§ 2. «Двусоставные» признаки

1. Если в параллелограмме диагонали перпендикулярны и равны, то это квадрат.
2. Если в параллелограмме диагонали являются биссектрисами его углов и они равны, следовательно, это квадрат.
3. Если в параллелограмме стороны равны и диагонали равны, то это квадрат.
4. Если в параллелограмме углы прямые и диагонали перпендикулярны, то он квадрат.
5. Если в параллелограмме углы прямые и диагонали являются биссектрисами его углов, то это квадрат.
6. Если в параллелограмме углы прямые и стороны равны, то это квадрат.

Теорема

Если в параллелограмме диагонали перпендикулярны и равны, то это квадрат.

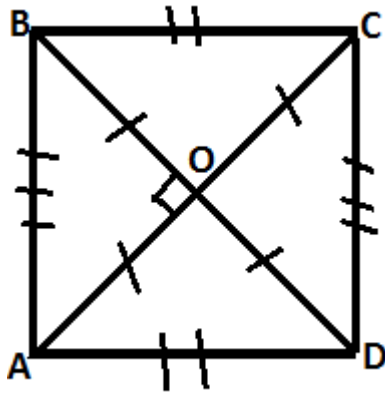
Доказательство.

Пусть $ABCD$ - данный параллелограмм. Проведем диагонали AC и BD .

Так как $ABCD$ - параллелограмм, а диагонали перпендикулярны, следует $ABCD$ - ромб, поэтому стороны AB , BC , CD , AD равны между собой.

Так как $ABCD$ - параллелограмм, а диагонали равны, следует $ABCD$ - прямоугольник.

Итак, в прямоугольнике стороны $AB=BC=CD=AD$, отсюда, по определению, следует, что это квадрат. Теорема доказана.



Теорема

Если в параллелограмме диагонали являются биссектрисами его углов и они равны, следовательно, это квадрат.

Доказательство.

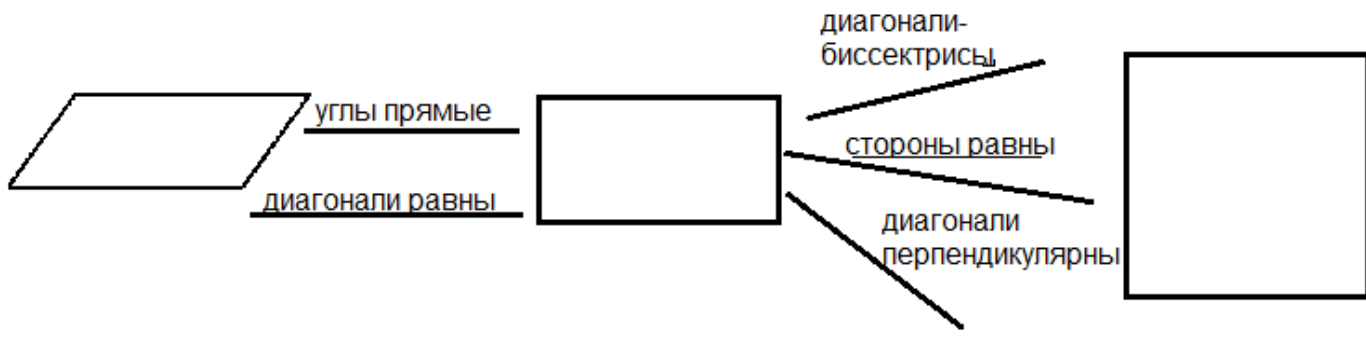
Пусть ABCD- данный параллелограмм. Проведем диагонали AC и BD.

Так как ABCD- параллелограмм, а диагонали являются биссектрисами его углов, следует ABCD- ромб, поэтому стороны AB, BC, CD, AD равны между собой.

Так как ABCD- параллелограмм, а диагонали равны, следует ABCD- прямоугольник.

Итак, в прямоугольнике стороны $AB=BC=CD=AD$, отсюда, по определению, следует, что это квадрат. Теорема доказана.

Таки образом, все теоремы доказываются аналогично и по общей схеме. В условии к параллелограмму предъявляются два требования, поэтому назовем эти признаки «двусоставными».



§ 3.«Трехсоставные» признаки

Теорема

Если в четырехугольнике диагонали перпендикулярны и равны, и точкой пересечения делятся пополам, то это квадрат. (рис.1)

Пусть ABCD-данный четырехугольник и O - точка пересечения диагоналей AC, BD, следовательно $AO=OC$, $BO=OD$. Исходя из теоремы о диагоналях, которые точкой пересечения делятся пополам, ABCD- параллелограмм.

Так как ABCD- параллелограмм и диагонали перпендикулярны, следует ABCD- ромб, поэтому стороны AB, BC, CD, AD равны между собой.

Так как ABCD- параллелограмм, а диагонали равны, следует ABCD- прямоугольник.

Итак, в прямоугольнике стороны $AB=BC=CD=AD$ отсюда, по определению, следует, что это квадрат. Теорема доказана.

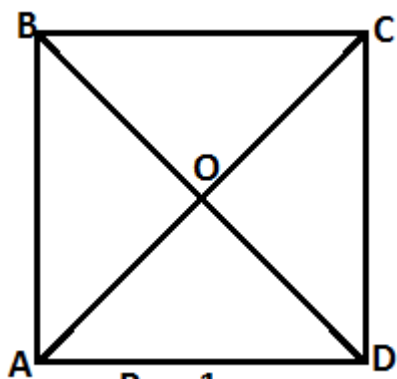


Рис. 1

Теорема

Если в четырехугольнике диагонали равны, и они являются биссектрисами его углов, а также точкой пересечения делятся пополам, следовательно, это квадрат. (рис.1)

Доказательство.

Пусть ABCD-данный четырехугольник и O - точка пересечения диагоналей AC, BD, следовательно $AO=OC$, $BO=OD$. Исходя из

признака о диагоналях, которые точкой пересечения делятся пополам, ABCD- параллелограмм.

Так как ABCD- параллелограмм и диагонали являются биссектрисами его углов, следует ABCD- ромб, поэтому стороны AB, BC, CD, AD равны между собой.

Так как ABCD- параллелограмм, а диагонали равны, следует ABCD- прямоугольник.

Итак, в прямоугольнике стороны $AB=BC=CD=AD$ отсюда, по определению, следует, что это квадрат. Теорема доказана.

Теорема

Если в четырехугольнике противоположные углы равны, а диагонали перпендикулярны и равны, то это квадрат. (рис.1)

Доказательство.

Пусть ABCD-данный четырехугольник. Проведем диагонали AB, CD. Исходя из признака о противоположных углах, ABCD- параллелограмм.

Так как ABCD- параллелограмм и диагонали перпендикулярны, следует ABCD- ромб, поэтому стороны AB, BC, CD, AD равны между собой.

Так как ABCD- параллелограмм, а диагонали равны, следует ABCD- прямоугольник.

Итак, в прямоугольнике стороны $AB=BC=CD=AD$ отсюда, по определению, следует, что это квадрат. Теорема доказана.

Теорема

Если в четырехугольнике противоположные углы равны, а диагонали являются биссектрисами его углов и они равны, то это квадрат. (рис.1)

Доказательство.

Пусть ABCD-данный четырехугольник. Проведем диагонали AB, CD. Исходя из признака о противоположащих углах, ABCD-параллелограмм.

Так как ABCD- параллелограмм и диагонали являются биссектрисами его углов, следует ABCD- ромб, поэтому стороны AB, BC, CD, AD равны между собой.

Так как ABCD- параллелограмм, а диагонали равны, следует ABCD- прямоугольник.

Итак, в прямоугольнике стороны $AB=BC=CD=AD$ отсюда, по определению, следует, что это квадрат. Теорема доказана.

Теорема

Если в четырехугольнике каждая сторона равна противоположащей, а диагонали являются биссектрисами его углов и они равны, то это квадрат. (рис.1)

Доказательство.

Пусть ABCD-данный четырехугольник. Проведем диагонали AB, CD. Исходя из признака о том, что если каждая сторона равна противоположащей, следует ABCD- параллелограмм.

Так как ABCD- параллелограмм и диагонали являются биссектрисами его углов, следует ABCD- ромб, поэтому стороны AB, BC, CD, AD равны между собой.

Так как ABCD- параллелограмм, а диагонали равны, следует ABCD- прямоугольник.

Итак, в прямоугольнике стороны $AB=BC=CD=AD$ отсюда, по определению, следует, что это квадрат. Теорема доказана.

Теорема

Если в четырехугольнике каждая сторона равна противоположной, а диагонали перпендикулярны и равны, то это квадрат. (рис.1)

Доказательство.

Пусть ABCD-данный четырехугольник. Проведем диагонали AB, CD. Исходя из признака о том, что каждая сторона равна противоположной, следует ABCD- параллелограмм.

Так как ABCD- параллелограмм и диагонали перпендикулярны, следует ABCD- ромб, поэтому стороны AB, BC, CD, AD равны между собой.

Так как ABCD- параллелограмм, а диагонали равны, следует ABCD- прямоугольник.

Итак, в прямоугольнике стороны $AB=BC=CD=AD$ отсюда, по определению, следует, что это квадрат. Теорема доказана.

Теорема

Если в четырехугольнике две противоположные стороны параллельны и равны, а диагонали перпендикулярны и равны, то это квадрат. (рис.1)

Доказательство.

Пусть ABCD-данный четырехугольник. Проведем диагонали AB, CD. Исходя из признака о том, что 2 противоположные стороны параллельны и равны, ABCD- параллелограмм.

Так как ABCD- параллелограмм и диагонали перпендикулярны, следует ABCD- ромб, поэтому стороны AB, BC, CD, AD равны между собой.

Так как ABCD- параллелограмм, а диагонали равны, следует ABCD- прямоугольник. Итак, в прямоугольнике стороны $AB=BC=CD=AD$ отсюда, по определению, следует, что это квадрат. Теорема доказана.

Теорема

Если в четырехугольнике две противоположные стороны параллельны и равны, а диагонали являются биссектрисами его углов и они равны, то это квадрат. (рис.1)

Доказательство.

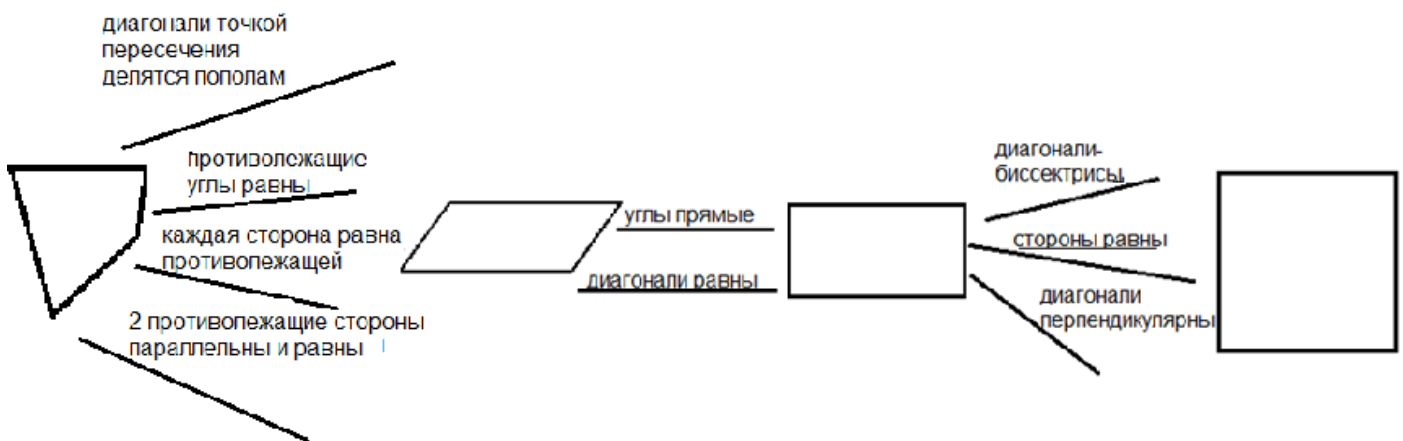
Пусть ABCD-данный четырехугольник. Проведем диагонали AB, CD. Исходя из признака о том, что 2 противоположные стороны параллельны и равны, ABCD- параллелограмм.

Так как ABCD- параллелограмм и диагонали являются биссектрисами его углов, следует ABCD- ромб, поэтому стороны AB, BC, CD, AD равны между собой.

Так как ABCD- параллелограмм, а диагонали равны, следует ABCD- прямоугольник.

Итак, в прямоугольнике стороны $AB=BC=CD=AD$ отсюда, по определению, следует, что это квадрат. Теорема доказана.

Все теоремы доказываются аналогично и по определенной схеме. В условии к четырехугольнику предъявляются три требования, поэтому назовем эти признаки «трехсоставными».



§ 4. Квадрат и окружность

1. Если в прямоугольник можно вписать окружность, то он квадрат.
2. Если около ромба можно описать окружность, то он квадрат.
3. Если в параллелограмм можно вписать окружность и около него описать окружность, то он квадрат
4. Если в четырехугольник можно вписать окружность и около него описать окружность, а диагонали точкой пересечения делятся пополам, то это квадрат.
5. Если в четырехугольник можно вписать окружность и около него описать окружность, а две противоположные стороны параллельны и равны, то это квадрат.
6. Если в четырехугольник можно вписать окружность и около него описать окружность, а каждая сторона равна противоположащей, то это квадрат.
7. Если в четырехугольник можно вписать окружность и около него описать окружность, а противоположные углы равны, то это квадрат.

Теорема

Если в прямоугольник можно вписать окружность, то он квадрат.

Доказательство.

Пусть ABCD- данный прямоугольник и можно вписать в него окружность

Исходя из теоремы (если в четырехугольник вписана окружность, то суммы противоположных сторон равны), $AB+CD = BC+AD$.

Так, как ABCD является прямоугольником, следует $BC=AD$, $AB=CD$

Поэтому $2AB=2BC$, следует $AB=BC$

Итак, в прямоугольнике стороны $AB=BC=CD=AD$ отсюда, по определению, следует, что это квадрат. Теорема доказана.

Теорема

Если около ромба можно описать окружность, то он квадрат.

Доказательство.

Пусть ABCD- данный ромб и можно описать около него окружность

Исходя из теоремы (если в четырехугольник описана окружность, то суммы противоположных углов равны), $\angle B + \angle D = \angle C + \angle A = 180^\circ$.

Так, как ABCD является ромбом, следует $\angle A = \angle C$ $\angle B = \angle D$.

Поэтому все углы равны 90°

Итак, в ромбе все углы прямые отсюда, по определению, следует, что это квадрат. Теорема доказана.

Теорема

Если в параллелограмм можно вписать окружность и около него описать окружность, то он квадрат

Доказательство.

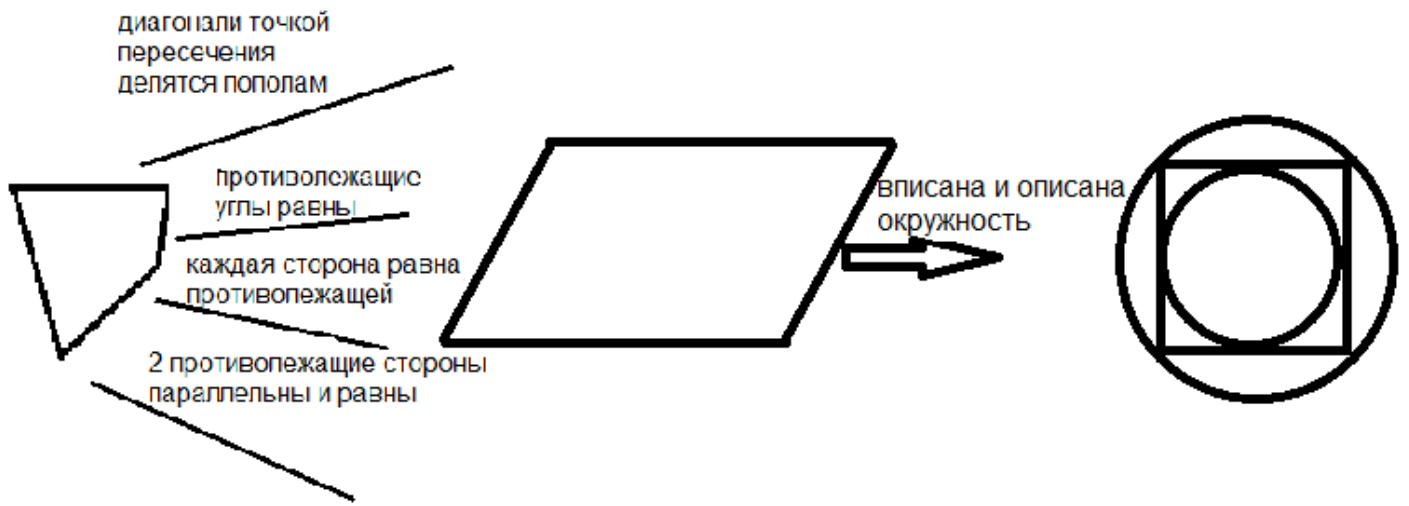
Пусть ABCD- данный параллелограмм и в него можно вписать окружность, а также описать её около него.

Так, как ABCD- параллелограмм, следует $AB = CD$, $BC = AD$; $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.

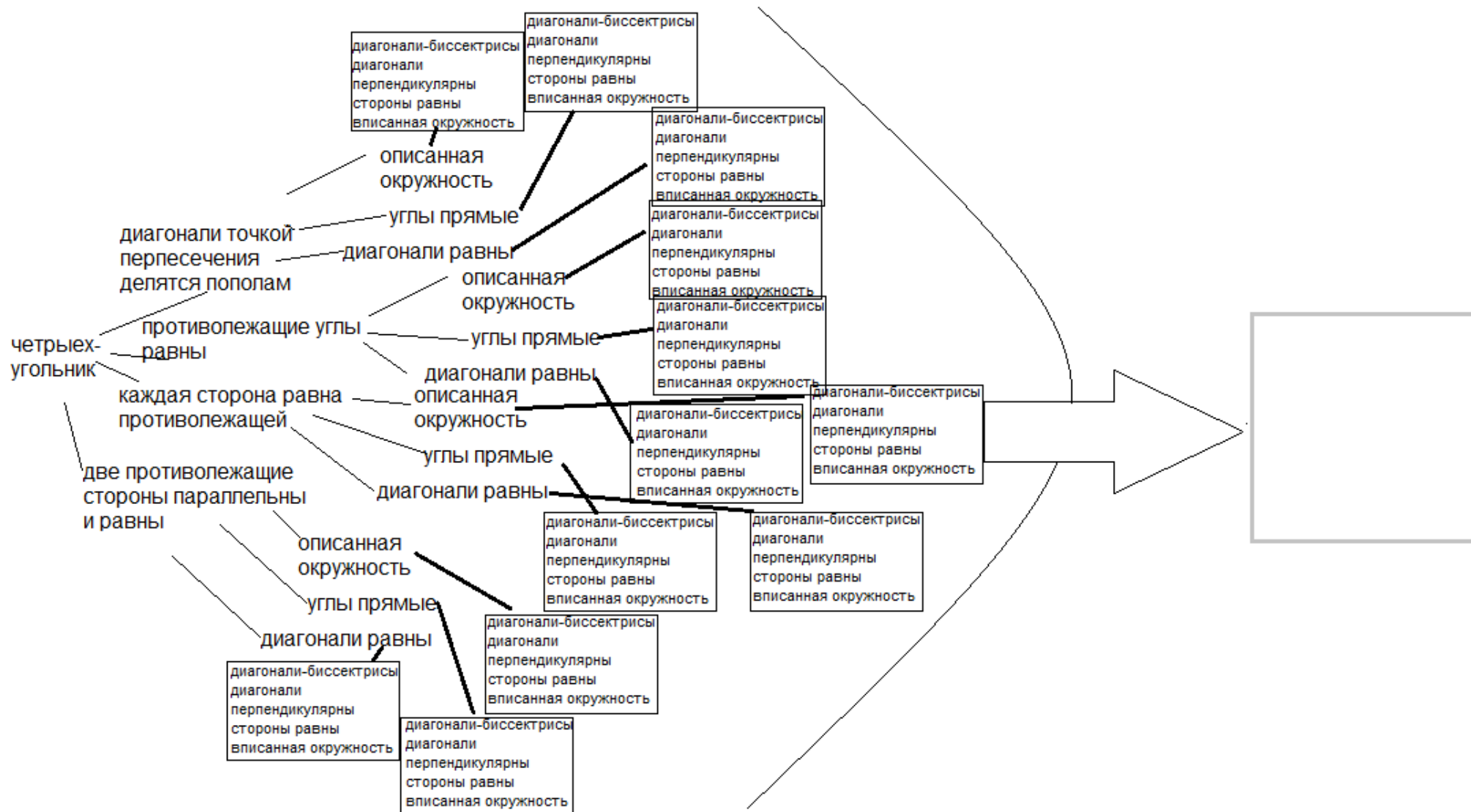
Исходя из теоремы (если около четырехугольника описана окружность, то суммы противоположных углов равны), $\angle B + \angle D = \angle C + \angle A = 180^\circ$.

Поэтому каждый угол имеет величину 90° , следует ABCD – прямоугольник.

Итак, если в прямоугольник вписана окружность, то это квадрат.



§5. Система признаков квадрата



Заключение

Таким образом, в работе систематизированы и доказаны признаки квадрата.

Список литературы

1. Погорелов А.В. Геометрия 7-9 М.:Просвещение, 2007
2. Атаноян В.Ф. Геометрия 7-11 М.: Просвещение, 2006
3. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Геометрия 7-11М.: Просвещение, 1994
4. Рудомазина Н. Е., Дажина Т.Д. Учебный справочник школьника, 4 издание, стереотипное. «Дрофа», 2002