Краевой конкурс творческих работ учащихся
«Прикладные и фундаментальные вопросы математики»

Математическое моделирование

Моделирование динамики численности популяции с учетом ограниченности ресурсов

Кравец Алёна Денисовна,
11, МБОУ «Лицей №1» г. Перми,

Шабрыкина Наталья Сергеевна,
доцент ПНИПУ, к.ф.-м. н.

Пермь. 2012.

Введение

Популяция - это совокупность особей одного вида, находящихся во взаимодействии между собой и совместно заселяющих общую территорию. Как правило, численность популяции зависит не только от рождаемости и смертности, но и от ограниченности пищевых и других ресурсов. Для того чтобы убедиться в этом рассмотрим популяции воробьёв в Австралии.

Домовой воробей выступает не просто спутником человека, но и своеобразным индикатором. В зависимости от того, насколько велика популяция и каково её состояние, можно судить и о состояние окружающей среды.

Так, например, к началу 21 века во многих странах популяция воробьев не просто уменьшилась, но и оказалась на грани полного исчезновения. А в Австралии можно наблюдать противоположную картину – популяция завезенных из нового света и Европы воробьев неуклонно увеличивается.

И это явление совсем не радует ученых, ведь воробьев на этом материке становится так много, что они грозят разрушением уже сложившейся экосистемы (естественных врагов в Австралии у воробьев практически нет, за исключением кошек и лис, также завезенных на континент из вне).

Интересно составить математическую модель данного процесса. Так как это не единственный случай в истории, когда изолированная популяция вела себя непредсказуемо.

В данной работе будет составлена популяционная модель, с помощью которой можно будет увидеть, как ведет себя популяция воробьёв в определенных условиях.

Концептуальная постановка задачи

В данной работе будет

- построена метематическая модель, описывающая динамику численности популяции с учетом ограниченности ресурсов,
- проведено сравнение с моделью Мальтуса
- спрогнозированно через сколько лет должен прекратиться рост населения.

Для того чтобы составить модель, необходимо разобраться от каких параметров данная модель будет зависеть, а какими параметрами можно пренебречь.

Данная модель будет зависеть от следующих параметров:

• равновесная численность популяции,

• начальная численность популяции,

• удельная скорость роста численности (рождаемость/смертность);

Допущения:

• Животные умирают только естественной смертью, т.е. нет хищников, которые могли бы поедать рассматриваемых животных;

• Скорость изменения численности популяции пропорциональна самой численности и величине относительного отклонения от равновесного значения;

• Существует некоторая равновесная численность, которую может обеспечить окружающая среда.

Математическая постановка задачи

С учётом описанных выше допущений составим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \gamma N(t)\left(\frac{Np - N(t)}{Np}\right) \tag{1}$$

где γ - удельная скорость роста численности (рождаемость/смертность); Np - равновесная численность популяции, которую может обеспечить окружающая среда(т.е. количество животных,которому достаточно будет существующих ресурсов пищи и пространства); $N(t)$ - численность популяции в зависимости от времени.

Для решения данного уравнения понадобится начальное условие – численность популяции в начальный момент времени:

$$N(0) = N_0 \tag{2}$$

Одной из поставленных задач было сравнить данную модель с моделью Мальтуса. Для этого ниже будет предоставлено дифференциальное уравнение, описывающее модель Томаса Роберта Мальтуса:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha N(t) - \beta N(t) \tag{3}$$

где α - коэфициент рождаемости; β - коэфициент смертности.

Для решения данного уравнения понадобится начальное условие (2).

Решение задачи

Решение производилось аналитически. Так как решение вручную слишком сложно, поэтому решение производилось с помощью математического пакета Maple. Код программы указан в приложении.

Решение (1) уравнения с начальным условием (2) имеет вид:

$$N(t) = \frac{N0\,Np}{N0 + e^{\gamma t}\,Np - N0\,e^{\gamma t}} \tag{5}$$

Решение (3) уравнения с начальным условием (2) имеет вид:

$$N(t) = N_0^{((\alpha-\beta)t)} \tag{6}$$

Результаты решения

С помощью формул (5), (6) были получены графики зависимости численности популяции от времени. В различных случаях, рассмотренных далее, были взяты различные коэффициенты и начальные условия.

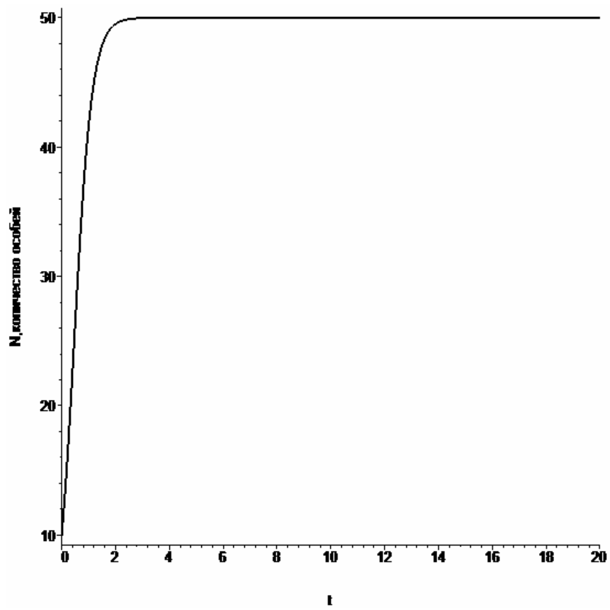

Рис. 1. Зависимость численности популяции от времени с учётом ограниченности ресурсов

$\gamma = 3$, $N_0 = 10$, $N_p = 50$

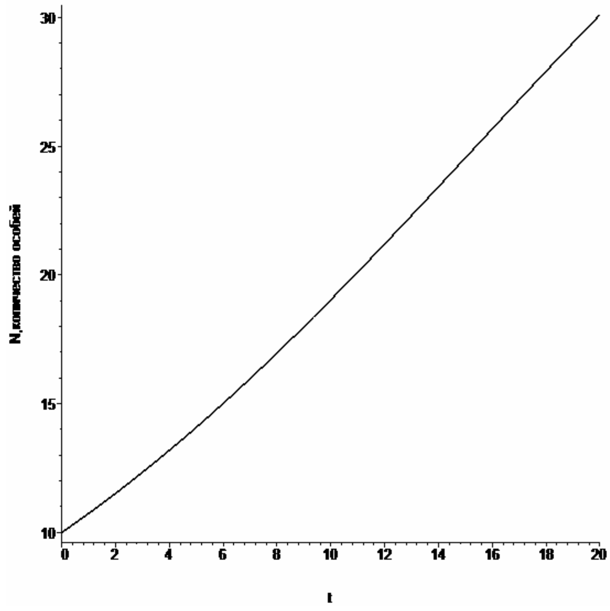

Рис. 2. Зависимость численности популяции от времени с учётом ограниченности ресурсов

$\gamma = 0.09$, $N_0 = 10$, $N_p = 50$.

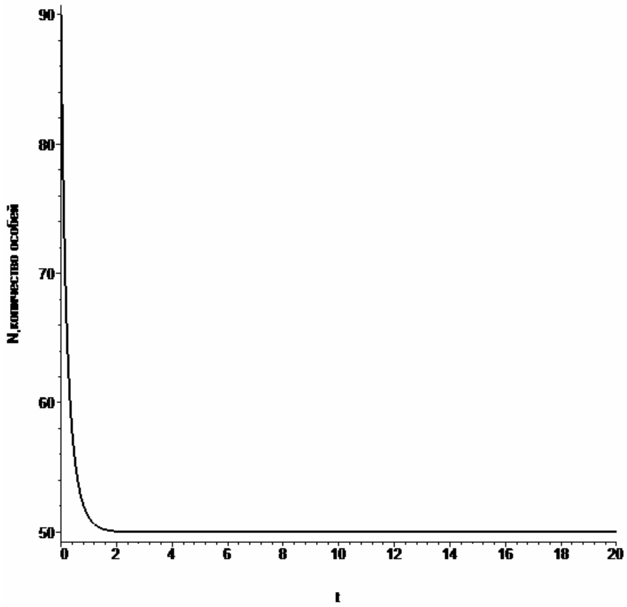

Рис. 3. Зависимость численности популяции от времени с учётом ограниченности ресурсов

$\gamma = 3$, $N_0 = 90$, $N_p = 50$.

Рис. 1 показывает, что при данных параметрах популяция быстро размножается и, достигая своей равновесной численности, прекращает изменять общую численность популяции.

На рис. 2 видно, что при изменений коэфициента удельной скорости роста численности популяции за данный промежуток времени не успевает достигнуть равновесной численности .

По рис. 3 видно, что если количество животных больше , чем может себе обеспечить окружающая среда, то численность популяции начинает стремительно сокращаться и, достигая равновесного значения, останавливается на нём.

Из рис. 4 видно, что когда ресурсы неограниченны численность популяции неограниченно возрастает. Это и является отличием модели Мальтуса от логистической модели.

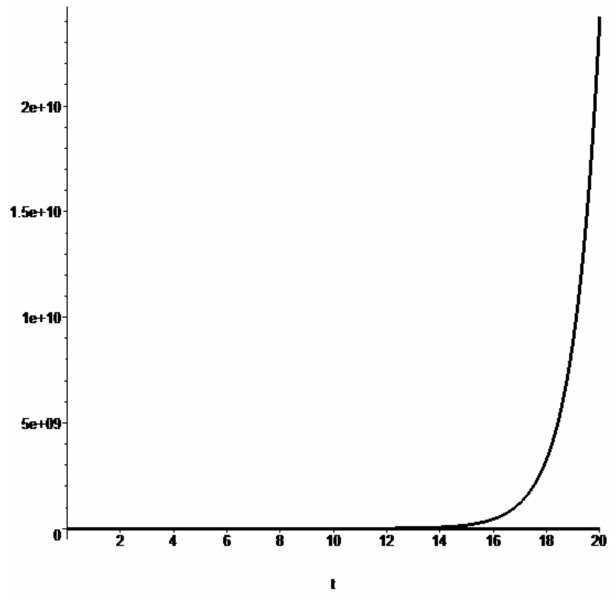

Рис. 4. Зависимость численности популяции от времени, ресурсы неограниченны (Модель Мальтуса)

Также было проведено сравнение Логистической модели и модели Мальтуса при равных параметрах: $N_0 = 10$; $\alpha = 4$; $\gamma = 2$; $\beta = 2$; $N_p = 30$; $t \in [0..5]$.

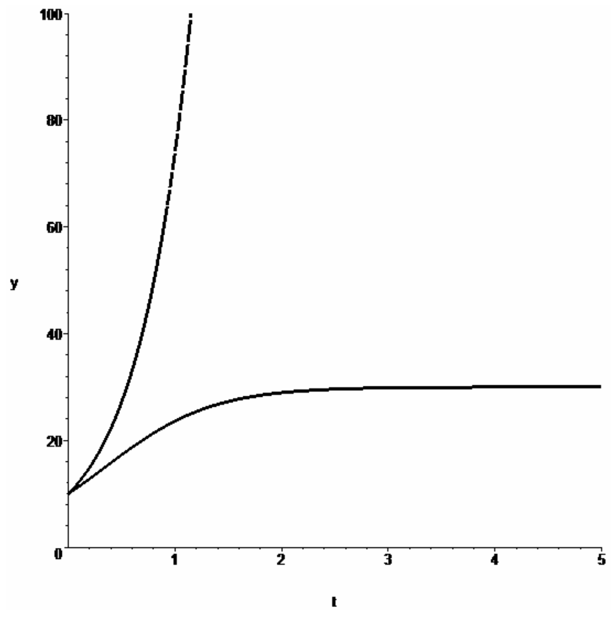

Рис. 5. Зависимость численности популяции от времени: сравнение моделей

По рис. 5 видно, что при равных параметрах графики логистической модели и Модели Мальтуса сильно отличаются. Численность популяции для модели Мальтуса неограниченно и быстро возрастает, а для логистической модели численность популяции сначала растёт, затем останавливается на равновесном значении.

Второе сравнение Логистической модели и модели Мальтуса следующих параметрах: $N_0 = 100$, $\alpha = 10$, $\gamma = 0.1$, $\beta = 100$, $N_p = 80$, $t \in [0..0.06]$

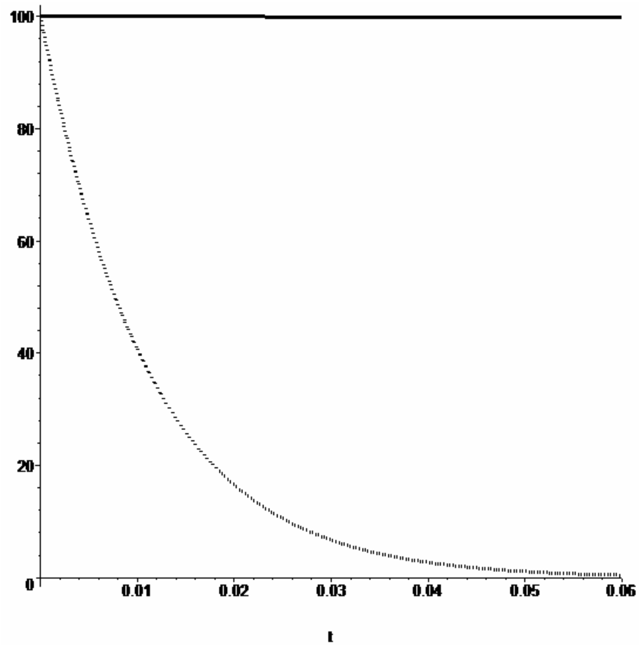

Рис. 6. Зависимость численности популяции от времени: сравнение моделей

По рис. 6 видно, что при равных параметрах графики логистической модели и Модели Мальтуса сильно отличаются. Численность популяции для модели Мальтуса почти остаётся неизменным, а для логистической модели численность популяции быстро убывает и затем популяция исчезает вовсе.

Применим на практике всё что мы узнали о зависимостях популяций от времени, для этого решим задачу, где в качестве популяции будем рассматривать население Земли.

Задача: Известно, что каждую минуту на земле рождается 240 человек, а умирает 120. В настоящее время население земного шара равно 6,5 млрд. человек. Емкость среды нашей планеты по оценкам ряда ученых (при прогрессивном и грамотном ведении хозяйства) приблизительно равно 20 млрд. человек. Используя модель Ферхюльста, попытайтесь спрогнозировать через сколько лет должен прекратиться рост населения.

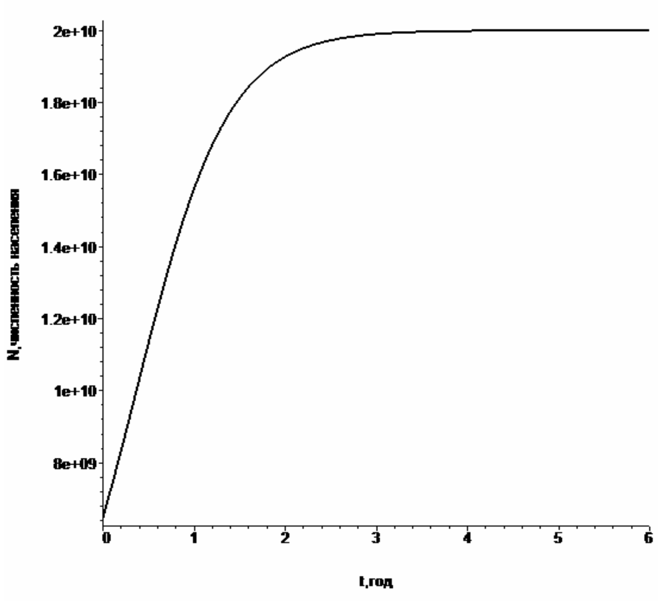

Рис. 6. Рост населения земли

Расчитаем удельную скорость роста численности населения. Она как и говорилось раньше равна отношению рождаемости к смерти $\gamma = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{240}{120} = 2$. На данный момент численность населения земли составляет $N_0 = 6500000000$. А ёмкость среды равна $N_p = 20000000000$.

Подставляя значения в ранее выведеную формулу (5), получаем зависимость, представленную на рис. 6. По графику видно, что приблизительно рост численности населения должен прекратиться через 4 года. Но это очень грубая оценка ситуации, так как в данной модели не были учтены такие факторы как война, голод, кризис (всё что может резко сократить численность населения).

Заключение

В данной работе была построена модель динамики численности популяции с учётом ограниченности ресурсов, составлено и решено дифференциальное уравнение, описывающее данную математическую модель, проведено сравнение с моделью Мальтуса.

С помощью найденных зависимостей было выяснено следующее:

- при начальной численности популяции меньше равновесного значения популяция размножается, достигая равновесного значения;
- при начальной численности популяции больше равновесного значения популяция начинает вымирать и останавливается на равновесном значении;
- в модели Мальтуса, популяция в отличии от данной, бесконечно размножается.

Без каких-либо ограничений численность населения на Земле возрастёт до максимальной отметки всего за 4 года.

Список литературы

1. Модели динамики численности популяций - http://mialo.narod.ru/ped/models/popul.htm#ferh. 20.06.2012.

Приложение

```
> eq1:=diff(N(t),t)=gamma*(1-N(t)/Np)*N(t);
> dsolve(eq1,N(t));
> sol1:=dsolve({eq1,N(0)=N0},N(t));
> N:=eval(N(t),sol1);
> N1:=eval(N,{N0=10, gamma =10,Np=50});
> N2:=eval(N,{N0=0.09, gamma =10,Np=50});
> N3:=eval(N,{N0=90, gamma =3,Np=50});
>
plot(N1,t=0..20,color=black,thickness=2,labels=["t,год","N,Численность популяции"],labeldirections=[HORIZONTAL,VERTICAL]);
>
plot(N2,t=0..20,color=black,thickness=2,labels=["t,год","N,Численность популяции"],labeldirections=[HORIZONTAL,VERTICAL]);
>
plot(N3,t=0..20,color=black,thickness=2,labels=["t,год","N,Численность популяции"],labeldirections=[HORIZONTAL,VERTICAL]);
> Ex:=eval(N,{N0=6500000000,gamma=2,Np=20000000000});
> plot(Ex,t=0..6,color=black,thickness=2,labels=["t,год","N,Численность населения"],labeldirections=[HORIZONTAL,VERTICAL]);
> eq2Maltyc:=diff(N(t),t)=(alpha-beta)*N(t);
> dsolve(eq,N(t));
> sol2:=dsolve({eq,N(0)=N0},N(t));
> K:=eval(N(t),sol2);
> K1:=eval(N,{N0=10,alpha=3,beta=0.09});
>
plot(K1,t=0..20,color=black,thickness=2,labels=["t,год","N,Численность популяции"],labeldirections=[HORIZONTAL,VERTICAL]);
```